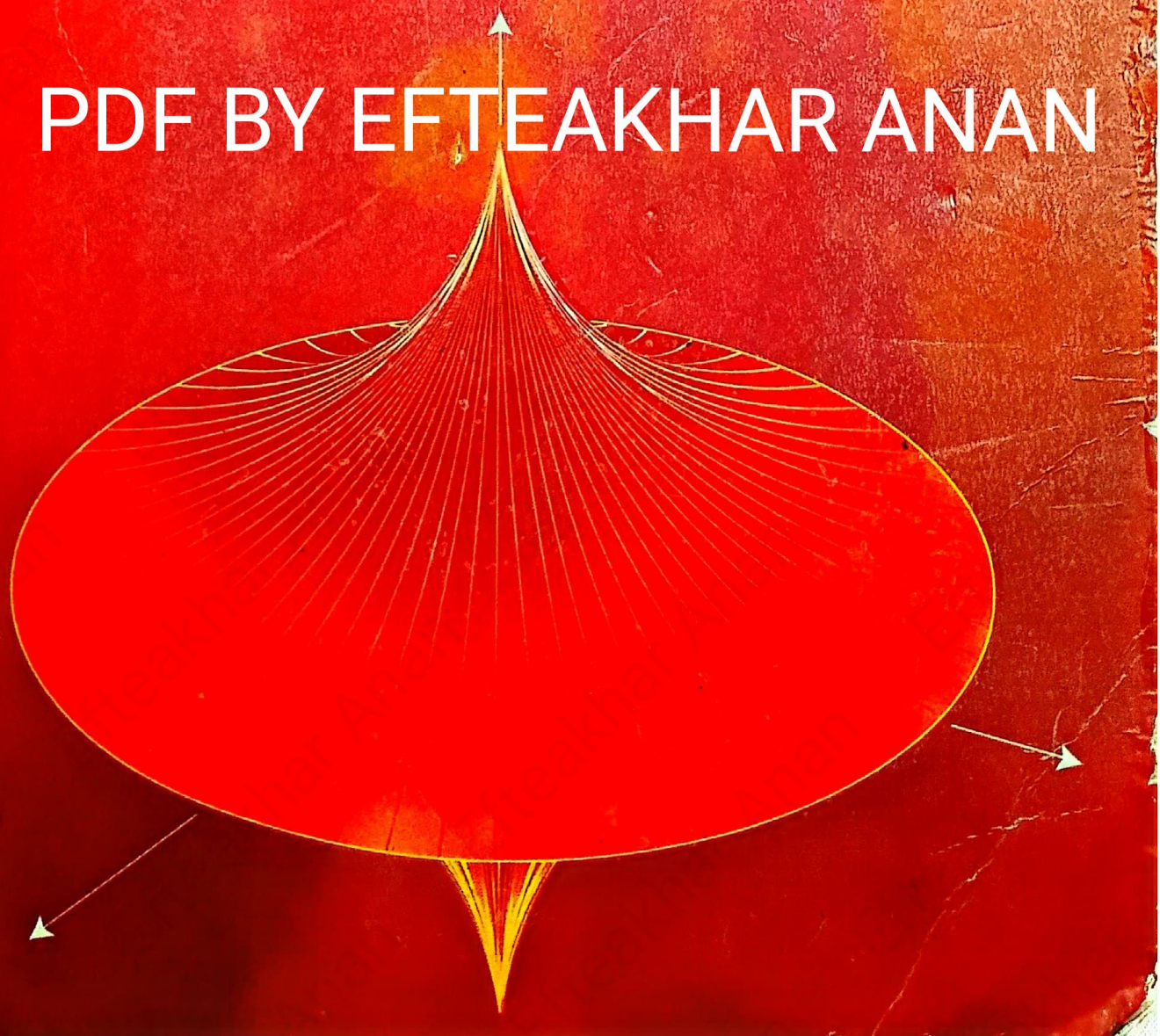
TITAS
MATH SERIES

- Dr. F. Rahman
- Ilias
- Hafiz
- Mvdul

ADVANCED

CALCULUS I

PDF BY EFTEAKHAR ANAN



National University Honours (NUH)
SYLLABUS WITH INDEX
Major Subject Cord–3753
Non-Major Subject Cord–6374

Functions & their graphs (Polynomial and rational functions logarithmic and exponential functions, trigonometric functions & their inverses, hyperbolic functions & their inverses, combinations of such functions). **[Chap–1(A), 1(B), 1(C)]**

Limit and continuity : Definitions and basic theorems on limit and continuity, Limit at infinity & infinite limits Computation of limits. **[Chap–2(A), 2(B)]**

Differentiation : Tangent lines and rates of change, Definition of derivative. One-sided derivatives. Rules of differentiation (proofs and applications). Successive differentiation. Leibnitz theorem (proof and application). Related rates. Linear approximations and differentials. **[Chap–2(C), 3(A), 3(B), 4(A), 4(B), 9(A)]**

Applications of Differentiation : Mean value theorem. Maximum and minimum values of functions. Concavity and points of inflection. Optimization problems. **[Chap–5 and 7]**

Integration : Antiderivatives and indefinite integrals. Techniques of integration. Definite integration using antiderivatives. Fundamental theorems of calculus (proofs and applications). Basic properties of integration. Integration by reduction. **[Chap–10 from 18]**

Applications of Integration : Arc length. Plane areas. Surfaces of revolution. Volumes of solids of revolution. Volumes of cylindrical shells. Volumes by cross sections. **[Chap–21(A), 22(A), 23(A), 23(B), 24(A), 24(B)]**

Graphing in polar coordinates : Tangents to polar curves. Arc length in polar coordinates. Areas in polar coordinates. **[Chap–9(B), 21(B), 22(B)]**

Improper integrals : Tests of convergence and their applications. Gamma and beta functions. **[Chap–19, 20(A), 20(B)]**

Indeterminate form of type 0/0. L'Hopital's rule. Other indeterminate forms. **[Chap–8]**

Approximation and Series : Taylor polynomials and series. Convergence of series. Taylor's series. Taylor's theorem and remainders. Differentiation and integration of series. Validity of Taylor expansions and computations with series. **[Chap–6]**

National University Syllabus
B-Sc(Pass), Paper–II
Subject Cord–141 **Full Marks–100**

Function and their graphs (Polynomial and rational functions, logarithmic and exponential functions. Trigonometric functions and their inverses, hyperbolic functions and their inverses. Combinations of such functions). **[Chap–1(A), 1(B), 1(C)]**

Limit and continuity : Definitions and basic theorems on limit and continuity, Limit at infinity and infinite limits Computation of limits. **[Chap–2(A), 2(B)]**

Differentiation : Tangent lines and rates of change. Definition of derivative. One-sided derivatives, Rules of differentiation (Proofs and applications) Successive differentiation, Leibnitz theorem (Proof and application). Related rates. Linear approximations and differentials. **[Chap–2(C), 3(A), 3(B), 4(A), 4(B), 9(A)]**

Applications of Differentiation : Rolle's theorem. Mean value theorem, Maximum and minimum values of functions, Concavity and points of inflection, Optimization problems Curvature. **[Chap–5 and 7]**

Integration : Antiderivatives and indefinite integrals. Techniques of integration. Definite integration using antiderivatives. Definite integration using riemann sums. Fundamental theorems of calculus (Proofs and Applications). Basic properties of integration. Integration by reduction. **[Chap–10 from18]**

Application of Integration : Are length. Plane areas. Sufaces of revolution. Volumes of solids of revolution. **[Chap–21(A), 22(A), 23(A), 23(B), 24(A), 24(B)]**

Graphing in polar coordinates. Tangents to polar curves, Areas in polar coordinates, Are length in polar coordinates. **[Chap–9(B), 21(B), 22(B)]**

Improper integrals. Tests of convergence and their applications. Gamma and beta functions. Indeterminate form of type 0/0. L'Hospital's rule. Other indeterminate forms. **Chap–8]**

Approximation and Series : Taylor polynomials and series, Convergence of series, Taylor's Series. Taylor's theorem and remainders. Differentiation and integration of series. Validity of Taylor expansions and computations with series. **[Chap–6]**

এই লেখকের Calculus–II বইতে নিম্নোক্ত অধ্যায় দেওয়া আছে।

Call–II : Functions of several variables : Limits and continuity. Partial derivatives. Differentiability, linearization and differentials. The chain rule. Partial derivatives with constrained variables, Directional derivatives, Extreme values and saddle points of functions of several varjables. Lagrange multipliers. Taylor's formula. **[Call–II : Chap–3(A), 3(B), 4(A), 4(B), 4(C), 4(D), 4(E), 6, 7]**

Call–II : Multiple Integration : Double integrals and iterated integrals. Double integrals over nonrectangular regions. Double integrals in polar coordinates. Area by double integrals. Triple integrals and iterated integrals, volume as a triple integrals. **[Call–II : Chap–8, 9, 10, 11]**

National University

Bachelor of Honours Courses

According to new curriculum (Grading & Credit System)
(Questions will be set from recommended textbooks)

Distribution of Marks in Question Paper
Effective from : Session 2009–2010

For 1st Year Honours Course

Full Marks : 100 Time of Examination : 4 Hours

Question Types		Details	Marks
Part–A	Brief Questions (such as definition / Quizzes) (Covering all the chapters of the syllabus.)	20 questions out of 24 such as question number 1. (a) – (x)	20 × 1 = 20
Part–B	Short Questions (such as Conceptual / Numerical) (Covering all the chapters of the syllabus)	5 Questions Out of 8 Question will be divided into 2 parts, such as question 2.(A) & (B)	5 × (4+4) = 40
Part–C	Broad Questions (such as Analytical / Conceptual / Numerical)	4 Questions Out of 7 (Question may be divided into 10 (i), (ii), (iii) etc. subsections) For mathematical/ numerical questions this condition may be relaxed	4 × 10 = 40
			Total = 100

INDEX

NUH–	National University Honours
NUH(NM)–	National University Honours (Non-major)
NU(Pre) –	National University Preliminary
DUH–	Dhaka University Honours
RUH–	Rajshahi University Honours
CUH–	Chittagong University Honours
KUH–	Khulna University Honours
JUH–	Jahangirnagor University Honours
SJUH–	Shah Jalal University Honours

National University

Bachelor of Honours Courses

According to new curriculum (Grading & Credit System)
(Questions will be set from recommended textbooks)

Distribution of Marks in Question Paper
Effective from : Session 2009–2010

For 1st Year Physics, Chemistry, Biology, Statistics and Geography Students

Full Marks : 50 Time of Examination : 2.5 Hours

Question Types		Details	Marks
Part–A	Brief Questions (such as definition / Quizzes) (Covering all the chapters of the syllabus.)	10 questions out of 12 such as question number 1. (a) – (*l*)	10 × 1 = 10
Part–B	Short Questions (such as Conceptual / Numerical) (Covering all the chapters of the syllabus)	5 Questions Out of 8 such as question number 2, 3, etc.	5 × 4 = 20
Part–C	Broad Questions (such as Analytical / Conceptual / Numerical)	2 Questions Out of 4 (Question may be divided into 10 (i), (ii), (iii) etc. subsections) For mathematical/ numerical questions this condition may be relaxed	2 × 10 = 20
			Total = 50

সূচীপত্র

Chapter No	Chapter Name	Page
Chapter–1(A)	: ফাংশন এর সংজ্ঞা (Definition of Function)	1
1.A.2.	ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain, Codomain and Range of function)	1
1.A.3.	সসীম সেট হইতে সসীম সেটে চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশন (Function defined by graph from finite set to finite set)	3
1.A.4.	সসীম সেট হইতে সসীম সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশনের সংখ্যা (Number of function defined from finite set to finite set)	4
1.A.5.	ফাংশনের লেখ (Graph of a Function)	5
1.A.6.	লেখচিত্র হইতে ফাংশনের ধারণা	5
1.A.8.	বাস্তব সংখ্যার ক্রম (Order of real numbers)	7
1.A.9.	ব্যবধি (Interval)	7
1.A.10.	অসীম ব্যবধি বা রশ্মি (Infinite interval or ray)	8
1.A.11.	বাস্তব সংখ্যার পরম মান (Absolute value of real numbers)	8
1.A.12.	ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করার কিছু নিয়ম	10
1.A.13.	$x^2 - a^2 < 0$ অসমতার সমাধান	23
1.A.14.	$x^2 - a^2 > 0$ অসমতার সমাধান	23
1.A.15.	সংখ্যারেখায় অসমতার সমাধান	24
	Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)	41
	Exercise–1(A)	47
Chapter–1(B)	: বিভিন্ন প্রকার ফাংশন (Different types of Functions)	51
	সমান ফাংশন, অভেদ ফাংশন, ধ্রুবক ফাংশন	51
	ইনটু ফাংশন, এক-এক ফাংশন	52
1.B.6.	সার্বিক বা সর্বগ্রাহী বা অনটু ফাংশন (Onto Function)	54
1.B.7.	মেনি ওয়ান ফাংশন (Many One Function)	55
1.B.8.	বিপরীত ফাংশন (Inverse Function)	56
1.B.9.	সীমাবদ্ধ ফাংশন (Bounded function)	61
1.B.10.	বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন (Increasing function)	61
1.B.11.	হ্রাসপ্রাপ্ত ফাংশন (Decreasing function)	61
1.B.12.	পরম মান ফাংশন (Absolute Value Function)	62
1.B.13.	সিগনাম ফাংশন (Signum Function)	62
1.B.14.	সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখিক ফাংশন (Greatest IntegerFunction)	62
1.B.15.	গুণজ ফাংশন (Composite Function)	65
	বহুপদী ফাংশন	65
	মূলদীয় বহুপদী ফাংশন	66
1.B.18.	বীজগণিতীয় ফাংশন (Algebraic Function)	66
1.B.19.	ট্রান্সসেনডেন্টাল বা তুরীয় ফাংশন	66
1.B.20.	সূচকীয় ফাংশন (Exponential Function)	67
1.B.21.	লগারিদিমিক ফাংশন (Lnarithmic Function)	67
1.B.22.	ত্রিকোণমিতিক বৃত্তীয় ফাংশন (Trigonometric Circular Function)	68
1.B.23.	বিপরীত বা ইনভারস্ বৃত্তীয় ফাংশন (Inverse Circular Functions)	70
1.B.24.	হাইপাবোলিক ফাংশন (Hyperbolic Function)	72
1.B.25.	ইনভারস হাইপারবোলিক ফাংশন (Inverse Hyperbolic Function)	74
1.B.26.	জোড় বা যুগ্ম ফাংশন (Even Function)	76
1.B.27.	বেজোড় বা অযুগ্ম ফাংশন (Odd Function)	76
1.B.28.	পর্যায়ী ফাংশন (Periodic Function)	78
	Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)	80
	Exercise–1(B)	89
Chapter–1(C)	: ফাংশনের লেখচিত্র (Graphs of Functions)	91
	Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)	106
	Exercise–1(C)	114
Chapter–2(A)	: Limit (সীমা), চলরাশির সীমা,	117
	ফাংশনের সীমা, $(\delta - \varepsilon)$ এর সাহায্যে ফাংশনের সীমা	117
2.A.5.	ডান সীমা (Right Hand Limit or R. H. L.)	118
2.A.6.	বাম সীমা (Left Hand Limit or L. H. L.)	118
2.A.7.	$+\infty$ এবং $-\infty$ এর অর্থ বা তাৎপর্য	119
2.A.11.	ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব	120
2.A.12.	সীমার মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem on Limit)	121
2.A.13.	সীমাস্থ মানের সারণী তালিকা	123
2.A.14.	অনির্ণেয় আকার (Indeterminate Form)	124
	Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)	132
	Exercise–2(A)	140
Chapter–2(B)	: Continuity (অবিচ্ছিন্নতা)	143
2.B.2.	অবিচ্ছিন্ন এবং বিচ্ছিন্ন ফাংশনের কয়েকটি লেখচিত্র	143
2.B.3.	অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের সংজ্ঞা (Definition of a continuous Function)	143
2.B.4.	বিচ্ছিন্নতার প্রকার (Clasification of Discontinuity)	146
	Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)	154
	Exercise–2(B)	159
Chapter–2(C)	: Differentiability (অন্তরীকরণ যোগ্যতা)	163
2.C.1.	ফাংশনের ডেরিভেটিভ (Derivative of a Function)	163
2.C.2.	অন্তরীকরণযোগ্য (Differentiable) ফাংশন	163
2.C.3.	বাম ডেরিভেটিভ (Left Hand Derivative or L. H. D) বা ডান ডেরিভেটিভ (Right Hand Derivative বা R. H. D)	163
2.C.4.	ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য ফাংশন	164

2.C.5. কোন বিন্দুতে ফাংশনের ডেরিভেটিভের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা ... 175
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) ... 175
Exercise–2(C) ... 179

Chapter–3(A) : Differentiation (অন্তরীকরণ) ... 181
3.A.1 অন্তরক সহগ (Differential Coefficient) ... 181
3.A.2. অন্তরীকরণ (Differentiation) ... 181
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) ... 200
Exercise–3(A) ... 201

Chapter–3(B) : Differentiatial Coefici-ents of Various Types of Functions (বিভিন্ন ফাংশনের অন্তরক সহগ) ... 203
3.B.1. অন্তরক সহগ নির্ণয়ের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ... 203
3.B.2. অন্তরক সহগের চেইন রুল ... 203
3.B.3. লগারিদম পদ্ধতিতে অন্তরীকরণ (Logarithmic Differentiation) ... 203
3.B.4. অব্যক্ত সম্পর্কের (Implicit relation) অন্তরীকরণ ... 204
3.B.5. পরামিতিক সমীকরণ (Parametric equation) এর অন্তরক সহগ ... 204
3.B.6. প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (Method of Substiiution) এর সাহায্যে অন্তরক সহগ ... 204
3.B.7. g(x) এর সাপেক্ষে f(x) এর অন্তরক সহগ ... 204
3.B.8. হাইপারবোলিক ফাংশনের অন্তরক সহগ ... 204
3.B.9. বিপরীত হাইপারবোলিক ফাংশনের অন্তরক সহগ ... 205
3.B.10. সম্পর্কিত হার সমস্যা (Related rate problems) ... 229
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) ... 234
Exercise–3(B) ... 236

Chapter–4(A) : Successive Differentiation (পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ) ... 243
4.A.1. পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ এবং ইহার প্রতীক সমূহ ... 243
4.A.2. $\cos^p x$ অথবা $\sin^q x$ অথবা $\sin^p x \cos^q x$ তম আকারের সম্পর্কের n তম অন্তরক সহগ যেখানে $p, q \in \mathbb{N}$ ... 247
4.A.3. মূলদীয় বীজগণিতীয় ফাংশনের n তম অন্তরক সহগ ... 249
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) ... 253
Exercise–4(A) ... 254

Chapter–4(B) : Leibnitz's Theorem (লিবনীজের উপপাদ্য) ... 261
4.B.1. $(y_n)_0$ নির্ণয় [Determination of $(y_n)_0$] ... 271
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) ... 279
Exercise–4(B) ... 280

Chapter–5 : Rolle's and Mean Value Theorem (রোলের উপপাদ্য ও গড়মান উপপাদ্য) ... 285
5.1. রোলের উপপাদ্য (Rolle's theorem) ... 285
5.2. রোলের উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা ... 286
5.3. গড়মান অথবা মধ্যমান উপপাদ্য (Mean Value Theorem) ... 287
5.4. গড়মান উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা ... 288
5.5. দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্য (Second Mean value theorem) ... 288
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) ... 299
Exercise–5 ... 301

Chapter–6 : Taylor's and Maclaurin's theorem and series (টেলর এবং ম্যাকলরিন উপপাদ্য ও ধারা) ... 303
6.1. ম্যাকলরিন বহুপদী (Maclaurin polynomial) ... 303
6.2. টেলর বহুপদী (Taylor polynomial) ... 303
6.3. টেলর উপপাদ্য (Taylor's theorem) ... 307
6.4 টেলর ধারা (Taylor's Series) ... 308
6.5. টেলর ধারা এবং ম্যাকলরিন ধারার ব্যর্থতা (Failures of Taylor's series and Maclaurin series) ... 312
6.6. টেলর উপপাদ্যের n তম অবশেষ (remainder) নির্ণয়ের সূত্র ... 312
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) ... 324
Exercise–6 ... 333

Chapter–7 : Maximum and Minimum Value of a Function (ফাংশনের গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমান) ... 337
7.1. ক্রমবর্ধমান ফাংশন (Incr-easing function) ... 337
7.2. ক্রমহ্রাসমান ফাংশন (Decr-easing function) ... 337
7.3. কোন বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান ফাংশন ... 337
7.4. কোন বিন্দুতে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন ... 337
7.7. কোন ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন ... 338
7.8. ফাংশনের গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান ... 339
7.9. পরম গরিষ্ঠমান ও পরম লঘিষ্ঠমান (Absolute maximam value and absolute minimum value) ... 340
7.10. কোন ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের পরম গরিষ্ঠমান ও পরম লঘিষ্ঠমান ... 341
7.11. স্থানীয় গরিষ্ঠমান ও স্থানীয় লঘিষ্ঠমান (Local maximum value and loeal minimum value) ... 342
7.12. গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত ... 342
7.13. অবতলতা (Concauity) ... 343
7.14. গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ধারণ ... 345
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) ... 366
Exercise–7 ... 373

Chapter–8 : Indeterminant Form (অনির্ণেয় আকার) ... 377
8.4. অনির্ণেয় আকার $0.\infty$ ... 380
8.5. অনির্ণেয় $\infty - \infty$ আকার ... 381
8.6. অনির্ণেয় আকার 0^0, 1^∞ এবং ∞^0 ... 381
8.7. বিস্তার যোগ্য পদ্ধতি (Expansion Method) ... 382
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) ... 401
Exercise–8 ... 404

Chapter–9(A) : Tangents and Normals (in cartesian) (স্পর্শক এবং অভিলম্ব (কার্তেসীয় আকারে)) 411
9.A.1. স্পর্শক 411
9.A.2. স্পর্শকের সমীকরণ (Equation of a Tangent) 411
9.A.3. প্যারামেট্রিক আকারের ফাংশনের স্পর্শকের সমীকরণ 415
9.A.4. মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ (Equation of a Tangent at the Origin) 416
9.A.5. নর্মাল বা অভিলম্ব 416
9.A.6. প্রকাশ্য এবং অপ্রকাশ্য আকারের ফাংশনের নর্মালের সমীকরণ (Equation of Normals of Functions of Explicit and Implict Forms) 416
9.A.7. প্যারামেট্রিক্স আকারের ফাংশনের নর্মালের সমীকরণ 418
9.A.8. দুইটি ছেদিত বক্ররেখার অন্তর্গত কোণ (Angle between two Intersecting Straight Lines) 420
9.A.9. উপস্পর্শক, উপঅভিলম্ব বা উপনর্মাল এবং স্পর্শক ও অভিলম্বের দৈর্ঘ্য (Subtangent, Subnormal and Lengths of Tangent and Normal) 423
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 433
Exercise–9(A) 436
Chapter–9(B) : প্রথম পরিচ্ছেদ
(Tangents and Normals (in polar) (স্পর্শক এবং অভিলম্ব (পোলার আকারে)) 445
9.B.1. কোন বক্ররেখার উপরস্থ কোন বিন্দুতে স্পর্শক ও ব্যাসার্ধ ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ (Angle between a Tangent and a Radius Vector on a Curve) 445
Exercise–9(B) প্রথম পরিচ্ছেদ 447
Chapter–9(B) : দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ
Derivative of an Are taught (in polar form) (চাপের দৈর্ঘ্য, ট্যানজেন্ট, নর্মাল (পোলার আকারে)) 448
9.B.2. চাপের দৈর্ঘ্যের ডেরিভেটিভ (পোলার আকারে) [Derivative of an Arc tangth (In polar Form)] 448
9.B.3. পোলার সাবট্যানজেন্ট এবং সাবনর্মাল (Polar subtangent and polar subnormal) 448
9.B.4. পোলার ফর্মে স্পর্শকের এবং নর্মালের দৈর্ঘ্য (Length of a Tangent and a Normal in polar Form) 449
9.B.5. পোল হতে স্পর্শকের উপর লম্ব (Perpendicular from a pole on a Tangent) 449
Exercise–9(B) দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ 452
Chapter–9(B) : তৃতীয় পরিচ্ছেদ
Angle Between two curven (in polar form) (দুইটি বক্ররেখার অন্তর্গত কোণ (পোলার আকারে)) 453
9.B.6. দুইটি বক্ররেখার অন্তর্গত কোণ (পোলার আকারে) [Angle between two curves (In Polar form)] 453
Exercise–9(B) তৃতীয় পরিচ্ছেদ 455
Chapter–9(B) : চতুর্থ পরিচ্ছেদ
Pedal equation of a curve in cartesian form (পেডাল সমীকরণ (কার্তেশীয় এবং পোলার আকারে)) 456
9.B.7. কার্তেসীয় আকারের সমীকরণ হতে পেডাল সমীকরণ (Pedal Equation of a Curve in Cartesian Form) ... 456
9.B.8. পোলার আকারের সমীকরণ হতে পেডাল সমীকরণ (Pedal Equation of a curve in Polar Form) 458
Exercise–9(B) চতুর্থ পরিচ্ছেদ 459
Chapter–9(B) : পঞ্চম পরিচ্ছেদ
Pedals Equation (পেডাল সমীকরণ) 461
9.B.9. প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... , n তম ধনাত্মক পেডাল 461
9.B.10. ঋনাত্মক পেডাল (Negative Pedals) 461
9.B.11. কার্তেসীয় আকারের সমীকরণ হইতে প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ [First positive pedal equation of a curve in cartesian form) 461
9.B.12. পোলার আকারের সমীকরণ হইতে ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ (Positive pedal equation of a curve in polar form) 463
9.B.13. পেডাল বক্ররেখা হইতে ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ (Positive pedal equation from pedal curves) 466
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 467
Exercise–9(B) পঞ্চম পরিচ্ছেদ 468
২০০৯-২০১০ শিক্ষাবর্ষ হইতে কার্যকর গ্রেডিং ও ক্রেডিট পদ্ধতিতে প্রশ্নের ধরণ অনুযায়ী ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস অংশের গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন সম্ভার 469
Chapter–10 : Integration (ইন্টিগ্রেশন) 491
10.3. '0' এর ইন্টিগ্রেশন 491
10.4. ইন্টিগ্রেশন ধ্রুবক (Integration Constant) 491
10.5. প্রয়োজনীয় ইন্টিগ্রেশন ফর্মূলা 492
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 500
Exercise–10 502
Chapter–11 : Method of Substitution (প্রতিস্থাপন পদ্ধতি) 505
11.2. চলক এর পরিবর্তন (Change of Variable) 505
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 514
Exercise–11 516
Chapter–12(A) : Techniques of Integration (ইন্টিগ্রেশনের কলাকৌশল) 519
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 529
Exercise–12(A) 530
Chapter–12(B) : ইন্টিগ্রেশনের কলাকৌশল 533
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 543
Exercise–12(B) 544
Chapter–12(C) : ইন্টিগ্রেশনের কলাকৌশল 547
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 559
Exercise–12(C) 560

Chapter–12(D) : ইন্টিগ্রেশনের কলাকৌশল 563
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 574
Exercise–12(D) 575

Chapter–13 : Integration by partial fraction (আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে ইন্টিগ্রেশন) 577
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 588
Exercise–13 589

Chapter–14 : Integration by Parts (অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন) 593
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 608
Exercise–14 609

Chapter–15 : Integration by Successive Reduction (ক্রমিক লঘুকরণ প্রক্রিয়ার সাহায্যে ইন্টিগ্রেশন) 613
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 624
Exercise–15 625

Chapter–16(A) : Definite Integral (নির্দিষ্ট ইন্টিগ্র্যাল) 627
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 646
Exercise–16(A) 647

Chapter–16(B) : Definite Integral (নির্দিষ্ট ইন্টিগ্র্যাল) 651
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 667
Exercise–16(B) 669

Chapter–17 : Reduction Formula (লঘুকরণ সূত্র) 671
17.1. ওয়েলীর সূত্র (Walle's formula) 671
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 686
Exercise–17 687

Chapter–18 : Definite Integral as the limit of a Sum (যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট ইন্টিগ্র্যাল) 689
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 702
Exercise–18 703

Chapter–19 : Gamma and Beta Function (গামা এবং বিটা ফাংশন) 705
19.1. গামা ফাংশন বা সেকেন্ড অয়লারিয়ান 705
19.2. গামা ফাংশনের আবর্ত ফর্মূলা (Recursion Formula for Gamma Function) 705
19.3. ফ্যাক্টরিয়াল ফাংশন (Factorial Function) 706
19.4. গামা ফাংশন সম্পর্কিত কিছু সহজ আকৃতির উপপাদ্য ও উদাহরণ 707
19.5. বিটা ফাংশন বা ফার্স্ট অয়লারিয়ান (Beta Function or First Eulerian) 709
19.6. বিটা এবং গামা ফাংশনের সম্পর্ক 712
19.7. লেজেন্ডারের ডুপ্লিকেশন ফর্মূলা (Legendre Duplication Formula) 720
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 728
Exercise–19 731

Chapter–20(A) : Improper Integrals (অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল) 733
20.A.1. অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল (Improper Integrals) 733
20.A.2. প্রথম শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের মান 733
20.A.3. [a, ∞) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল 734
20.A.4. (– ∞, a] ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল 738
20.A.5. (– ∞, ∞) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল 738
20.A.6. দ্বিতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের মান 740
20.A.7. অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল যা (a, b] ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু a_+ বিন্দুতে অসীমায়িত (Improper Integral which is continuous in the interval (a, b] but unbounded at point a_+ ..740
20.A.8. অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল যা [a, b) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু b_- বিন্দুতে অসীমায়িত (Improper Integral which is continuous in the interval [a, b) but unbounded at the point b_-) 742
20.A.9. অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল যা [a, c) এবং (c, b] ব্যবধির উভয় ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু c বিন্দুতে অসীমায়িত (Improper Integral which is continuous in the interval [a, c) and (c, b] but unbounded at point C) 743
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 748
Exercise–20(A) 750

Chapter–20(B) : Improper Integrals (অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল) 753
20.B.1. ইন্টিগ্রালের অন্তর্গত অন্তরীকরণ (Differentiation under Integral Signs) 753
20.B.2. ফ্রুলানীর ইন্টিগ্রাল (Frullan's Integrals) 753
20.B.3. ইন্টিগ্রালের অন্তর্গত ইন্টগ্রাল (Integration under Integral sign) 761
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 767
Exercise–20(B) 768

Chapter–21(A) : Area (in Cartesian) (ক্ষেত্রফল (কার্তেসীয় আকারে)) 769
21.A.1. ক্ষেত্রফল (Area) 769
21.A.5. প্রতিসম (Symmetric) 771
21.A.6. কয়েকটি বক্ররেখা এবং উহাদের সনাক্তকরণ বৈশিষ্ট্যবলী 772
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 793
Exercise–21(A) 796

Chapter–21(B) : AreA (in polar) (ক্ষেত্রফল (পোলার আকারে)) 801
21.B.8. পোলার সমীকরণে প্রতিসম সনাক্তকরণ 801
21.B.9. বিশেষ কিছু বক্ররেখার আকার ও বৈশিষ্ট 802
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 816
Exercise–21(B) 820

Chapter–22(A) : Rectification (in Cartesian) (দৈর্ঘ্য নির্ণয় করণ (কার্তেসীয় আকারে) 823
22.A.2. কার্তেসীয় স্থানাংকে চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় 823
22.A.3. প্যারামিটার যুক্ত রেখার চাপের দৈর্ঘ্য 824
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 837
Exercise–22(A) 837

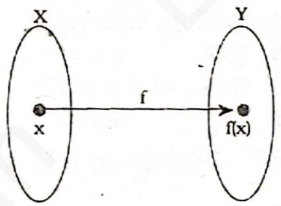
Chapter–22(B) : Rectification (in Polar) (দৈর্ঘ্য নির্ণয় করণ (পোলার আকারে)) 839
22.B.1. r = f[θ] রেখার চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর [Find are length of line r = f[θ]] 839
22.B.2. পেডাল সমীকরণ বিশিষ্ট রেখার চাপ দৈর্ঘ্য [Arc length of line with pedal equation] 839
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 842
Exercise–22(B) 843
Chapter–22(C) : Intrinsic Equation of a curve (বক্ররেখার স্বকীয় সমীকরণ) 844
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 848
Exercise–22(C) 848
Chapter–23(A) : Volume of Solids of Revolution (In Cartesian) (আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর আয়তন (কার্তেসীয় আকারে)) 849
23.A.1. আবর্তন জনিত ঘনবস্তু (Solid of revolution) 849
23.A.5. ভারকেন্দ্র (Centre of gravity) 868
23.A.6. প্যাপাস ও গুলডিনের তত্ত্ব (Theorem of pappus and Guldin) 869
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 873
Exercise–23(A) 874
Chapter–23(B) : Volume of Solids of Revolution (আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর আয়তন (পোলার আকারে)) 877
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 881
Exercise–23(B) 882
Chapter–24(A) : Surface Area of Solids of Revolution (In Cartesian) (আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল (কার্তেসীয় আকারে)) .. 883
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 894
Exercise–24(A) 894
Chapter–24(B) : Surface Area of solids of Revolution (In Polar Co-ordiuale) (আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল (পোলার স্থানাংকে) 897
24.B.1. পোলার স্থানাংক এবং কার্তেসীয় স্থানাংকের মধ্যে সম্পর্ক 897
24.B.2. পোলার স্থানাংকে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় .. 897
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন) 900
Exercise–24(B) 900
২০০৯-২০১০ শিক্ষাবর্ষ হইতে কার্যকর গ্রেডিং ও ক্রেডিট পদ্ধতিতে প্রশ্নের ধরণ অনুযায়ী ইনটিগ্র্যাল ক্যালকুলাস অংশের গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন সম্ভার 901
বিভিন্ন বিশ্বঃবিদ্যালয়ের প্রশ্নপত্র 921
জাতীয় বিশ্বঃবিদ্যালয়ের প্রশ্নপত্র এবং সমাধান নির্দেশীকা 939

———×———

Chapter–1(A)
ফাংশন
FUNCTIONS

1. A. 1. ফাংশন-এর সংজ্ঞা (Definition of Function) :
[NUH–02, 04, NUH(NM)–09, BSc(Pass)–06, JUH–2004]

১৬৭৩ খৃষ্টাব্দে লিবনীজ প্রথম 'ফাংশন' শব্দটি ব্যবহার করেন এবং ১৬৯৩ খৃষ্টাব্দে তিনি ফাংশনের প্রথম সংজ্ঞা দেন। ১৮৩৭ খৃষ্টাব্দে ডিরিচলেট বাস্তব চলকের বাস্তব ফাংশনের সংজ্ঞা দেন, এই সংজ্ঞাটিকে ফাংশনের প্রথম আধুনিক সংজ্ঞা হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। পরবর্তীতে বিভিন্ন গণিতবিদদের মিলিত প্রচেষ্টায় ফাংশনের আধুনিক সংজ্ঞার পূর্ণাঙ্গতা প্রকাশ পায়। নিম্নে ফাংশনের সংজ্ঞা দেওয়া হইল ঃ



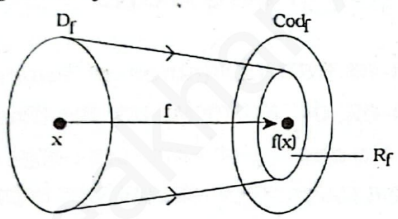
সংজ্ঞা (Definition) : যদি X ও Y দুইটি অশূন্যক সেট এবং f এরূপ একটি নিয়ম হয় যে, প্রত্যেক $x \in X$ এর জন্য একটি অনন্য $y \in Y$ পাওয়া যায় তবে f কে X সেট হইতে Y সেটে একটি ফাংশন বলা হয়। ইহাকে $f : X \to Y$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [If X and Y are two non-empty sets and f is such a rule that gives a unique $y \in Y$ for each $x \in X$ then f is called a function from the set X to the set Y. It is denoted by $f : X \to Y$]

$f : X \to Y$ ফাংশনে x এর f সম্পর্কিত উপাদান f(x) বা y কে x বিন্দুতে f এর মান (value) বা প্রতিবিম্ব (image) বলা হয়। উপরের সংজ্ঞায় x অনির্ভরশীল চলক (independent variable) এবং y বা f(x) নির্ভরশীল চলক (dependent variable)।

1.A.2. ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain, Codomain and Range of function) ঃ [NUH–02, 04, NUH(NM)–06, 07, 08, 09, BSc(Pass)–06, RUH–2009, SJU–2004]

ধরি $f : X \to Y$ একটি ফাংশন। তাহা হইলে X কে f এর ডোমেন, Y কে f এর কোডোমেন বা কাউন্টার ডোমেন এবং Y সেটের অন্তর্গত সকল f সম্পর্কিত উপাদান বা প্রতিবিম্ব নিয়ে যে উপসেট গঠিত তাহাকে ফাংশনটির রেঞ্জ বলা হয়। f এর ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জকে যথাক্রমে D_f, Cod_f এবং R_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়। Let $f : X \to Y$ is a function. Then X is called domain of f, Y is called

codomain or counter domain of f and the subset in Y of all f related elements or image is called range of the function. Domain, Codomain and Range of f are denoted by D_f, Cod_f and R_f respectively.]



এখানে $R_f = \{f(x) \in Cod_f : \forall x \in D_f\}$

অর্থাৎ $R_f \subseteq Cod_f$.

উদাহরণ–1. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত (Let the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined as follows) :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{যখন} \quad x < -1 \\ 3x-6 & \text{যখন} \quad -1 \le x < 5 \\ 4x-1 & \text{যখন} \quad x \ge 5 \end{cases}$$

(i) $f(-3/2)$; (ii) $f(4)$; (iii) $f(\pi)$; (iv) $f(3-\sqrt{10})$, (v) $f(\sqrt{5}+3)$ মানগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (i) $-\frac{3}{2} \in (-\infty, -1)$

সুতরাং $f(-3/2) = 2.(-3/2) + 5 = 2$ [$f(x) = 2x + 5$ সূত্র হইতে]

(ii) $4 \in [-1, 5)$

সুতরাং $f(4) = 3.4 - 6 = 6$ [$f(x) = 3x - 6$ সূত্র হইতে]

(iii) $\pi \in [-1, 5)$

সুতরাং $f(\pi) = 3\pi - 6$ [$f(x) = 3x - 6$ সূত্র হইতে]

(iv) $3 - \sqrt{10} \in [-1, 5)$

সুতরাং $f(3-\sqrt{10}) = 3(3-\sqrt{10}) - 6$

$= 3 - 3\sqrt{10}$ [$f(x) = 3x - 6$ সূত্র হইতে]

(v) $\sqrt{5} + 3 \in [5, \infty)$

সুতরাং $f(\sqrt{5}+3) = 4(\sqrt{5}+3) - 1$

$= 4\sqrt{5} + 11$ [$f(x) = 4x - 1$ সূত্র হইতে]

উদাহরণ–2. $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হইলে ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [The function $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$ is defined by $f(x) = 3x + 2$ then domain, codomain and range.]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$

ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = \{0, 1, 2, 3\}$

$Cod_f = \{2, 5, 8, 11, 15\}$

এবং $R_f = \{f(0), f(1), f(2), f(3)\}$

$= \{2, 5, 8, 11\}$.

উদাহরণ–3. $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হইলে R_f নির্ণয় কর। [If the function $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = x^2$ then find R_f]

সমাধান ঃ $f : \{-2, -1, 0, -1, 2\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

$\therefore R_f = \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\}$

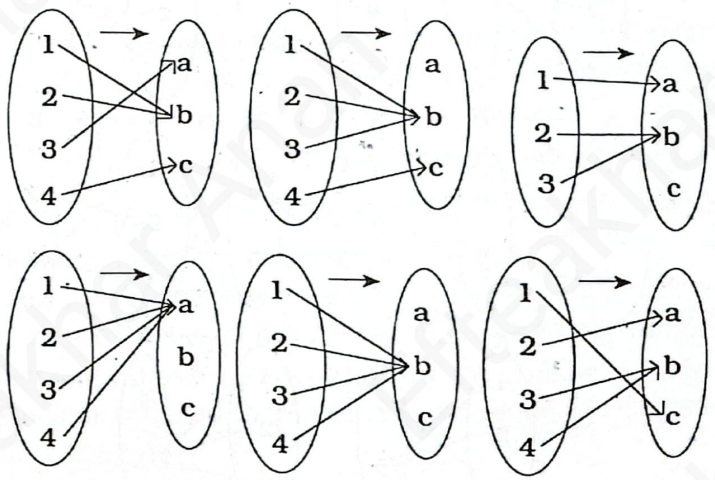
$= \{4, 1, 0, 1, 4\}$

$= \{4, 1, 0\}$

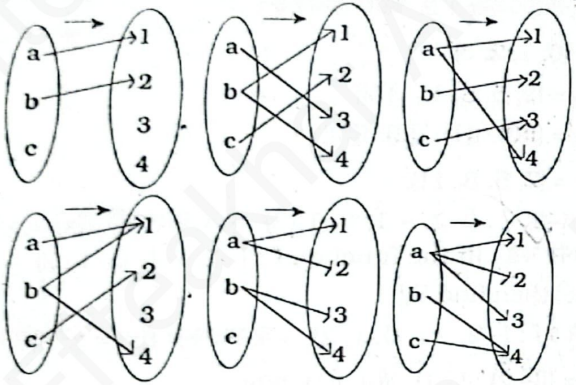
1.A.3. সসীম সেট হইতে সসীম সেটে চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশন (Function defined by graph from finite set to finite set) ঃ

যদি A সেটের প্রত্যেকটি উপাদান অনন্যভাবে B সেটের উপাদানের সাথে '→' প্রতীকের দ্বারা অথবা অন্য কোন সুবিধাজনক প্রতীকের সাহায্যে চিত্রের মাধ্যমে সম্পর্কিত করা যায় তবে ঐ সম্পর্কের প্রত্যেকটি A সেট হইতে B সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশন হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণ–4. {1, 2, 3, 4} সেট হইতে {a, b, c} সেটে নিম্নের প্রত্যেকটি চিত্রই সংজ্ঞায়িত ফাংশন। [Each of the following graphs is defined function from the set {1, 2, 3, 4} to the set {a, b, c}.]



উদাহরণ–5. {a, b, c} সেট হইতে {1, 2, 3, 4} সেটে নিম্নের কোন চিত্রই ফাংশন নয়।

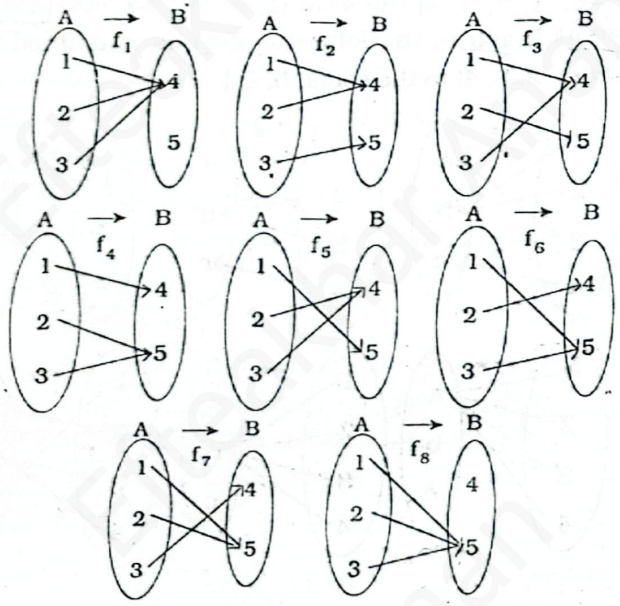


1.A.4. সমীম সেট হইতে সসীম সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশনের সংখ্যা (Number of function defined from finite set to finite set) ঃ

ধরি A এবং B দুইটি সসীম সেট। যদি $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$ হয় তবে A সেট হইতে B সেটে q^p সংখ্যক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়।

উদাহরণ–6. ধরি A = {1, 2, 3} এবং B = {4, 5}. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে যতগুলো ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায় তাহা চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর। [Let A = {1, 2, 3} and B = {4, 5} then, express the functions as diagrams which are defined from the set A to B.]

সমাধান ঃ A সেট হইতে B সেটে $2^3 = 8$টি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। ঐ ফাংশনগুলো নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে প্রদত্ত হইল।



1.A.5. ফাংশনের লেখ (Graph of a Function) ঃ ধরি $f : A \to B$ একটি ফাংশন। তাহা হইলে f এর লেখকে f^* দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। $f^* = \{(a, b) : a \in A, f(a) = b\}$, ইহা স্পষ্ট যে $f : A \to B$ ফাংশনের লেখ $f^* \subset A \times B$.

উদাহরণ–7. ধরি $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ একটি ফাংশন যাহা $f(x) = x^2 + x + 1$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে f এর লেখ নির্ণয় কর অর্থাৎ f^* নির্ণয় কর।

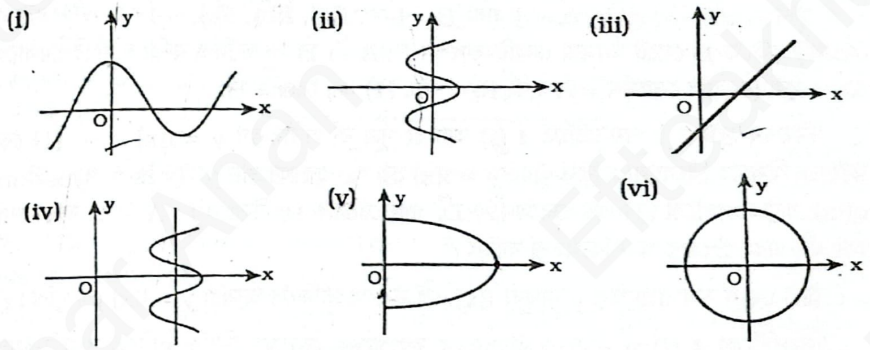
সমাধান ঃ এখানে $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$ $\quad f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

$f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$ $\quad f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 13$

সুতরাং f এর লেখ $f^* = \{(0, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 13)\}$.

1.A.6. লেখচিত্র হইতে ফাংশনের ধারণা (Concept of functions from graph) : xy সমতলে কোন লেখচিত্র y অক্ষের সমান্তরাল হইলে অথবা y অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখা কোন লেখচিত্রকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিলে ঐ লেখচিত্র $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ আকারের ফাংশন হইতে পারে না।

উদাহরণ–8. নিম্নের কোন কোন লেখচিত্র ফাংশন নয় তাহা ব্যাখ্যা কর।



সমাধান ঃ xy সমতলে y অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা অথবা y অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখা যদি কোন লেখচিত্রকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে তবে ঐ লেখচিত্র $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ আকারের ফাংশন হইতে পারে না।

সুতরাং (i) এবং (iii) লেখচিত্র দুইটি ব্যতিত কোন লেখচিত্রই ফাংশন নয়।

1.A.7. y = f(x) দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and range of function defined by y = f(x)) :

সংজ্ঞা ঃ x এর যে সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = f(x)$ সূত্র বা সমীকরণটি সংজ্ঞায়িত বা সিদ্ধ হয় তাহার সেট যদি A হয় তবে A কে ঐ সূত্রের ডোমেন বলা হয়। [If A is the set of all real values of x such that the formula or equation $y = f(x)$ be defined or satisfied then A is called domain of the formula.]

সংজ্ঞা ঃ $y = f(x)$ সূত্রের ডোমেন A এর প্রত্যেক মান বা বিন্দু x এর সাপেক্ষে y বা $f(x)$ সূত্রের যে সমস্ত মান পাওয়া যায় তাহার সেট যদি B হয় তবে B কে ঐ সূত্রের রেঞ্জ বলা হয়। [If B is the set of all values of y or $f(x)$ corresponding each of the values or points x in domain A of the formula $y = f(x)$ then B is called range of the formula.]

উপপাদ্য–1. যদি $y = f(x)$ সূত্রের ডোমেন A এবং রেঞ্জ B হয় তবে দেখাও যে A সেট হইতে B সেটে একটি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। [If A is domain and B is range of the formula $y = f(x)$ then show that a function is defined from the set A into the set B.]

প্রমাণ ঃ ধরি $y = f(x)$ ..... (1)

সূত্র বা সমীকরণটি x এর ... , a, b, c, ... বাস্তব মান বা বিন্দু সমূহের জন্য সংজ্ঞায়িত এবং ধরি x ঐ বাস্তব মান বা বিন্দু সমূহে y বা $f(x)$ এর বাস্তব মান সমূহ হইল যথাক্রমে ... , $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, ...

যদি $A = \{ \cdots , a, b, c, \cdots\}$ এবং $B = \{\cdots , f(a), f(b), f(c), \cdots\}$ হয়, তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে আমরা একটি ফাংশন $f : A \to B$ সংজ্ঞায়িত করিতে পারি যেখানে D_f = সূত্র (1) এর ডোমেন = A এবং R_f = সূত্র (1) এর রেঞ্জ = B.

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ পরবর্তীতে ঃ **(i)** আমরা সূত্র বা সমীকরণ $y = f(x)$ ..... (1) কে ফাংশন হিসাবে বিবেচনা করিব এবং $y = f(x)$ কে "x এর ফাংশন y" (y is a function of x) পড়িব। আরো (1) এর ডোমেনকে D_f এবং রেঞ্জকে R_f হিসাবে $f : A \to B$ ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জের মত বিবেচনা করিব।

(ii) কোন সমস্যায় শুধু y অথবা $f(x)$ এর উল্লেখ থাকিলে আমরা $y = f(x)$ কে বুঝিব।

নির্দেশীকা ঃ (i) $y = f(x)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় করিতে বলা হইলে x এর যে সমস্ত মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হইবে তাহার সেটটিই ডোমেন হইবে অথবা যে সমস্ত বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত নয় ঐ সমস্ত বিন্দু সমূহের সেটকে $\mathbb{R}$ হইতে বর্জন করিলে ফাংশনের ডোমেন D_f পাওয়া যাইবে।

(ii) $y = f(x)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন D_f এর সমস্ত মানের জন্য y বা $f(x)$ এর যে সমস্ত মান পাওয়া যায় তাহা হইল ফাংশনের রেঞ্জ R_f. অন্যভাবে $y = f(x)$ কে সমাধান করিয়া $x = g(y)$ আকারে পরিণত করিয়া ইহার D_g নির্ণয় করিলে ইহা R_f হইবে অর্থাৎ $D_g = R_f$ হইবে। তবে খেয়াল রাখিতে হইবে যদি $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটি $\frac{0}{0}$ আকারের হয় তবে $x - a$ এর উৎপাদক বা উৎপাদক সমূহ $f(x)$ হইতে বর্জন করিয়া যদি $f(a)$ নির্ণয় করা যায় তবে R_f এ $f(a)$ স্থান পাইবেনা। এই আকারের অন্য বিন্দুর জন্যও আগের মত অগ্রসর হইতে হইবে।

1.A.8. বাস্তব সংখ্যার ক্রম (Order of real numbers) : দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b এর মধ্যে নিম্নের যে-কোন একটি সম্পর্ক বিদ্যমান থাকিবে।

(i) $a < b$ অথবা (ii) $a = b$ অথবা (iii) $a > b$

মন্তব্য ঃ আমরা গণিতে প্রায়ই লিখি $a \geq b$. ইহার অর্থ এই যে হয় $a > b$ অথবা $a = b$. এক সাথে কখনই দুইটি শর্ত খাটে না।

1.A.9. ব্যবধি (Interval) : মনে করি দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b যেখানে $a < b$ ($a > b$ ও হইতে পারে)। a ও b এর একটি বা উভয়কে বাদ দিয়ে (বা লইয়ে) উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে ব্যবধি বলে। ব্যবধি চার প্রকার। নিম্নে ইহাদের আলোচনা করা হইল।

(i) খোলা ব্যবধি (Open interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a ও b কে বাদ দিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে খোলা ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b) বা]a, b[প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b excluding a and b is called open interval. It is denoted by the symbol (a, b) or]a, b[and is defined by $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.]



(ii) বদ্ধ ব্যবধি (Closed interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a ও b কে নিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে বদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে [a, b] প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b including the end values a and b is called closed interval. It is denoted by [a, b] and is defined by $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.]



(iii) অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি (Half open and half closed interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a কে বাদ দিয়ে এবং b কে নিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b] প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b excluding the end value a and including b is called half open and half closed interval. It is denoted by (a, b] and is defined by $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.]



(iv) অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি (Half closed and half open interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a কে নিয়ে এবং b কে বাদ দিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি বলে। ইহাকে [a, b) প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let a and b are two real numbers and $a < b$. The set of all real numbers between a and b including the end value a and excluding b is called half closed and half open interval. It is denoted by [a, b) and is defined by $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$.]



1.A.10. অসীম ব্যবধি বা রশ্মি (Infinite interval or ray) : অসীম ব্যবধি বা রশ্মি দুই প্রকার। নিম্নে উহাদের আলোচনা করা হইল।

(i) খোলা এবং অসীম ব্যবধি (Open and infinite interval) : কোন বাস্তব সংখ্যা a অপেক্ষা বৃহত্তর সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে খোলা এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, ∞) প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।



আবার, a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে খোলা এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $(-\infty, a)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।



(ii) বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি (Closed and infinite interval) : একটি বাস্তব সংখ্যা a সহ a হইতে বৃহত্তর সংকল বাস্তব সংখ্যাকে নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $[a, \infty)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x\}$$



আবার, একটি বাস্তব সংখ্যা a সহ a হইতে ক্ষুদ্রতর সকল বাস্তব সংখ্যাকে নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $(-\infty, a]$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$$



1.A.11. বাস্তব সংখ্যার পরম মান (Absolute value of real numbers) : যে-কোন বাস্তব সংখ্যা x এর মান শূন্য বা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে। কিন্তু x এর পরমমান সবসময়ই শূন্য বা ধনাত্মক হইবে। x এর পরম মানকে $|x|$ দ্বারা প্রকাশ

করা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। [The value of any real number x is zero or positive or negative. But absolute value of x is always zero or positive. The absolute value of x is denoted by $|x|$ and defined as follows]

$$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x \ge 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases} \quad \text{অথবা} \quad |x| = \begin{cases} 0 \text{ যখন } x = 0 \\ x \text{ যখন } x > 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

উদাহরণ ঃ $|0| = 0$, $|3| = 3$, $|-3| = -(-3) = 3$.

উপপাদ্য–2. x, α ও δ প্রত্যেকেই ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হইলে দেখাও যে $|x - \alpha| \le \delta$ যদি এবং কেবল যদি $\alpha - \delta \le x \le \alpha + \delta$ হয়। [If all x, α and δ are real numbers then show that $|x - \alpha| \le \delta$ if and only if $\alpha - \delta \le x \le \alpha + \delta$.]

প্রমাণ ঃ প্রথমে মনে করি $|x - \alpha| \le \delta$. তাহা হইলে বাস্তব সংখ্যার পরম মানের সংজ্ঞানুসারে $(x - \alpha) \ge 0$ হইলে পাই

$$|x - \alpha| = x - \alpha$$

এবং $(x - \alpha) < 0$ হইলে $|x - \alpha| = -(x - \alpha)$

$\therefore |x - \alpha| \le \delta$ শর্ত হইতে পাই

$x - \alpha \le \delta$ এবং $-(x - \alpha) \le \delta$

$\Rightarrow x \le \alpha + \delta$ এবং $x - \alpha \ge -\delta$

$\Rightarrow x \le \alpha + \delta$ এবং $x \ge \alpha - \delta$

$\Rightarrow \alpha - \delta \le x$ ..... (1)

এবং $x \le \alpha + \delta$ ..... (2)

(1) ও (2) হইতে পাই $\alpha - \delta \le x \le \alpha + \delta$

বিপরীতক্রমে মনে করি $\alpha - \delta \le x \le \alpha + \delta$

$\Rightarrow \alpha - \delta \le x$ এবং $x \le \alpha + \delta$

$\Rightarrow -\delta \le x - \alpha$ এবং $x - \alpha \le \delta$

$\Rightarrow \delta \ge -(x - \alpha)$ এবং $x - \alpha \le \delta$

$\therefore x - \alpha \le \delta$ ..... (3) এবং $-(x - \alpha) \le \delta$ ..... (4)

(3) ও (4) কে একত্র করিয়া পাই $|x - \alpha| \le \delta$

নোট–1. $\alpha = 0$ হইলে পাই $|x| \le \delta$ বা $-\delta \le x \le \delta$

নোট–2. $|x - \alpha| < \delta$ হইলে $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$

ছাত্র-ছাত্রীদের পাঠদানকালে লক্ষ্য করিয়াছি যে ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বাহির করা তাহাদের নিকট এক দুরুহ ব্যাপার। তাই তাহাদের কষ্ট লাঘবের জন্য ডোমেন ও রেঞ্জ বাহির করার কিছু নিয়ম এবং প্রত্যেক নিয়মের কিছু সমস্যা সহজভাবে সমাধান করিয়া দেওয়া হইল।

1.A.12. ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করার কিছু নিয়ম (Some rules to find domain and range) :

1. f(x) = c (ধ্রুবক) আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর কেবলমাত্র মান c পাওয়া যায় [Here f(x) gives only the value c for all real values of x]

$\therefore D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = \{c\}$

2. f(x) = ax + b (a ≠ 0) আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয় [Here f(x) gives real values for all real values of x.]

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$

$\Rightarrow x = \frac{y - b}{a}$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y.]

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

উদাহরণ–9. $f(x) = 3x + 5$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বাহির কর।

সমাধান ঃ এখানে $f(x) = 3x + 5$ ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$.

আবার $y = f(x) = 3x + 5$ হইলে $x = \frac{y - 5}{3}$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x বাস্তব হয়। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

3. $f(x) = \frac{1}{ax + b}$ $(a \neq 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে $ax + b = 0$ বা $x = -\frac{b}{a}$ এর জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = -\frac{b}{a}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয় অর্থাৎ f(x) সংজ্ঞায়িত হয়। [Here f(x) is not defined for $ax + b = 0$ or $x = -\frac{b}{a}$ and f(x) gives real values that is f(x) is defined for all real values of x except $x = -\frac{b}{a}$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{ax + b}$ $(a \neq 0)$

$\Rightarrow ax + b = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - b\right)$

এখানে $y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y except y = 0]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

উদাহরণ–10. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ (ii) $f(x) = \frac{2}{x + 3}$ (iii) $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \frac{1}{x - 2}$

$x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except x = 2.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{x - 2}$

$\Rightarrow x - 2 = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y} + 2$

$y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except y = 0.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(ii) $f(x) = \frac{2}{x + 3}$

$x = -3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except x = – 3.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{2}{x + 3}$

$\Rightarrow x + 3 = \frac{2}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{y} - 3$

$y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except y = 0.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(iii) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

এখানে $2x + 1 = 0$ বা $x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = -\frac{1}{2}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) is not defined for $2x + 1 = 0$ or $x = -\frac{1}{2}$ and f(x) gives real values for all real values of x except $x = -\frac{1}{2}$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{2x+1}$

$\Rightarrow 2x + 1 = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - 1\right)$

$y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except y = 0.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

4. $\mathbf{f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}}$ **(a, c ≠ 0)** আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে $cx + d = 0$ বা $x = -\frac{d}{c}$ এর জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত নয়। এবং $x = -\frac{d}{c}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) is not defined for $cx + d = 0$ or $x = -\frac{d}{c}$ and f(x) gives real values for all real values of x except $x = -\frac{d}{c}$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

$\Rightarrow cxy + dy = ax + b$

$\Rightarrow x(cy - a) = b - dy$

$\Rightarrow x = \frac{b - dy}{cy - a}$

এখানে $cy - a = 0$ বা $y = \frac{a}{c}$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y except $cy - a = 0$ or $y = \frac{a}{c}$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

উদাহরণ–11. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ **[NUH(NM)–2008]**

(ii) $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ **[NUH–2004]**

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$x = -1$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except x = – 1.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{x}{x+1}$

$\Rightarrow xy + y = x$

$\Rightarrow x = -\frac{y}{y-1}$

$y = 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except y = 1.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

(ii) $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$2x + 1 = 0$ বা $x = -\frac{1}{2}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except $2x + 1 = 0$ or $x = -\frac{1}{2}$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$\Rightarrow 2xy + y = x - 3$

$\Rightarrow x(2y - 1) = -(y + 3)$

$\Rightarrow x = -\frac{y+3}{2y-1}$

$y = \frac{1}{2}$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = \frac{1}{2}$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

5. $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে $x = a$ এর জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = a$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ is not defined for $x = a$ and $f(x)$ gives real values for all real values of x except $x = a$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{a\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$

$\Rightarrow y = x + a$ যেখানে $x \neq a$

$\Rightarrow x = y - a$ [$\because x \neq a$, সুতরাং $y \neq 2a$]

$\Rightarrow x = y - a,\ y \neq 2a$

এখানে $y = 2a$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = 2a$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{2a\}$.

উদাহরণ-12. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (ii) $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

এখানে $x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values for all real values of x except $x = 2$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$\Rightarrow y = x + 2$ যেখানে $x \neq 2$

$\Rightarrow x = y - 2,\ y \neq 4$ [$\because x \neq 2$]

এখানে $y = 4$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = 4$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{4\}$

(ii) $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

এখানে $x^2 - 9 = 0$ বা $x = \pm 3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values for all real values of x except $x^2 - 9 = 0$ or $x = \pm 3$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x + 3}$ যেখানে $x \neq 3$

$\Rightarrow x + 3 = \frac{1}{y}$ যেখানে $x \neq 3$ বা $y \neq \frac{1}{6}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y} - 3,\ y \neq \frac{1}{6}$

এখানে $y = \frac{1}{6}$ এবং 0 ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = \frac{1}{6}$ and 0]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{6}\right\}$.

6. $f(x) = \sqrt{ax + b}$ $(a > 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে কেবলমাত্র $ax + b \geq 0$ বা $x \geq -\frac{b}{a}$ এর জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values only for $ax + b \geq 0$ or $x \geq -\frac{b}{a}$]

$\therefore D_f = \left\{x : x \geq -\frac{b}{a}\right\}$

$= \left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{ax + b}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \not< 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \not< 0$]

(1) $\Rightarrow y^2 = ax + b$ যেখানে $y \not< 0$

$\Rightarrow ax = y^2 - b,\ y \not< 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}(y^2 - b),\ y \not< 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

নোট ঃ $\sqrt{x^2} = |x|$

অর্থাৎ বাস্তব ফিল্ডে $\sqrt{}$ এর মান বিদ্যমান থাকিলে উহা সর্বদা ধনাত্মক বা শূন্য হইবে।

যেমন $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

এখানে $\sqrt{(-2)^2} = -2$ সত্য নয়।

উদাহরণ–13. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \sqrt{3x-1}$ (ii) $f(x) = -\sqrt{x+1}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \sqrt{3x-1}$

এখানে কেবলমাত্র $3x - 1 \geq 0$ বা $x \geq \frac{1}{3}$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $3x - 1 \geq 0$ or $x \geq \frac{1}{3}$.]

$$\therefore D_f = \left\{x : x \geq \frac{1}{3}\right\}$$
$$= \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{3x-1}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \not< 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \not< 0$]

$(1) \Rightarrow y^2 = 3x - 1$ যেখানে $y \not< 0$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(y^2 + 1),\ y \not< 0$$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$]

$$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$$
$$= [0, \infty)$$

(ii) $f(x) = -\sqrt{x+1}$

এখানে কেবলমাত্র $x + 1 \geq 0$ বা $x \geq -1$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $x + 1 \geq 0$ or $x \geq -1$.]

$$\therefore D_f = \{x : x \geq -1\}$$
$$= [-1, \infty)$$

আবার, $y = f(x) = -\sqrt{x+1}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \not> 0$ [The values of y in (1) are negative or zero that is $y \not> 0$]

$(1) \Rightarrow y^2 = x + 1,\ y \not> 0$

$\Rightarrow x = y^2 - 1,\ y \not> 0$

এখানে $y \leq 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \leq 0$.]

$$\therefore R_f = \{y : y \leq 0\}$$
$$= (-\infty, 0]$$

7. $f(x) = \sqrt{ax + b}$ $(a < 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে কেবলমাত্র $ax + b \geq 0$ বা $x \leq -\frac{b}{a}$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $ax + b \geq 0$ or $x \leq -\frac{b}{a}$]

$$\therefore D_f = \left\{x : x \leq -\frac{b}{a}\right\}$$
$$= \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{ax+b}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \not< 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \not< 0$.]

$(1) \Rightarrow y^2 = ax + b$ যেখানে $y \not< 0$

$$\Rightarrow ax = y^2 - b,\ y \not< 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{a}(y^2 - b),\ y \not< 0$$

এখানে কেবলমাত্র $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \geq 0$.]

$$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$$
$$= [0, \infty)$$

উদাহরণ–14. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \sqrt{1-x}$ (ii) $f(x) = -\sqrt{1-2x}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \sqrt{1-x}$

এখানে কেবলমাত্র $1 - x \geq 0$ বা $x \leq 1$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $1 - x \geq 0$ or $x \leq 1$.]

$$\therefore D_f = \{x : x \leq 1\}$$
$$= (-\infty, 1]$$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{1-x}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \not< 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \not< 0$.]

$(1) \Rightarrow y^2 = 1 - x$ যেখানে $y \not< 0$

$$\Rightarrow x = 1 - y^2,\ y \not< 0$$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

(ii) $f(x) = -\sqrt{1-2x}$

এখানে $1 - 2x \geq 0$ বা $x \leq \frac{1}{2}$ এর জন্য কেবলমাত্র f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $1 - 2x \geq 0$ or $x \leq \frac{1}{2}$.]

$\therefore D_f = \left\{x : x \leq \frac{1}{2}\right\}$

$= \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

আবার, $y = f(x) = -\sqrt{1-2x}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ঋনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \not> 0$. [The values of y in (1) are negative or zero that is $y \not> 0$.]

(1) $\Rightarrow y^2 = 1 - 2x$ যেখানে $y \not> 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(1 - y^2),\ y \not> 0$

এখানে $y \leq 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \leq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \leq 0\}$

$= (-\infty, 0]$

8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে $ax + b > 0$ বা $x > -\frac{b}{a}$ (যখন $a > 0$) বা $x < -\frac{b}{a}$ (যখন $a < 0$) এর জন্য কেবলমাত্র f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $ax + b \not> 0$ or $x > -\frac{b}{a}$ (when $a > 0$) or $x < -\frac{b}{a}$ (when $a < 0$).]

$\therefore a > 0$ এর জন্য $D_f = \left\{x : x > -\frac{b}{a}\right\}$

$= \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$

এবং $a < 0$ এর জন্য $D_f = \left\{x : x < -\frac{b}{a}\right\}$

$= \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $y \not< 0$ হইবে।

(1) $\Rightarrow y^2 = \frac{1}{ax+b}$ যেখানে $y \not< 0$

$\Rightarrow ax + b = \frac{1}{y^2},\ y \not< 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y^2} - b\right),\ y \not< 0$

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y > 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

উদাহরণ-15. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (ii) $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

এখানে $x + 1 > 0$ বা $x > -1$ এর জন্য কেবলমাত্র f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $x + 1 > 0$ or $x > -1$.]

$\therefore D_f = \{x : x > -1\}$

$= (-1, \infty)$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক হইবে। [The values of y in (1) are only positive.]

(1) $\Rightarrow y^2 = \frac{1}{x+1},\ y \not< 0$

$\Rightarrow x + 1 = \frac{1}{y^2},\ y \not< 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y^2} - 1,\ y \not< 0$

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$.

(ii) $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

এখানে $2 - x > 0$ বা $x < 2$ এর জন্য কেবলমাত্র f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $2 - x > 0$ or $x < 2$.]

$\therefore D_f = \{x : x < 2\}$

$= (-\infty, 2)$

আবার, $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক হইবে।

$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2-x}, \ y \neq 0$

$\Rightarrow 2 - x = \frac{1}{y^2}, \ y \neq 0$

$\Rightarrow x = 2 - \frac{1}{y^2}, \ y \neq 0$

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত হইবে।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

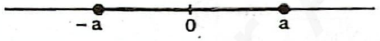
$= (0, \infty)$

9. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি $a^2 - x^2 \geq 0$ হয় [Here f(x) will be real if $a^2 - x^2 \geq 0$]

$\Rightarrow x^2 \leq a^2$

$\Rightarrow -a \leq x \leq a$



$\therefore D_f = \{x : -a \leq x \leq a\}$

$= [-a, a]$

আবার, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না। [In (1) the value of y can not be negative.]

$(1) \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2, \ y \neq 0$

$\Rightarrow x^2 = a^2 - y^2, \ y \neq 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2 - y^2}, \ y \neq 0$

এখানে x সংজ্ঞায়িত হইবে যদি $a^2 - y^2 \geq 0$ এবং $y \neq 0$ হয়। [Here x will be defined if $a^2 - y^2 \geq 0$ and $y \neq 0$.]

$\Rightarrow y^2 \leq a^2$ কিন্তু $y \neq 0$

$\Rightarrow -a \leq y \leq a$ যেখানে $y \neq 0$

$\Rightarrow 0 \leq y \leq a$

$\therefore R_f = \{y : 0 \leq y \leq a\}$

$= [0, a]$

উদাহরণ-16. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **[NUH(NM)–2006]**

(ii) $y = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

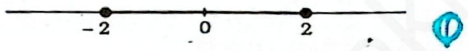
সমাধান **(i)** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি [Here the value of f(x) will be real if]

$4 - x^2 \geq 0$ হয়।

$\Rightarrow x^2 \leq 4$

$\Rightarrow -2 \leq x \leq 2$



$\therefore D_f = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$

$= [-2, 2]$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হয় না অর্থাৎ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1) the value of y can not be negative, that is, the value of y will be positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = 4 - x^2$ যেখানে $y \neq 0$

$\Rightarrow x^2 = 4 - y^2, \ y \neq 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{4 - y^2}, \ y \neq 0$

এখানে x এর মান বিদ্যমান থাকিবে যদি $4 - y^2 \geq 0$ এবং $y \neq 0$ হয়। [Here the value of x will be exist if $4 - y^2 \geq 0$ and $y \neq 0$.]

$\Rightarrow y^2 - 4 \leq 0$ এবং $y \neq 0$

$\Rightarrow y^2 \leq 4$ এবং $y \neq 0$

$\Rightarrow -2 \leq y \leq 2$ এবং $y \neq 0$

$\Rightarrow 0 \leq y \leq 2$

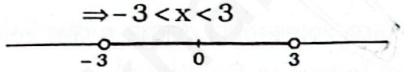
$\therefore R_f = \{y : 0 \leq y \leq 2\}$

$= [0, 2]$

(ii) $y = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $9 - x^2 > 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $9 - x^2 > 0$]

$$\Rightarrow x^2 < 9$$
$$\Rightarrow -3 < x < 3$$



$\therefore D_f = \{x : -3 < x < 3\}$
$= (-3, 3)$

আবার, $y = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ ফাংশনে y এর মান ঋণাত্মক বা শূন্য হইবে না অর্থাৎ y এর মান ধনাত্মক হইবে। [Again, in the function $y = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$, the value of y can not be negative or zero, that is, the value of y will be positive.]

$\therefore y^2 = \frac{1}{9 - x^2}$ যেখানে $y \neq 0$

$\Rightarrow 9 - x^2 = \frac{1}{y^2}, y \neq 0$

$\Rightarrow x = \pm \sqrt{9 - \frac{1}{y^2}}, y \neq 0$

এখানে x এর মান বিদ্যমান থাকিবে যদি $9 - \frac{1}{y^2} \geq 0$ এবং $y \neq 0$ হয়। [Here the value of x will exist if $9 - \frac{1}{y^2} \geq 0$ and $y \neq 0$]

$$\Rightarrow 9y^2 - 1 \geq 0 \text{ এবং } y \neq 0$$
$$\Rightarrow y^2 - \frac{1}{9} \geq 0 \text{ এবং } \neq 0$$
$$\Rightarrow y^2 \geq \frac{1}{9} \text{ এবং } y \neq 0$$
$$\Rightarrow \left(y \leq -\frac{1}{3} \text{ বা } y \geq \frac{1}{3}\right) \text{ এবং } y \neq 0$$
$$\Rightarrow y \geq \frac{1}{3}$$

$\therefore R_f = \left\{y : y \geq \frac{1}{3}\right\}$
$= \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

দ্রষ্টব্য ঃ নিম্নে দুইটি অসমতার সমাধান পদ্ধতি আলোচনাসহ কয়েকটি অসমতার সমাধান ছকে দেওয়া হইল ঃ

1.A.13. $x^2 - a^2 < 0$ অসমতার সমাধান (Solution of the inequality $x^2 - a^2 < 0$) :

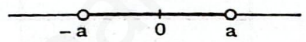
এখানে $(x + a)(x - a) < 0$

দুইটি উৎপাদকের গুণফল ঋণাত্মক হইলে একটি উৎপাদক ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হইবে। [Product of two factors is negative when one factor is positive and the other factor is negative.]

$\therefore (x + a > 0 \text{ এবং } x - a < 0)$ অথবা $(x + a < 0 \text{ এবং } x - a > 0)$ হইবে।

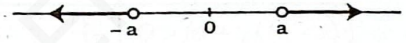
১ম ক্ষেত্রে ঃ $x + a > 0$ এবং $x - a < 0$

$$\Rightarrow x > -a \text{ এবং } x < a$$
$$\Rightarrow -a < x < a$$



২য় ক্ষেত্রে ঃ $x + a < 0$ এবং $x - a > 0$

$$\Rightarrow x < -a \text{ এবং } x > a$$



এখানে $x < -a$ এবং $x > a$ শর্তে x এ কোন মান বিদ্যমান নাই।

$\therefore x^2 - a^2 < 0$ অসমতাটির সমাধান $-a < x < a$

[Here, there does not exists any value of x under the condition $x < -a$ and $x > a$. Therefore, the inequality $x^2 - a^2 < 0$ has the solution $-a < x < a$.]

1.A.14. $x^2 - a^2 > 0$ অসমতার সমাধান (Solution of the inequality $x^2 - a^2 > 0$) :

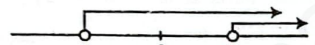
এখানে $(x + a)(x - a) > 0$

দুইটি উৎপাদকের গুণফল ধনাত্মক হইলে উভয় উৎপাদক ধনাত্মক অথবা উভয় উৎপাদক ঋণাত্মক হইবে। [Product of two factors is positive when both the factors either positive or negative.]

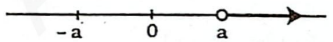
$\therefore (x + a > 0 \text{ এবং } x - a > 0)$ অথবা $(x + a < 0 \text{ এবং } x - a < 0)$

১ম ক্ষেত্রে ঃ $x + a > 0$ এবং $x - a > 0$

$$\Rightarrow x > -a \text{ এবং } x > a$$

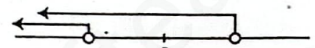


এখানে $x > -a$ এবং $x > a$ শর্তে $x > a$ হইবে।

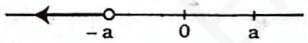


২য় ক্ষেত্রে ঃ $x + a < 0$ এবং $x - a < 0$

$$\Rightarrow x < -a \text{ এবং } x < a$$



এখানে $x < -a$ এবং $x < a$ শর্তে $x < -a$ হইবে।



$\therefore x^2 - a^2 > 0$ অসমতাটির সমাধান ঃ $x < -a$ অথবা $x > a$

1.A.15. সংখ্যারেখায় অসমতার সমাধান (Solution of inequalities in real line) :

$x^2 - a^2 < 0$ বা $x^2 - a^2 > 0$ অসমতার সমাধানের নিয়মে সমাধান করা যায় এইরূপ কয়েকটি অসমতার সমাধান ও সংখ্যারেখায় ইহার অবস্থান নিম্নের ছকে দেওয়া হইল। এখানে a ও b ধনাত্মক এবং $a < b$ ধরা হইয়াছে।

অসমতা	সমাধান	সংখ্যারেখা
$x^2 - a^2 < 0$	$-a < x < a$	$-a$ 0 a
$(x + a)(x - b) < 0$	$-a < x < b$	$-a$ 0 b
$(x - a)(x - b) < 0$	$a < x < b$	a 0 b
$(x - a)(x + b) < 0$	$-b < x < a$	$-b$ 0 a
$(x + a)(x + b) < 0$	$-b < x < -a$	$-b$ 0 $-a$
$x^2 - a^2 > 0$	$x < -a$ বা $x > a$	$-a$ 0 a
$(x + a)(x - b) > 0$	$x < -a$ বা $x > b$	$-a$ 0 b
$(x - a)(x - b) > 0$	$x < a$ বা $x > b$	a 0 b
$(x - a)(x + b) > 0$	$x < -b$ বা $x > a$	$-b$ 0 $-a$
$(x + a)(x + b) > 0$	$x < -b$ বা $x > -a$	$-b$ 0 $-a$

নোট ঃ উৎপাদকদ্বয় অনুপাত আকারে থাকিলেও একইরূপ সমাধান হইবে।

10. $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - a^2 \geq 0$ হয়। [Here the value of f(x) will be real if $x^2 - a^2 \geq 0$]

$$\Rightarrow x^2 \geq a^2$$

$$\Rightarrow x \leq -a \text{ বা } x \geq a$$

$\therefore D_f = \{x : x \leq -a\} \cup \{x : x \geq a\}$

$= (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

$-a$ 0 a

আবার, $y = f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1), the value of y only be positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = x^2 - a^2$ যেখানে $y \not< 0$

$\Rightarrow x^2 = y^2 + a^2, \ y \not< 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + a^2}, \ y \not< 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত হইবে। [Here x is defined for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

উদাহরণ–**17.** নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ (ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ **[NUH(NM)–2007]**

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 25 \geq 0$ হয়। [Here the value of f(x) will be real if $x^2 - 25 \geq 0$]

$$\Rightarrow x^2 \geq 25$$

$$\Rightarrow x \leq -5 \text{ বা } x \geq 5$$

-5 0 5

$\therefore D_f = \{x : x \leq -5\} \cup \{x : x \geq 5\}$

$= (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1), the value of y only be positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = x^2 - 25$ যেখানে $y \not< 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + 25}, \ y \not< 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

(ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 3 \geq 0$ হয়। [Here the value of f(x) will be real if $x^2 - 3 \geq 0$]

$$\Rightarrow x^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow x \leq -\sqrt{3} \text{ বা } x \geq \sqrt{3}$$

$-\sqrt{3}$ 0 $\sqrt{3}$

$\therefore D_f = \{x : x \leq -\sqrt{3}\} \cup \{x : x \geq \sqrt{3}\}$

$= (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$

আবার, $y = f[x] = \sqrt{x^2 - 3}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1), the value of y will be positive or zero.]

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 3$ যেখানে $y \lessdot 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + 3}$, $y \lessdot 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

উদাহরণ–18. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

(i) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ **[NUH–2010]**

(ii) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **[NUH(NM)–2008]**

(iii) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

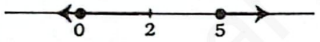
(iv) $y = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$

সমাধান ঃ (i) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

$= \sqrt{(x - 2)(x - 5)}$

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $(x - 2)(x - 5) \geq 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $(x - 2)(x - 5) \geq 0$.]

$\Rightarrow x \leq 2$ বা $x \geq 5$



$\therefore D_f = \{x : x \leq 2\} \cup \{x : x \geq 5\}$

$= (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

আবার, $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান সর্বদা ধনাত্মক বা শূন্য। [In (i), the value of y is always positive or zero.]

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 7x + 10$ যেখানে $y \lessdot 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + (10 - y^2) = 0$, $y \lessdot 0$

এখানে x এর মান বাস্তব এবং সংজ্ঞায়িত হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \lessdot 0$ হয়। [Here the value of x will be real and it be defined if the descriminent ≥ 0 and $y \lessdot 0$.]

$\Rightarrow 49 - 4(10 - y^2) \geq 0$ এবং $y \lessdot 0$ হয়।

$\Rightarrow 4y^2 + 9 \geq 0$ এবং $y \lessdot 0$

$\Rightarrow y \geq 0$, যা উভয় অসমতার জন্য সত্য। [Which is true for both the inequalities.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

(ii) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 2x \geq 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $x^2 - 2x \geq 0$.]

$\Rightarrow x(x - 2) \geq 0$

$\Rightarrow x \leq 0$ বা $x \geq 2$



$\therefore D_f = \{x : x \leq 0\} \cup \{x : x \geq 2\}$

$= (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

আবার, $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ ..... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হইবে না। [In (1), the value of y can not be negative.]

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 2x$ যেখানে $y \lessdot 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - y^2 = 0$ এবং $y \lessdot 0$

এখানে x এর মান বাস্তব ও সংজ্ঞায়িত হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \lessdot 0$ হয়। [Here the value of x will be real and it be defined if the descriminent ≥ 0 and $y \lessdot 0$.]

$\Rightarrow 4 + 4y^2 \geq 0$ এবং $y \lessdot 0$

$\Rightarrow y \geq 0$, যা উভয় অসমতার জন্য সত্য। [Which is true for both the inequalities.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

(iii) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ..... (1)

এখানে x এর সকল মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়। [Here y will be real for all values of x]

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার (1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [In (1), the value of y will be positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = x^2 + 1$ যেখানে $y \neq 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 1},\ y \neq 0$

x সংজ্ঞায়িত হইবে যদি $y^2 - 1 \geq 0$ এবং $y \neq 0$ হয় [x will be defined if $y^2 - 1 \geq 0$ and $y \neq 0$]

$\Rightarrow (y \leq -1$ বা $y \geq 1)$ এবং $y \neq 0$

$\Rightarrow y \geq 1$

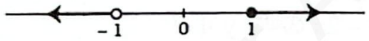
$\therefore R_f = \{y : y \geq 1\}$

$= [1, \infty)$

(iv) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ..... (1)

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ হয়। [The value of y will be real if $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$.]

$\Rightarrow x < -1$ বা $x \geq 1$



$\therefore D_f = \{x : x < -1\} \cup \{x : x \geq 1\}$

$= (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$

আবার (1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। [Again, in (1), the value of y will be positive or zero.]

$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{x-1}{x+1}$ যেখানে $y \neq 0$

$\Rightarrow xy^2 + y^2 = x - 1,\ y \neq 0$

$\Rightarrow x(1 - y^2) = y^2 + 1,\ y \neq 0$

$\Rightarrow x = \frac{y^2 + 1}{(1 + y)(1 - y)},\ y \neq 0$

এখানে $y = 1$ ব্যতীত $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$ except $y = 1$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\} - \{1\}$

$= [0, \infty) - \{1\}$

$= [0, 1) \cup (1, \infty)$

উদাহরণ–19. নিম্নের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

(i) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$ (ii) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ **[NUH(NM)–2007]**

(iii) $y = f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$.

সমাধান ঃ (i) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$ ..... (1)

এখানে y এর মান বাস্তব হইবে যদি $x^2 - 4x > 0$ হয়। [Here the value of y will be real if $x^2 - 4x > 0$.]

$\Rightarrow x(x - 4) > 0$

$\Rightarrow x < 0$ বা $x > 4$



$\therefore D_f = \{x : x < 0\} \cup \{x : x > 4\}$

$= (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

আবার (1) এ y এর মান অঋণাত্মক হইবে। [Again in (1) the value of y will be non-negative.]

$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2 - 4x}$ যেখানে $y \neq 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - \frac{1}{y^2} = 0,\ y \neq 0$

x এর মান বাস্তব ও সংজ্ঞায়িত হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \neq 0$ হয়। [x will be real and defined if the descriminent ≥ 0 and $y \neq 0$]

$\Rightarrow 16 + \frac{4}{y^2} \geq 0$ এবং $y \neq 0$

$\Rightarrow y > 0,$ যা উভয় অসমতার জন্য সত্য। [Which is true for both the inequalities.]

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

(ii) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

$= \frac{1}{(x-1)(x-3)}$

এখানে $x = 1$ বা $x = 3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়। [Here the value of y is real for all real values of x except $x = 1$ or $x = 3$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

আবার, $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 - \frac{1}{y} = 0$

এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়। [Here the value of x will be real if descriminent ≥ 0.]

$\Rightarrow 16 - 4\left(3 - \frac{1}{y}\right) \geq 0$

$\Rightarrow 4 + \frac{4}{y} \geq 0$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{y} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{y+1}{y} \geq 0$

$\Rightarrow y \leq -1$ বা $y > 0$

$\therefore R_f = \{y : y \leq -1\} \cup \{y : y > 0\}$

$= (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

(iii) $y = f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$

$= \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

এখানে $x = 1$ বা $x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়। [Here the value of y is real for all real values of x except $x = 1$ or $x = 2$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

আবার, $y = \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$

$\Rightarrow x^2y - 3xy + 2y = x^2$

$\Rightarrow (y-1)x^2 - 3xy + 2y = 0$

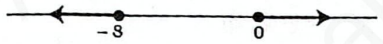
এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়। [Here the value of x will be real if descriminent ≥ 0.]

$\Rightarrow 9y^2 - 4(y-1) \cdot 2y \geq 0$

$\Rightarrow y^2 + 8y \geq 0$

$\Rightarrow y(y+8) \geq 0$

$\Rightarrow y \leq -8$ বা $y \geq 0$



$\therefore R_f = \{y : y \leq -8\} \cup \{y : y \geq 0\}$

$= (-\infty, -8] \cup [0, \infty)$

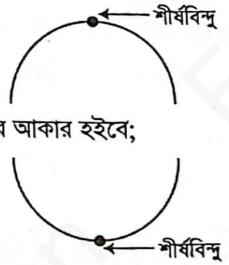
11. $f(x) = ax^2 + bx + c$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হইবে।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ প্যারাবোলার সমীকরণ যাহার অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল। সুতরাং প্যারাবোলার শীর্ষবিন্দু লঘিষ্ঠ বিন্দু বা গরিষ্ঠ বিন্দু হইবে।

$a < 0$ হইলে প্যারাবোলার আকার হইবে;



$a > 0$ হইলে প্যারাবোলার আকার হইবে;

$\therefore$ $a < 0$ এর জন্য $R_f = (-\infty,$ শীর্ষবিন্দুর কোটি]

এবং $a > 0$ এর জন্য $R_f =$ [শীর্ষবিন্দুর কোটি, ∞)

নোট ঃ নিশ্চায়ক ≥ 0 ধরেও রেঞ্জ নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ–20. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$ (ii) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

সমাধান ঃ (i) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হইবে।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 10 = 2y$

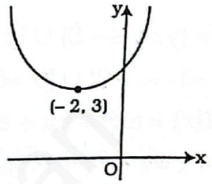
$\Rightarrow (x+2)^2 = 2y - 6$

$= 2(y-3)$

$\therefore$ প্যারাবোলায় শীর্ষবিন্দু $= (x+2=0, y-3=0)$

$= (x=-2, y=3)$

$= (-2, 3)$



$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর কোটি $= 3$

$\therefore R_f =$ [শীর্ষবিন্দুর কোটি, ∞)

$= [3, \infty)$

অন্যভাবে রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow x^2 + 4x + (10 - 2y) = 0$

এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

$\Rightarrow 16 - 4(10 - 2y) \geq 0$

$\Rightarrow -24 + 8y \geq 0$

$\Rightarrow y \geq 3$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \{y : y \geq 3\}$

$= [3, \infty)$

(ii) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

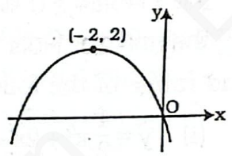
এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ প্যারাবোলার সমীকরণ।

$\Rightarrow x^2 + 4x = -2y$

$\Rightarrow (x+2)^2 = -2(y-2)$



$\therefore$ প্যারাবোলার শীর্ষবিন্দু $= (x+2=0, y-2=0)$

$= (-2, 2)$

শীর্ষবিন্দুর কোটি $= 2$

$\therefore R_f = (-\infty,$ শীর্ষবিন্দুর কোটি$]$

$= (-\infty, 2]$

অন্যভাবে রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 2y = 0$

এখানে x এর মান বাস্তব হইবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

$\Rightarrow 16 - 4 \cdot 2y \geq 0$

$\Rightarrow y \leq 2$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \{y : y \leq 2\}$

$= (-\infty, 2]$

12. খন্ডিত ফাংশন (Piece wise function) এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

যদি কোন ফাংশন ডোমেনের বিভিন্ন অংশের জন্য ভিন্ন ভিন্নভাবে সংজ্ঞায়িত হয় তবে তাহাকে খন্ডিত ফাংশন বলা হয়।

$$y = \begin{cases} f_1(x) \text{ যখন } x < a \\ f_2(x) \text{ যখন } a \leq x < b \\ f_3(x) \text{ যখন } x \geq b \end{cases}$$ একটি খন্ডিত ফাংশন।

এখানে $x < a$, $a \leq x < b$ এবং $x \geq b$ ব্যবধিতে y এর মান সংজ্ঞায়িত। সুতরাং ব্যবধিগুলির সংযোগ (union) সেট ফাংশনটির ডোমেন হইবে।

$\therefore D_f = \{x : x < a\} \cup \{x : a \leq x < b\} \cup \{x : x \geq b\}$

$= (-\infty, a) \cup [a, b) \cup [b, \infty)$

$= (-\infty, \infty)$

$= \mathbb{R}$

আবার প্রত্যেক ব্যবধিতে বিদ্যমান সকল y এর মানের সেট রেঞ্জ হইবে। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে খন্ডিত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করা হইল।

উদাহরণ–21. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন } 1 < x \leq 2 \\ 15 & \text{যখন } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

(ii) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{যখন } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$ **[NUH–2007]**

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন } 1 < x \leq 2 \\ 15 & \text{যখন } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

এখানে $0 < x < 1$, $1 < x \le 2$ এবং $2 < x \le 3$ ব্যবধিতে $f(x)$ এর মান সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = \{x : 0 < x < 1\} \cup \{x : 1 < x \le 2\} \cup \{x : 2 < x \le 3\}$

$= (0, 1) \cup (1, 2] \cup (2, 3]$

$= (0, 1) \cup (1, 3]$

আবার, $0 < x < 1$ ব্যবধিতে $f(x) = 5$

$1 < x \le 2$ ব্যবধিতে $f(x) = 10$

এবং $2 < x \le 3$ ব্যবধিতে $f(x) = 15$

$\therefore R_f = \{5, 10, 15\}$

(ii) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{যখন } -1 \le x < 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$

এখানে $-1 \le x < 1$, $1 \le x \le 2$ এবং $x > 2$ ব্যবধিতে y এর মান সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = \{x : -1 \le x < 1\} \cup \{x : 1 \le x \le 2\} \cup \{x : x > 2\}$

$= [-1, 1) \cup [1, 2] \cup (2, \infty)$

$= [-1, \infty)$

আবার, $-1 \le x < 1$ ব্যবধিতে $y = 1 - x$ হইতে পাই $0 < y \le 2$

$1 \le x \le 2$ ব্যবধিতে $y = 0$

এবং $2 < x$ ব্যবধিতে $y = x^2 - 4$ হইতে পাই $0 < y$

$\therefore R_f = \{y : 0 < y \le 2\} \cup \{0\} \cup \{y : y > 0\}$

$= (0, 2] \cup \{0\} \cup (0, \infty)$

$= [0, \infty)$

13. পরম মান ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

পরম মান ফাংশনকে খন্ডিত ফাংশনে প্রকাশ করিয়া ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করিতে হয়। $a < b$ এর জন্য একটি পরমমান ফাংশনকে নিম্নরূপে খন্ডিত ফাংশনে প্রকাশ করা যায়।

$$f(x) = |x - a| + |x - b|$$

$x < a$ এর জন্য $f(x) = -(x - a) - (x - b) = a + b - 2x$

$a \le x < b$ এর জন্য $f(x) = (x - a) - (x - b) = b - a$

$b \le x$ এর জন্য $f(x) = (x - a) + (x - b) = 2x - a - b$

$\therefore$ খন্ডিত ফাংশন, $f(x) = \begin{cases} a + b - 2x & \text{যখন } x < a \\ b - a & \text{যখন } a \le x < b \\ 2x - a - b & \text{যখন } b \le x \end{cases}$

উদাহরণ–22. নিম্নের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ **[NUH(NM)–2005, 2009]**

(ii) $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$ **[NUH–2008]**

(iii) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ **[DUH–1981]**

সমাধান ঃ (i) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$

$x < -1$ এর জন্য $f(x) = -(x + 1) - (x - 1)$

$= -2x$

$-1 \le x < 1$ এর জন্য $f(x) = x + 1 - (x - 1)$

$= 2$

$1 \le x$ এর জন্য $f(x) = x + 1 + x - 1$

$= 2x$

সুতরাং আমরা পাই, $y = f(x) = \begin{cases} -2x & \text{যখন } x < -1 \\ 2 & \text{যখন } -1 \le x < 1 \\ 2x & \text{যখন } 1 \le x \end{cases}$

$\therefore D_f = \{x : x < -1\} \cup \{x : -1 \le x < 1\} \cup \{x : 1 \le x\}$

$= (-\infty, -1) \cup [-1, 1) \cup [1, \infty) = \mathbb{R}$

আবার, $x < -1$ ব্যবধিতে $y > 2$

$-1 \le x < 1$ ব্যবধিতে $y = 2$

$1 \le x$ ব্যবধিতে $y \ge 2$

$\therefore R_f = \{y : y > 2\} \cup \{2\}$

$= (2, \infty) \cup \{2\}$

$= [2, \infty)$

(ii) $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$

$= |x + 3| + |x - 1|$

$x < -3$ এর জন্য $f(x) = -(x + 3) - (x - 1) = -2x - 2$

$-3 \le x < 1$ এর জন্য $f(x) = (x + 3) - (x - 1) = 4$

$1 \le x$ এর জন্য $f(x) = (x + 3) + (x - 1) = 2x + 2$

সুতরাং আমরা পাই, $y = f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{যখন } x < -3 \\ 4 & \text{যখন } -3 \le x < 1 \\ 2x + 2 & \text{যখন } 1 \le x \end{cases}$

$\therefore D_f = \{x : x < -3\} \cup \{x : -3 \le x < 1\} \cup \{x : 1 \le x\}$

$= (-\infty, -3) \cup [-3, 1) \cup [1, \infty)$

$= \mathbb{R}$

আবার, $x < -3$ ব্যবধিতে $y > 4$

$-3 \le x < 1$ ব্যবধিতে $y = 4$

$1 \le x$ ব্যবধিতে $y \ge 4$

$\therefore R_f = \{y : y > 4\} \cup \{4\}$

$= [4, \infty)$

(iii) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

$x < 0$ এর জন্য $f(x) = \dfrac{x}{-x} = -1$

$0 < x$ এর জন্য $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$ [$x = 0$ এর জন্য $f(x)$ বিদ্যমান নয়]

সুতরাং আমরা পাই, $y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 & \text{যখন } 0 < x \end{cases}$

$\therefore D_f = \{x : x < 0\} \cup \{x : x > 0\}$

$= \mathbb{R} - \{0\}$ এবং $R_f = \{-1, 1\}$

14. সূচকীয় ফাংশন ও লগারিদমিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

$y = a^x$ কে সূচকীয় ফাংশন বলা হয়।

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = a^x$

$\Rightarrow x = \log_a y$ লগারিদমিক ফাংশন।

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

নোট ঃ $\log_a (0)$ বা $\log_a$ (ঋণাত্মক সংখ্যা) বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–23. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = e^x$

(ii) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = e^x$

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = e^x$

$\Rightarrow e^x = y$

$\Rightarrow x = \ln y$

এখানে কেবলমাত্র $y > 0$ এর জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

(ii) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ The natural logarithm $\ln(x)$ is ~~only~~ defined only when ~~$x \neq 0$~~ $x > 0$

এখানে $f(x)$ এর মান বিদ্যমান হইবে যদি A f^n is (+) when both numerator and denominator have the same sign

1. Both positive $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ হয়। → $1+x>0$ and $1-x>0$ ⇒ $x>-1$ and $x<1$ So, $-1<x<1$

2. Both negative $\Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} < 0$ → $1+x<0$ and $1-x<0$ ⇒ $x<-1$ and $x>1$

$\Rightarrow -1 < x < 1$

$\therefore D_f = \{x : -1 < x < 1\}$

$= (-1, 1)$

আবার, $y = f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$\Rightarrow \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = y$

$\Rightarrow \dfrac{1+x}{1-x} = e^y$

$\Rightarrow 1 + x = e^y - xe^y$

$\Rightarrow x = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

উদাহরণ–24. $f(x) = \ln(x - 2)$ ফাংশনটির D_f এবং R_f নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আমরা জানি লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore f(x) = \ln(x - 2)$ এর মান বাস্তব হইবে যদি $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : x > 2\} = (2, \infty)$

আবার ধরি $y = f(x) = \ln(x - 2) \Rightarrow x - 2 = e^y$

$\Rightarrow x = e^y + 2$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য e^y বাস্তব, ফলে $x = e^y + 2$ বাস্তব।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

15. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

(i) $y = \sin x$

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $x = \sin^{-1} y$

এখানে x এর মান কেবলমাত্র $-1 \le y \le 1$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \{y : -1 \le y \le 1\}$

$= [-1, 1]$

(ii) $y = \cos x$

সাইন ফাংশনের অনুরূপ, $D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = [-1, 1]$

(iii) $y = \tan x$

এখানে $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয়। x এর এইমান সমূহ ব্যতীত অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$

আবার, $y = \tan x \Rightarrow x = \tan^{-1} y$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

(iv) $y = \cot x$

এখানে $x = n\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{\cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$

আবার, $y = \cot x$

$\Rightarrow x = \cot^{-1} y$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

(v) $y = \sec x$

এখানে $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$

আবার, $y = \sec x$

$\Rightarrow x = \sec^{-1} y$

এখানে $-1 < y < 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - (-1, 1)$

$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

(vi) $y = \operatorname{cosec} x$

এখানে $x = n\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$

আবার, $y = \operatorname{cosec} x$

$\Rightarrow x = \operatorname{cosec}^{-1} y$

এখানে $-1 < y < 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R} - (-1, 1)$

$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

নোট ঃ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ পরস্পর পরিবর্তন হইবে।

উদাহরণ-**25.** নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(i) $f(x) = \sin 2x$, (ii) $f(x) = \cos 3x$ এবং (iii) $f(x) = \tan 4x$.

সমাধান ঃ (i). আমরা জানি সাইন অনুপাতের সর্বনিম্ন মান -1 এবং সর্বোচ্চ মান $+1$.

সুতরাং সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) = \sin 2x$ এর মান বাস্তব হইবে এবং এইমান -1 ও 1 সহ ইহাদের মধ্যবর্তী বাস্তব সংখ্যা হইবে। অর্থাৎ

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le f(x) = \sin 2x \le 1$$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [-1, 1]$

(ii) আমরা জানি, কোসাইন অনুপাতের সর্বনিম্ন মান -1 এবং সর্বোচ্চ মান $+1$.

সুতরাং সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) = \cos 3x$ এর মান বাস্তব হইবে এবং এইমান -1 ও 1 সহ ইহাদের মধ্যবর্তী বাস্তব সংখ্যা হইবে। অর্থাৎ

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le f(x) = \cos 3x \le 1$$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [-1, 1]$.

(iii) $f(x) = \tan 4x = \pm\infty$ হইলে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

আবার $\tan 4x = \pm\infty$ হইলে পাই

$$4x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{8};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\Rightarrow x = \cdots, \frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \cdots$$

x এর এই মানগুলি ব্যতীত অন্য সকল বাস্তব সংখ্যার সেট ডোমেন হইবে এবং রেঞ্জ হইবে সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$$\therefore \text{ডোমেন } D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots, \frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \cdots\right\}$$

এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

উদাহরণ–26. দেখাও যে ফাংশন $f(x) = \frac{x}{\sin(1/x)}$ এর

$D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots\right\}$ এবং $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$. **[NUH–2004]**

সমাধান ঃ $x = 0$ অথবা $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ হইলে $f(x) = \frac{x}{\sin(1/x)}$ ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়। [The function $f(x) = \frac{x}{\sin(1/x)}$ will be undefined when $x = 0$ or $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.]

এখন $\sin\frac{1}{x} = 0$ হইলে পাই

$$\frac{1}{x} = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{n\pi},\ n \in \mathbb{Z} - \{0\} = \cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots$$

সুতরাং $x = \cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots$ এর জন্য ফাংশন অসংজ্ঞায়িত হয়। এই মানগুলি ডোমেনে এর সদস্য হইবে না। [The function is undefined for $x = \cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots$. So they will be not in the domain]

$$\therefore \text{ডোমেন } D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots\right\}$$

আবার, যেহেতু $x \neq 0$. সুতরাং $f(x) \neq 0$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

1(C) অধ্যায়ে শিক্ষার্থীদের সুবিধার্থে আরো অনেক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ সম্পর্কে চিত্রের সাহায্যে আলোচনা করা হইয়াছে। লেখচিত্র থেকে অতি সহজেই ডোমেন ও রেঞ্জ সম্পর্কে ধারণা করা যায়।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

1.A.1. ক্যালকুলাস কি? (What is Calculus?)

Ans : ক্যালকুলাস হইল গতি এবং পরিবর্তন সম্পর্কিত গণিত। ইহা একটি চলকের সম্পর্কে অপর চলকের পরিবর্তন সম্পর্কিত সুস্পষ্ট ধারণা দেয়।

1.A.2. ক্যালকুলাসের আবিষ্কারক কে? (Who are discoverer of Calculus?)

Ans : ইংলিশ গণিতবিদ স্যার আইজ্যাক নিউটন (Sir Isaac Newton : 1642–1727) এবং জার্মান গণিতবিদ গড়ফ্রেড লিবনীজ (Gottfried Leibnitz : 1646–1716) ক্যালকুলাসের আবিষ্কারক। সপ্তদশ শতকের শেষভাগে তাহারা স্বাধীনভাবে ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেন।

1.A.3. ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define function.)

Ans : যদি X ও Y দুইটি অশূন্যক সেট এবং f এইরূপ একটি নিয়ম হয় যে, প্রত্যেক $x \in X$ এর জন্য একটি অনন্য $y \in Y$ পাওয়া যায় তবে f কে X সেট হইতে Y সেটে একটি ফাংশন বলা হয়। ইহাকে $f : X \to Y$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.4. ফাংশনে অনির্ভরশীল চলক এবং নির্ভরশীল চলক বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by independent variable and dependent variable?)

Ans : $f : X \to Y$ ফাংশনে $x \in X$ কে অনির্ভরশীল চলক এবং y (বা $f(x)$) $\in Y$ কে নির্ভরশীল চলক বলা হয়।

1.A.5. কোন বিন্দুতে ফাংশনের মান বা ইমেজ কাকে বলে? (What is called value or image of a function at a point?)

Ans : $f : X \to Y$ ফাংশনে $x \in X$ এর f সম্পর্কিত উপাদান $f(x)$ বা y কে x বিন্দুতে f এর মান বা ইমেজ বলা হয়। Y সেটের সকল উপাদান ফাংশনের মান বা ইমেজ নাও হইতে পারে।

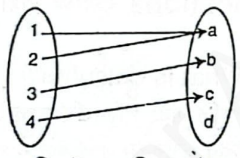
1.A.6. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 - 5x + 8$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান বা ইমেজ কত? (Let the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by a formula $f(x) = x^2 - 5x + 8$. What is the value or image of the function?)

Ans : এখানে $f(x) = x^2 - 5x + 8$

$\therefore f(0) = 0^2 - 5.0 + 8 = 8$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান বা ইমেজ 8.

1.A.7. সসীম সেট হইতে সসীম সেটে নিম্নের চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের ইমেজ কোনগুলি? (Which are images of the function from finite set to finite set is defined by the following figure?)



Ans : a, b, c প্রদত্ত ফাংশনটির ইমেজ কিন্তু d ইমেজ নয়।

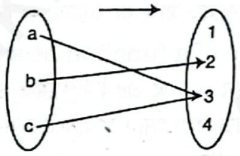
1.A.8. ফাংশনের ডোমেন ও কোডোমেন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by domain and codomain of a function?)

Ans : $f : X \to Y$ ফাংশনের X কে ডোমেন এবং Y কে কোডোমেন বা কাউন্টার ডোমেন বলে। সাধারণতঃ ডোমেনকে D_f এবং কোডোমেনকে Cod_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.9. ফাংশনের রেঞ্জ এর সংজ্ঞা দাও। (Define range of a function.) **[NUH–2010]**

Ans : $f : X \to Y$ ফাংশনের Y সেটের অন্তর্গত সকল f সম্পর্কিত উপাদান বা ইমেজ দ্বারা গঠিত উপসেটকে ফাংশনটির রেঞ্জ বলা হয়। ইহাকে R_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.10. নিম্নের চিত্র দ্বারা সসীম সেট হইতে সসীম সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। (Find domain, codomain and range of the function from finite set to finite set is defined by the following figure.)



Ans : প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = \{a, b, c\}$
কোডোমেন $Cod_f = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \{2, 3\}$.

1.A.11. যদি $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে R_f নির্ণয় কর। (If the function $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$ is defined by $f(x) = 3x + 2$, then find R_f.)

Ans : প্রদত্ত ফাংশনের ক্ষেত্রে, $R_f = \{f(0), f(1), f(2), f(3)\} = \{2, 5, 8, 11\}$

1.A.12. দেখাও যে $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 4, 8, 16\}$ ফাংশন নয়। (Show that $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 4, 8, 16\}$ is not function defined by $f(x) = x^2$.)

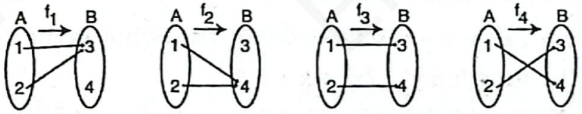
Ans : এখানে, $f(3) = 9 \notin \{0, 1, 4, 8, 16\}$
সুতরাং $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 4, 8, 16\}$ ফাংশন নয়।

1.A.13. ধরি A ও B দুইটি সসীম সেট যেখানে $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$. A হইতে B তে কয়টি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়? (Let A and B are finite sets where $n(A) = p$ and $n(B) = q$. How many are functions defined from A to B?)

Ans : যেহেতু A ও B সসীম সেটদ্বয়ের সদস্য সংখ্যা যথাক্রমে p ও q, সুতরাং A হইতে B তে q^p সংখ্যক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়।

1.A.14. $A = \{1, 2\}$ সেট হইতে $B = \{3, 4\}$ সেটে সম্ভাব্য সকল ফাংশনগুলি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও। (Show by figure all possible functions from the set $A = \{1, 2\}$ to the set $B = \{3, 4\}$.)

Ans : $A = \{1, 2\}$ সেট হইতে $B = \{3, 4\}$ সেটে $2^2 = 4$টি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে ফাংশনগুলি দেখানো হইল ঃ



1.A.15. $y = f(x)$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $y = f(x)$?)

Ans : $y = f(x)$ দ্বারা বোঝায় একটি চলক x এর উপর অপর একটি চলক y নির্ভরশীল।

1.A.16. $y = f(x)$ একটি ফাংশন বলিতে কি বোঝায়? (What is meant by $y = f(x)$ is a function?)

Ans : যদি x এর উপর y এইরূপভাবে নির্ভরশীল হয় যে, x এর প্রত্যেক বাস্তব মান y এর ঠিক একটি বাস্তব মান নির্ণয় করে, তবে $\{(x, f(x)) : y = f)x)\}$ আকারের ফাংশনকে আমরা বলি, $y = f(x)$ একটি ফাংশন বা x এর ফাংশন y. অন্যভাবে ঃ $y = f(x)$ একটি ফাংশন বলিতে বোঝায়, $y = f(x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : D_f \to R_f$ একটি ফাংশন।

1.A.17. যদি $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ ফাংশন না হয়, তবে ইহাকে কি বলে? (If $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ is not function, then what is called it?)

Ans : যদি $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ ফাংশন না হয় তবে ইহাকে অন্বয় (relation) বলা হয়। এইক্ষেত্রে, $y = f(x)$ কে একটি অন্বয় বলা হয়।

1.A.18. $y = \sin x$ কি একটি ফাংশন? (Is $y = \sin x$ a function?)

Ans : $y = \sin x$ একটি ফাংশন। কারণ x এর প্রত্যেক বাস্তব মানের জন্য y এর অনন্য বাস্তব মান বিদ্যমান।

1.A.19. $y = \sin^{-1} x$ কি ফাংশন? (Is $y = \sin^{-1} x$ function?)

Ans : $[-1, 1]$ সেট হইতে $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ সেটে $y = \sin^{-1} x$ ফাংশন। কিন্তু $[-1, 1]$ সেট হইতে $\mathbb{R}$ সেটে $y = \sin^{-1} x$ ফাংশন নয়। কারণ $x = 0$ হইলে প্রথম

ক্ষেত্রে $y = 0$ হয়, কিন্তু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $x = 0$ হইলে $y = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ হয়। অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে x এর একটি মানের জন্য y এর অনন্য মান বিদ্যমান কিন্তু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে y এর একাধিক মান বিদ্যমান।

1.A.20. $y = f(x)$ ফাংশনের ডোমেন কাকে বলে? (What is called domain of the function $y = f(x)$?)

Ans : x এর যে সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = f(x)$ সূত্র বা সমীকরণটি সংজ্ঞায়িত বা সিদ্ধ হয় তাহার সেট যদি A হয় তবে A কে $y = f(x)$ ফাংশনের ডোমেন বলে। ইহাকে D_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.21. $y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = ax + b$ সিদ্ধ হয়, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.22. $y = 2x^2 + x + 5$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = 2x^2 + x + 5$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = 2x^2 + x + 5$ সিদ্ধ হয়, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন, $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.23. $y = a_0 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_n$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = a_0 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_n$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.24. $y = \cos x$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is domain of the function $y = \cos x$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = \cos x$ সিদ্ধ হয়, সুতরাং $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.25. $y = \sin 5x$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = \sin 5x$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = \sin 5x$ সিদ্ধ, সুতরাং $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.26. $y = 2 \sin x + \cos x$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = 2 \sin x + \cos x$?)

Ans : যেহেতু x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = 2 \sin x + \cos x$ সিদ্ধ হয়, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.27. $y = e^{5x}$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the functions $y = e^{5x}$?)

Ans : এখানে x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন, $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.28. $y = 2^{-x}$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = 2^{-x}$?)

Ans : এখানে x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান, সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন, $D_f = \mathbb{R}$.

1.A.29. $y = \frac{1}{x-1}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find domain of the function $y = \frac{1}{x-1}$.)

Ans : $x = 1$ ব্যতীত x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান। সুতরাং $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

1.A.30. $y = \frac{x}{(x+2)(x-3)}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \frac{x}{(x+2)(x-3)}$.)

Ans : $x = -2$ এবং $x = 3$ ব্যতীত x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান। সুতরাং $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

1.A.31. $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$.)

Ans : $x = 4$ ব্যতীত x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান বিদ্যমান। সুতরাং $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$.

1.A.32. ব্যবধি কাকে বলে? (What is interval?)

Ans : মনে করি দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b যেখানে $a < b$ ($a > b$ ও হইতে পারে) a ও b এর একটি বা উভয়কে বাদ দিয়ে (বা অন্তর্ভুক্ত করিয়া) উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে ব্যবধি বলে।

1.A.33. খোলা ব্যবধি কি? (What is the open interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a ও b কে বাদ দিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে খোলা ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b) বা]a, b[দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.34. বদ্ধ ব্যবধি কি? (What is the closed interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a ও b কে অন্তর্ভুক্ত করিয়া উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে বদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে [a, b] দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.35. অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যববধি কি? (What is half open and half closed interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a বাদে এবং b সহ উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b] দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.36. অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি কি? (What is half closed and half open interval?)

Ans : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a সহ এবং b বাদে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি বলে।

1.A.37. $y = \sqrt{x}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find domain of the function $y = \sqrt{x}$.)

Ans : এখানে $x \geq 0$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \{x : x \geq 0\} = [0, \infty)$

1.A.38. $y = \sqrt{2x-1}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find domain of the function $y = \sqrt{2x-1}$.)

Ans : এখানে $2x - 1 \geq 0$ বা $x \geq \frac{1}{2}$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

1.A.39. $y = \sqrt{1-x}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \sqrt{1-x}$.)

Ans : এখানে $1 - x \geq 0$ বা $x \leq 1$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \{x : x \leq 1\} = (-\infty, 1]$

1.A.40. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.)

Ans : এখানে $x + 1 > 0$ বা $x > -1$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \{x : x > -1\} = (-1, \infty)$

1.A.41. $y = \frac{1+x}{\sqrt{3-x}}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \frac{1+x}{\sqrt{3-x}}$.)

Ans : এখানে $3 - x > 0$ বা $x < 3$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \{x : x < 3\}$

$= (-\infty, 3)$

1.A.42. $y = ln\ x$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = ln\ x$?) **[NUH–2010]**

Ans : এখানে $x > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র y এর বাস্তব মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \{x : x > 0\} = (0, \infty)$

1.A.43. $y = f(x)$ ফাংশনের রেঞ্জ কাকে বলে? (What is called range of the function $y = f(x)$?)

Ans : $y = f(x)$ ফাংশনের ডোমেনের প্রত্যেক মান বা বিন্দুর সাপেক্ষে y এর যে সমস্ত বাস্তব মান পাওয়া যায় তাহার সেট যদি B হয় তবে B কে ফাংশনটির রেঞ্জ বলে। ইহাকে R_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.A.44. $y = \sin x$ ফাংশনের রেঞ্জ কত? (What is the range of the function $y = \sin x$?)

Ans : $y = \sin x$ ফাংশনের ডোমেন $\mathbb{R}$ এর প্রত্যেক মান বা বিন্দুর সাপেক্ষে $-1 \leq y \leq 1$ হইবে।

$\therefore R_f = \{y : -1 \leq y \leq 1\} = [-1, 1]$.

1.A.45. $y = \cos x$ ফাংশনের রেঞ্জ কত? (What is the range of the function $y = \cos x$?)

Ans : $y = \cos x$ ফাংশনের ডোমেন $\mathbb{R}$ এর প্রত্যেক মান বা বিন্দুর সাপেক্ষে $y \in [-1, 1]$ হইবে।

$\therefore R_f = [-1, 1]$.

EXERCISE–1(A)

1. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{যখন} \quad x < 0 \\ x^2+1 & \text{যখন} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 5 & \text{যখন} \quad x > 2 \end{cases}$$

তাহা হইলে (i) $f(3/2)$ (ii) $f(-31)$ (iii) $f(\pi)$
(iv) $f(\sqrt{2})$ (v) $f(1)$ (vi) $f(10)$
(vii) $f(e)$ (viii) $f(1/2)$ (ix) $f(2)$
(x) $f(-\pi)$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ (i) $\frac{13}{4}$ (ii) -32 (iii) 5 (iv) 3 (v) 2
(vi) 5 (vii) 5 (viii) $\frac{5}{4}$ (ix) 5 (x) $-(\pi + 1)$

2. ধরি $f : \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 2$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে R_f নির্ণয় কর। [Let the function $f : \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ is defined by the formula $f(x) = x^2 + 2$, then find R_f.]

উত্তর ঃ $R_f = \{2, 3, 6, 11, 18, 27\}$

3. দেখাও যে $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ফাংশনটি $f(x) = x + 1$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। ফাংশনটির R_f নির্ণয় কর। [Show that $f : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ is a function defined by $f(x) = x + 1$. Find R_f of the function.]

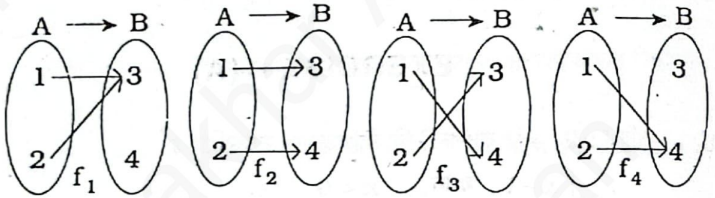
উত্তর ঃ $R_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

4. $f(x) = x + 3$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ফাংশনের R_f নির্ণয় কর। [Find R_f of the function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be defined by the formula $f(x) = x + 3$.]

উত্তর ঃ $R_f = \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$

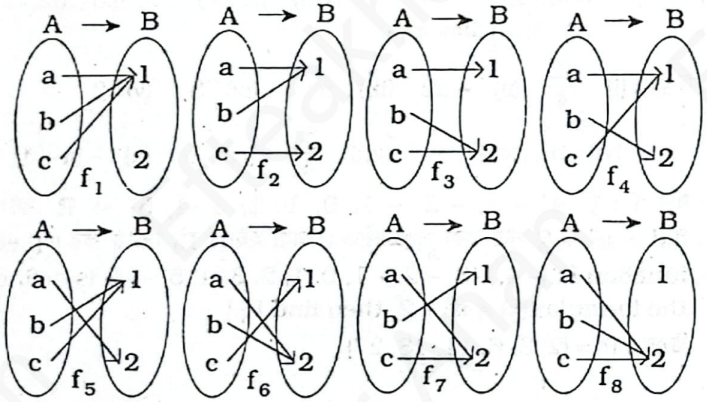
5. ধরি $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{3, 4\}$. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে যতগুলি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায় তাহা চিত্রের সাহায্যে দেখাও। [Let $A = \{1, 2\}$ and $B = \{3, 4\}$. Show the functions using diagram from the set A to B.]

উত্তর ঃ



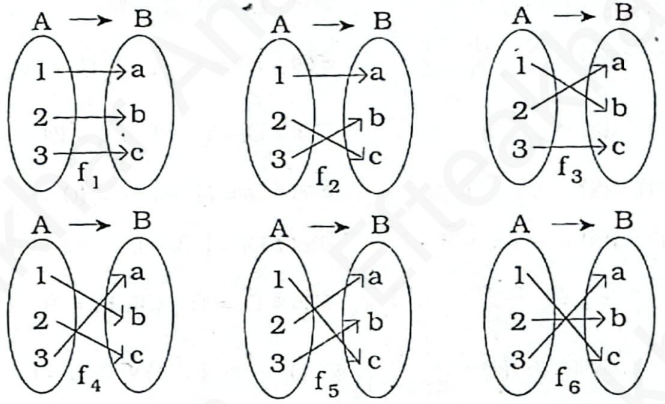
6. ধরি $A = \{a, b, c\}$ এবং $B = \{1, 2\}$. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে যতগুলি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায় তাহা চিত্রের সাহায্যে উল্লেখ কর। [Let $A = \{a, b, c\}$ and $B = \{1, 2\}$. Show that functions using graph from the set A to B.]

উত্তর ঃ



7. ধরি $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{a, b, c\}$. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে যতগুলি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায় যাহাদের কোডোমেন ও রেঞ্জ সমান তাহা চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

উত্তর ঃ



8. নিম্নলিখিত ফাংশন সমূহের প্রত্যেকটির লেখ নির্ণয় কর।

(i) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত $f(x) = x - 1$ সূত্র দ্বারা।

উত্তর ঃ $f^* = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

(ii) $f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা।

উত্তর ঃ $f^* = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$

(iii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^3 + 1$ সূত্র দ্বারা।

উত্তর ঃ $f^* = \{(1, 2), (2, 9), (3, 28), (4, 65), (5, 126), \ldots\ldots\}$

(iv) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to [0, \infty)$ ফাংশনটি $f(x) = |x|$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

উত্তর ঃ $f^* = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$

(v) $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^2 + x + 2$ সূত্র দ্বারা।

উত্তর ঃ $f^* = \{(0, 2), (1, 4), (2, 8), (3, 14)\}$.

9. নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত প্রত্যেকটি f ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the each of the functions which are defined as follows] :

(i) $f(x) = x + 5$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x - 5}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(iii) $f(x) = -x^2 + 1$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = (-\infty, 1]$

(iv) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{2\sqrt{2}\}$

(v) $f(x) = x^3 + 5$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = \mathbb{R}$

(vi) $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x + 6}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{-6\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{-12\}$

(vii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$; $R_f = (0, \infty)$

(viii) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ উত্তর ঃ $D_f = [1, \infty)$; $R_f = [0, \infty)$

(ix) $f(x) = -\sqrt{x + 3}$ উত্তর ঃ $D_f = [-3, \infty)$; $R_f = (-\infty, 0]$

(x) $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$; $R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

10. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ এবং $R_f = (-\infty, -4] \cup (0, \infty)$

11. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{1, -2\}$ এবং $R_f = \mathbb{R}$.

12. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{2}{x(x-1)}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ এবং $R_f = (-\infty, -8] \cup (0, \infty)$

13. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{x-5}{x-5}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$ এবং $R_f = \{1\}$

14(i) দেখাও যে $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$ এর $D_f = [-6, 6]$ এবং $R_f = [0, 6]$

(ii) দেখাও যে $f(x) = \sqrt{x^2 - 49}$ এর $D_f = [7, \infty) \cup (-\infty, -7]$ এবং $R_f = [0, \infty)$

15. ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর [Find domain and range] :

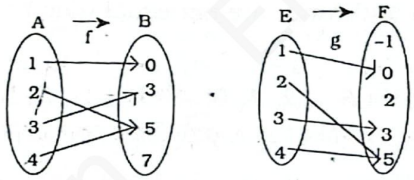
(i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ উত্তর ঃ $D_f = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$ **[NUH-2002]**

(ii) $f(x) = \cos^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)$ উত্তর ঃ $D_f = \left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$, $R_f = \mathbb{R}$ **[NUH-2002]**

Chapter-1(B)
বিভিন্ন প্রকার ফাংশন
DIFFERENT TYPES OF FUNCTIONS

1.B.1. সমান ফাংশন (Equal Function) ঃ মনে করি $f : A \to B$ এবং $g : E \to F$. তাহা হইলে f এবং g ফাংশনদ্বয় সমান হইবে যদি (i) $D_f = D_g$ অর্থাৎ $A = E$ এবং (ii) $f(x) = g(x)$ হয় $\forall x \in A$ (বা $x \in E$). [Let $f : A \to B$ and $g : E \to F$. If (i) $D_f = D_g$ i.e. $A = E$ and (ii) $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$ (or $\forall x \in E$) then f and g are equal functions.]

উদাহরণ–1. দেখাও যে নিম্নের চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশন দুইটি সমান

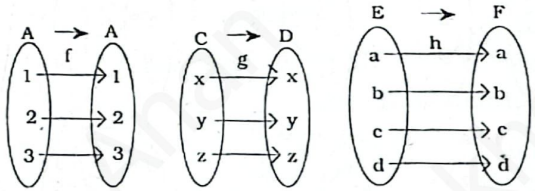


সমাধান ঃ এখানে $D_f = D_g$ অর্থাৎ $A = E$ এবং $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A$ (বা E),

সুতরাং f এবং g সমান ফাংশন অর্থাৎ $f = g$.

1.B.2. অভেদ ফাংশন (Identity Function) ঃ $f : A \to A$ কে অভেদ ফাংশন বলা হইবে যদি ইহাকে $f(x) = x$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা যায়। [$f : A \to A$ is called identity function if it is defined by the formula $f(x) = x$]

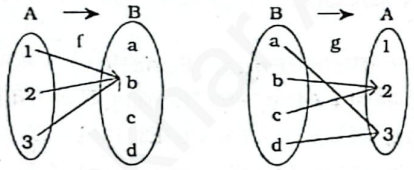
উদাহরণ–2. নিম্নের চিত্র দ্বারা বর্ণিত প্রত্যেকটি ফাংশনই অভেদ ফাংশন।



1.B.3. ধ্রুবক ফাংশন (Constant Functions) ঃ $f : A \to B$ কে ধ্রুবক ফাংশন বলা হইবে যদি R_f এক উপাদানী সেট হয়। অন্যভাবে $f : A \to B$ কে ধ্রুবক ফাংশন বলা হইবে যদি $f(x) = c$; $\forall x \in A$ যেখানে $c \in B$. [If R_f is a set of one element then $f : A \to B$ is called constant function. Another way, if $f(x) = C$, $\forall x \in A$ where $C \in B$ then $f : A \to B$ is called constant function]

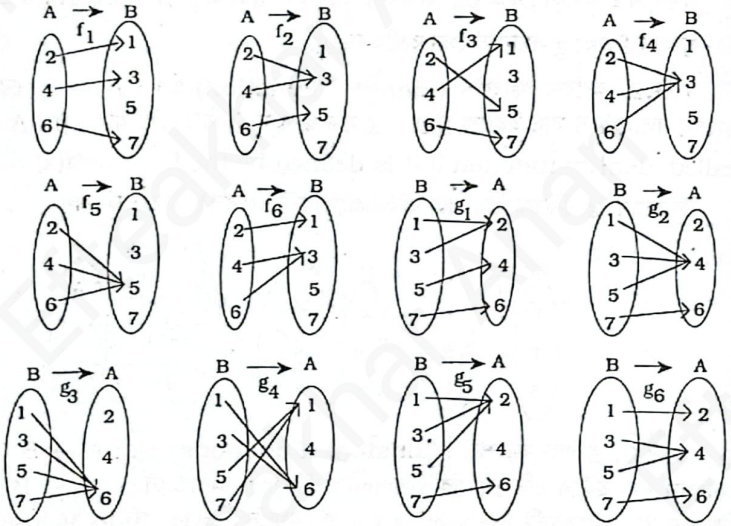
উদাহরণ–3. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সূত্র $f(x) = 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। এখানে f একটি ধ্রুবক ফাংশন।

উদাহরণ–4. নিম্নের চিত্রদ্বারা বর্ণিত $f : A \to B$ ফাংশনটি ধ্রুবক ফাংশন কিন্তু $g : B \to A$ ফাংশনটি ধ্রুবক নয়।



1.B.4. ইনটু ফাংশন (Into Function) ঃ $f : A \to B$ কে ইনটু ফাংশন বলা হইবে যদি $f(A) \neq B$ হয়। অর্থাৎ কোডোমেন ও রেঞ্জ সমান না হয়। [If $f(A) \neq B$ i.e. codomain and range are not equal then $f : A \to B$ is called into function.]

উদাহরণ–5. ধরি $A = \{2, 4, 6\}$ এবং $B = \{1, 3, 5, 7\}$. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে এবং B সেট হইতে A সেটে নিম্নের কোন কোন ফাংশন ইনটু ফাংশন তাহা নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ উপরের চিত্রে বর্ণিত A সেট হইতে B সেটে প্রত্যেকটি ফাংশন f_i $(i = 1, 2, \cdots, 6)$ ইনটু ফাংশন। কিন্তু B সেট হইতে A সেটে বর্ণিত g_1 এবং g_6 ফাংশন দুইটি ছাড়া অন্য চারটি ফাংশনই ইনটু ফাংশন।

1.B.5. এক-এক ফাংশন (One-One or 1 – 1 Function) ঃ $f : A \to B$ কে এক-এক ফাংশন বলা হইবে যদি $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ যেখানে $a_1, a_2 \in A$.

অথবা $f : A \to B$ কে এক-এক ফাংশন বলা হইবে যদি

$f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$ যেখানে $a_1, a_2 \in A$

অথবা $f : A \to B$ কে এক-এক ফাংশন বলা হইবে যদি A এর প্রত্যেক ভিন্ন উপাদানের f সম্পর্কিত উপাদান B তে ভিন্ন ভিন্ন হয়। এক-এক ফাংশনকে ইনজেকটিভ (injective) ফাংশনও বলা হয়।

[If $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ where $a_1, a_2 \in A$ then $f : A \to B$ is called one-one function.

Or, If $f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$ where $a_1, a_2 \in A$ then $f : A \to B$ is called one-one function.

Or, If f related elements in B of each of the different elements of A are different then $f : A \to B$ is called one-one function. One-one functions is also called injective function]

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ যদি A এবং B এর উভয়ে সসীম সেট হয় এবং A এর উপাদান সংখ্যা B এর চেয়ে বেশী হয় তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে সংজ্ঞায়িত কোন ফাংশনই এক-এক হইতে পারে না।

উদাহরণ–6. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি $f(x) = 2x + 3$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশন। তাহা হইলে দেখাও যে f একটি এক-এক ফাংশন।

সমাধান ঃ ধরি $a, b \in \mathbb{R}$. তাহা হইলে $f(a) = 2a + 3$ এবং $f(b) = 2b + 3$.

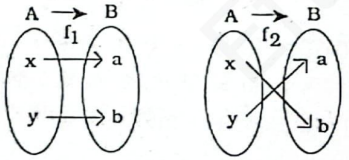
এখন $f(a) = f(b) \Rightarrow 2a + 3 = 2b + 3 \Rightarrow 2a = 2b$

$\Rightarrow a = b \Rightarrow$ f এক-এক ফাংশন।

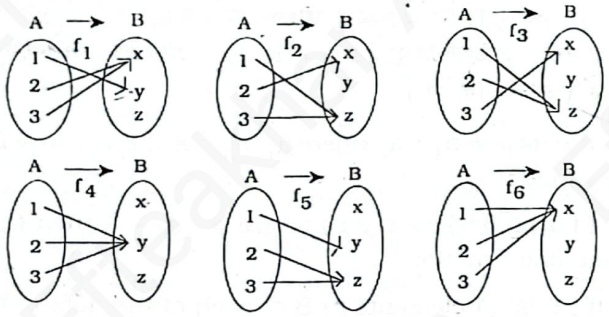
উদাহরণ–7. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশন। দেখাও যে f এক-এক ফাংশন নয়। [Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function defined by the formula $f(x) = x^2$. Show that f is a one-one function.]

সমাধান ঃ এখানে $f(2) = 4 = f(-2)$ অর্থাৎ $\mathbb{R}$ এর দুইটি ভিন্ন উপাদান 2 এবং –2 এর একই প্রতিবিম্ব বিদ্যমান। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক এক নয়।

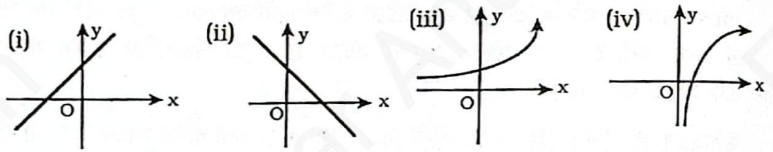
উদাহরণ–8. ধরি $A = \{x, y\}$ এবং $B = \{a, b\}$. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশন দুইটির প্রত্যেকটি এক-এক ফাংশন ঃ



উদাহরণ–9. ধরি A = {1, 2, 3} এবং B = {x, y, z}. তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত কোন ফাংশনই এক-এক নয় ঃ



উদাহরণ–10. নিম্নের লেখচিত্র দ্বারা নির্দেশিত {(x, f(x)) : y = f(x)} আকারের ফাংশনের প্রত্যেকটি ফাংশনই এক-এক ফাংশন ঃ



(2) যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনের লেখটি দেওয়া থাকে এবং x অক্ষ ও উহার সমান্তরাল প্রত্যেকটি সরলরেখা ঐ লেখচিত্রকে কমপক্ষে একটি বিন্দুতে ছেদ করে তবে ফাংশনের ঐ লেখচিত্রটি অনটু ফাংশনের লেখচিত্র হইবে।

1.B.6. সার্বিক বা সর্বগ্রাহী বা অনটু ফাংশন (Onto Function) ঃ $f : A \to B$ কে সর্বগ্রাহী বা সার্বিক বা অনটু ফাংশন বলা হইবে যদি f(A) = B হয়। অর্থাৎ রেঞ্জ ও কোডোমেন ($Cod_f = R_f$) সমান হয়। সার্বিক ফাংশনকে সারজেকটিভ ফাংশনও বলা হয়। [If f(A) = B i.e. codomain and range are equal ($cod_f = R_f$) then $f : A \to B$ is called onto function. Onto function is also called surjective function.]

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ যদি A এবং B উভয়ে সসীম সেট হয় এবং B এর উপাদান সংখ্যা A এর চেয়ে বেশী হয় তবে A সেট হইতে B সেটে বর্ণিত কোন ফাংশনই সার্বিক হইবে না।

ফাংশনের গ্রাফ হইতে এক-এক এবং অনটু ফাংশনের ধারণা ঃ

(1) যদি xy সমতলে {(x, f(x)) : y = f(x)} আকারের কোন ফাংশনের লেখচিত্র দেওয়া থাকে এবং যদি x অক্ষ অথবা উহার সমান্তরাল প্রত্যেকটি সরল রেখা ঐ লেখচিত্রটিকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ না করে তবে ঐ লেখচিত্র দ্বারা নির্দেশিত ফাংশনটি এক-এক ফাংশন হইবে।

উদাহরণ–11. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি f(x) = 3x – 4 সূত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশন। দেখাও যে f একটি সার্বিক ফাংশন। [Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function defined by the formula f(x) = 3x – 4. Show that f is a surjective function.]

সমাধান ঃ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি f(x) = 3x – 4 সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

এখানে ফাংশনটির $cod_f = \mathbb{R}$

আবার, y = f(x) = 3x – 4

$\Rightarrow 3x = y + 4$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(y + 4)$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

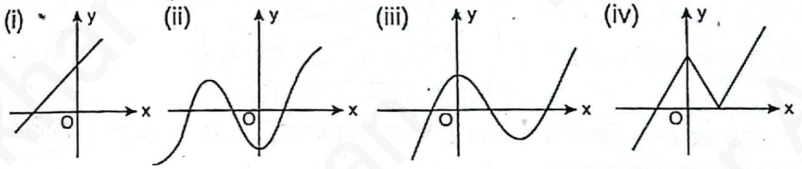
যেহেতু প্রদত্ত ফাংশনের $cod_f = R_f = \mathbb{R}$

সুতরাং ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন।

উদাহরণ–12. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশন। দেখাও যে f সার্বিক ফাংশন নয়। [Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function defined by $f(x) = x^2 + 1$. Show that f is not surjective function.]

সমাধান ঃ এখানে রেঞ্জ $\mathbb{R}$ এর 0 উপাদান ডোমেন $\mathbb{R}$ এর কোন উপাদানের প্রতিবিম্ব বা f সম্পর্কিত উপাদান নয় কারণ $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$ এর কোন বাস্তব সমাধান বিদ্যমান নাই। সুতরাং প্রদত্ত f ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন নয়।

উদাহরণ–13. নিম্নের লেখচিত্র দ্বারা নির্দেশিত {(x, f(x) : y= f(x)} আকারের প্রত্যেকটি ফাংশনই অনটু ফাংশন ঃ

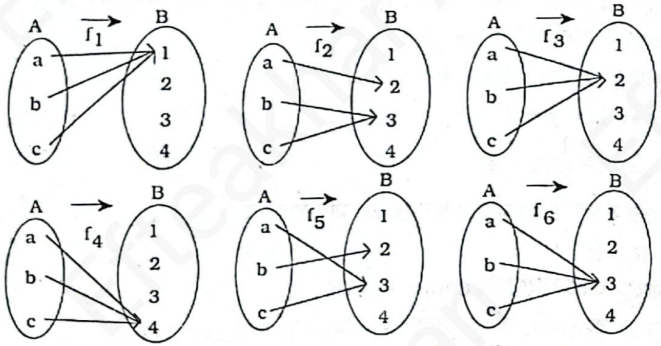


নোট ঃ কোন ফাংশন একই সঙ্গে এক-এক ও সার্বিক হইলে তাহাকে এক-এক ও সার্বিক ফাংশন বা বাইজেকটিভ (bijective) ফাংশন বলা হয়।

1.B.7. মেনি ওয়ান ফাংশন (Many One Function) ঃ $f : A \to B$ কে মেনি ওয়ান ফাংশন বলা হইবে যদি $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$ যেখানে $a_1, a_2 \in A$. সুতরাং যে কোন মেনি ওয়ান ফাংশনের ডোমেনের কমপক্ষে দুইটি ভিন্ন উপাদানের একই প্রতিবিম্ব বিদ্যমান থাকিবে। অন্যভাবে কোন ফাংশন এক-এক না হইলে তাহা মেনি ওয়ান ফাংশন। [If $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$ where $a_1, a_2 \in A$ then $f : A \to B$ is called many one function. So there exist identical image at least two different elements in domain of any many one function. Another way, if the function is not one-one then it is many one function.]

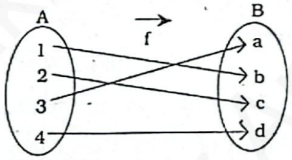
উদাহরণ–14. ধরি A = {a, b, c} এবং B = {1, 2, 3, 4}.

তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত প্রত্যেকটি ফাংশন মেনি ওয়ান ফাংশন।

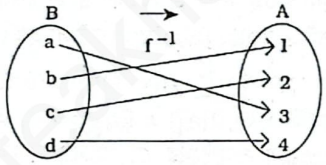


1.B.8. বিপরীত ফাংশন (Inverse Function) ঃ ধরি $f : A \to B$ একটি এক-এক এবং অনটু ফাংশন। তাহা হইলে একটি ফাংশন $f^{-1} : B \to A$ বিদ্যমান যদি প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি অনন্য $f^{-1}(b) \in A$ বিদ্যমান থাকে। এইক্ষেত্রে f^{-1} কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয়। [Let $f : A \to B$ is a one-one and onto function. If a unique $f^{-1}(b) \in A$ exist for each $b \in B$ then a function $f^{-1} : B \to A$ exist. In this case f^{-1} is called inverse function of f.]

উদাহরণ–15. নিম্নের চিত্র দ্বারা বর্ণিত $f : A \to B$ ফাংশনটি এক-এক এবং অনটু।



সুতরাং f এর বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান এবং $f^{-1} : B \to A$ কে নিম্নলিখিতভাবে চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।



অন্যভাবে বিপরীত ফাংশন ঃ ধরি $f : A \to B$ এবং $g : B \to A$. তাহা হইলে ফাংশন g কে ফাংশন f এর বিপরীত ফাংশন বলা হইবে যদি $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ হয় যেখানে $f(x) \in B$ এবং $g(x) \in A$ এবং ইহাকে f^{-1} দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ $g = f^{-1}$. [Let $f : A \to B$ and $g : B \to A$. If $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ where $f(x) \in B$ and $g(x) \in A$ then the function g is called inverse function of f and it is denoted by f^{-1} i.e. $g = f^{-1}$.]

উদাহরণ–16. যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনদ্বয় $f(x) = x - 3$ এবং $g(x) = x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে দেখাও যে f এর বিপরীত ফাংশন g. [If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are two function defined by $f(x) = x - 3$ and $g(x) = x + 3$ then show that g is a inverse function of f.]

সমাধান ঃ এখানে $f(x) = x - 3 \Rightarrow f(x + 3) = x + 3 - 3 = x$

এবং $g(x) = x + 3 \Rightarrow g(x - 3) = x - 3 + 3 = x$

এখন আমরা পাই $f(g(x)) = f(x + 3) = x$ এবং $g(f(x)) = g(x - 3) = x$

এখন যেহেতু $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. সুতরাং f এর বিপরীত ফাংশন g অর্থাৎ $g = f^{-1}$

উদাহরণ–17. যদি $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{4}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ফাংশন $f(x) = \frac{2x + 3}{4x - 5}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে $y = f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর। [If $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{4}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ is defined by the formula $f(x) = \frac{2x + 3}{4x - 5}$ then find $y = f^{-1}(x)$.] **[NUH–1999]**

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে $f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f(y) = x$ ..... (1) $[\because f^{-1}(x) = y]$

আবার $f(x) = \frac{2x + 3}{4x - 5} \Rightarrow f(y) = \frac{2y + 3}{4y - 5}$ ..... (2)

এখন (1) এবং (2) হইতে পাই $\frac{2y + 3}{4y - 5} = x$

$\Rightarrow 2y + 3 = x(4y - 5) \Rightarrow 2y + 3 = 4xy - 5x \Rightarrow 5x + 3 = 4xy - 2y$

$\Rightarrow 5x + 3 = y(4x - 2) \Rightarrow y = \frac{5x + 3}{4x - 2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{5x + 3}{4x - 2}$

উদাহরণ–18. যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সূত্র $f(x) = 3x - 6$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে $y = f^{-1}(x)$ বাহির কর এবং $f(x)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = 3x - 6$

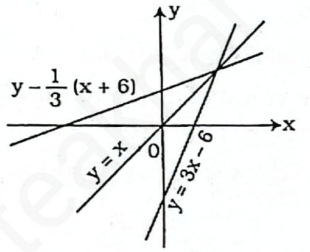
$\Rightarrow x = 3y - 6$ [x এবং y কে বিনিময় করিয়া]

$\Rightarrow 3y = x + 6$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}(x + 6)$

$\Rightarrow y = f^{-1}(x)$

$\therefore \frac{1}{3}(x + 6)$



f(x) এবং $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র

দ্রষ্টব্য ঃ (i) যদি $y = f(x)$ এর লেখচিত্রকে x অক্ষ বা x অক্ষের সমান্তরাল রেখা একাধিক বিন্দুতে ছেদ না করে তবে $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান থাকিবে।

(ii) $f(x)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র $y = x$ সরলরেখার সাথে প্রতিসম হইবে।

উদাহরণ-19. মনে কর $A = \mathbb{R} - \{3\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \{1\}$। ধর $f : A \to B$ ফাংশনটি $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ দ্বারা বর্ণিত। প্রমাণ কর যে, f একটি এক-এক এবং সর্বগ্রাহী (onto) ফাংশন। একটি ফর্মূলা বাহির কর যাহা f^{-1} কে সংজ্ঞায়িত করে। [Let $A = \mathbb{R} - \{3\}$ and $B = \mathbb{R} - \{1\}$. Let the function $f : A \to B$ is defined by $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$. Prove that f is an one-one and onto function. Find a formula which defined f^{-1}.] **[NUH-1999]**

সমাধান ঃ এখানে, $A = \mathbb{R} - \{3\}$, $B = \mathbb{R} - \{1\}$ এবং $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

f এক-এক [f is one-one] : ধরি $a, b, \in A$ (এখানে $a \neq 3, b \neq 3$)

$\therefore f(a) = \frac{a-2}{a-3}$ এবং $f(b) = \frac{b-2}{b-3}$

যদি $f(a) = f(b)$ হয় তবে $\frac{a-2}{a-3} = \frac{b-2}{b-3}$

$\Rightarrow (a-3)(b-2) = (a-2)(b-3)$

$\Rightarrow ab - 2a - 3b + 6 = ab - 3a - 2b + 6$

$\Rightarrow -2a - 3b = -3a - 2b$

$\Rightarrow a = b$

$\therefore f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$

$\therefore$ f ফাংশনটি এক-এক। [f is one-one.]

f সর্বগ্রাহী [f is onto] : যদি $y = f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ হয় তবে $xy - 3y = x - 2$

$\Rightarrow x(y-1) = 3y - 2$

$\Rightarrow x = \frac{3y-2}{y-1}$

এখানে $y = 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here the value of x is real for all real values of y except $y = 1$]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

আবার ফাংশনটির কোডোমেন [Again the codomain of the functions is]

$$cod_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

যেহেতু $cod_f = R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

সুতরাং f ফাংশনটি সর্বগ্রাহী। [So the function is onto.]

আবার $f : A \to B$ ফাংশনটি এক-এক ও সর্বগ্রাহী (onto), সুতরাং f এর একটি বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : B \to A$ থাকিবে। [Again, the function $f : A \to B$ is one-one and onto. So, f has an inverse function $f^{-1} : B \to A$.]

$y = \frac{x-2}{x-3}$ হইতে সমাধান করিয়া পাই $x = \frac{3y-2}{y-1}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{3y-2}{y-1}$ বা $f^{-1}(x) = \frac{2-3x}{1-x}$

উদাহরণ-20. ধর $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. ধর $f : A \to B$ ফাংশনটি $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। প্রমাণ কর যে, f একটি এক-এক এবং অনটু (onto) ফাংশন। একটি ফর্মূলা বাহির কর যাহা f^{-1} এর সংজ্ঞা দেয়। [Let $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Let the function $f : A \to B$ is defined by $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$. Prove the f is an one-one and onto function. Find a formula which defined f^{-1}.]

সমাধান ঃ এখানে $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ এবং $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$.

f এক-এক [f is one-one] : ধরি $a, b \in A \left(\text{এখানে } a \neq -\frac{1}{2}, b \neq -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore f(a) = \frac{a-3}{2a+1}$ এবং $f(b) = \frac{b-3}{2b+1}$

যদি $f(a) = f(b)$ হয় তবে [If $f(a) = f(b)$ then]

$\frac{a-3}{2a+1} = \frac{b-3}{2b+1}$

$\Rightarrow (a-3)(2b+1) = (2a+1)(b-3)$

$\Rightarrow 2ab + a - 6b - 3 = 2ab - 6a + b - 3$

$\Rightarrow a - 6b = -6a + b$

$\Rightarrow 7a = 7b \Rightarrow a = b$

$\therefore f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ $\therefore$ f ফাংশনটি এক-এক।

f অনটু [f is onto] : প্রদত্ত ফাংশন $f : A \to B$ এর কোডোমেন [The co-domain of the given function $f : A \to B$ is]

$$cod_f = B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

আবার, $y = f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$\Rightarrow 2xy + y = x - 3$

$\Rightarrow x = \frac{y+3}{1-2y}$

এখানে $y = \frac{1}{2}$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [The value of x will be real for all real values of y except $y = \frac{1}{2}$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

যেহেতু $\text{cod}_f = R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

সুতরাং f ফাংশনটি অনটু। [So the function f is onto.]

যেহেতু $f : A \to B$ ফাংশনটি এক-এক ও অনটু, সুতরাং f এর একটি বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : B \to A$ থাকিবে। [Since $f : A \to B$ is one-one and onto, so f has an inverse function $f^{-1} : B \to A$.]

$y = \frac{x-3}{2x+1}$ হইতে সমাধান করিয়া পাই $x = \frac{y+3}{1-2y}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y+3}{1-2y}$ বা $f^{-1}(x) = \frac{3+x}{1-2x}$.

উদাহরণ–21. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = (x+1)^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। আরও $f^{-1}(4)$ নির্ণয় কর। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = (x+1)^2$. Find the domain and range of the function. Evaluate $f^{-1}(4)$.] **[NUH(NM)–2003]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশনটি $f(x) = (x+1)^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। [The given function is defined by $f(x) = (x+1)^2$.]

এখানে $D_f = \text{cod}_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = (x+1)^2$

$\Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{y}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y} - 1$

এখানে $R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

যেহেতু $\text{cod}_f \neq R_f$, সুতরাং ফাংশনটি অনটু নয় অর্থাৎ f^{-1} বিদ্যমান নয়। [Since $\text{cod}_f \neq R_f$, so the function is not onto, that is, f^{-1} does not exist.]

অতএব $f^{-1}(4)$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–22. দেখাও যে $f(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ বর্ণিত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি এক-এক ও না, সর্বগ্রাহীও না। এই ফাংশনের ডোমেন ও কোডোমেন সংশোধন কর যেন ইহা এক-এক এবং সর্বগ্রাহী উভয়টি হয়। [Show that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = \cos x \; \forall x \in \mathbb{R}$ is neither one- one nor onto. Modify the domain and co-domain of this function so that it may be both one- one and onto.

সমাধান ঃ এখানে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $f(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

f এক-এক নয় ঃ আমরা জানি $0, 2\pi \in R$

এবং $f(0) = \cos 0 = 1$ ও $f(2\pi) = \cos 2\pi = 1$

$\therefore$ ডোমেনের দুইটি ভিন্ন উপাদান 0 ও 2π এর একই f প্রতিবিম্ব 1 কোডোমেনে বিদ্যমান। সুতরাং ভিন্ন উপাদানের ভিন্ন প্রতিবিম্ব না হওয়ায় f ফাংশনটি এক-এক না।

f সর্বগ্রাহী নয় ঃ আমরা জানি $x \in \mathbb{R}$ হইলে $-1 \leq \cos x \leq 1$. সুতরাং যদি $y \in$ কোডোমেন $\mathbb{R}$ এবং $y > 1$ ও $y < -1$ হয় তবে ডোমেন $\mathbb{R}$ এ এমন কোন উপাদান x নাই যেন $f(x) = \cos x = y$ হয়। ফলে f ফাংশনটি ইনটু হইবে কিন্তু সর্বগ্রাহী হইবে না।

২য় অংশ ঃ ধরি $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ এবং } 0 \leq x \leq \pi\}$

এবং $B = \{y : y \in \mathbb{R} \text{ এবং } -1 \leq y \leq 1\}$

এখন যদি f এর ডোমেন হিসাবে A কে এবং কোডোমেন হিসাবে B কে লই তাহা হইলে ফাংশন $f : A \to B$ যেখানে $f(x) = \cos x$, $\forall x \in A$, এক-এক ও সর্বগ্রাহী হইবে।

1.B.9. সীমাবদ্ধ ফাংশন (Bounded function) : মনে করি (a, b) ব্যবধিতে f(x) ফাংশন সংজ্ঞায়িত ও ইহার মান বিদ্যমান। f(x) কে সীমাবদ্ধ ফাংশন বলে যদি দুইটি বাস্তব সংখ্যা m, M থাকে যেন $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in (a, b)$ হয়। [Let the function f(x) is defined and values of it exist in the interval (a, b). If two real numbers m, M exist such that $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in (a, b)$ then f(x) is called bounded function.]

1.B.10. বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন (Increasing function) : ফাংশন f(x) কে কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন বলে যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে f(x) এর মানও বৃদ্ধি পায় অর্থাৎ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. [If f(x) increases for the increasing values of x in any interval then function f(x) is called increasing function i.e. $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.]

উদাহরণ–23. $f(x) = x^3$ হইলে [0, 4] ব্যবধিতে

$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2^3 = 8, f(3) = 27$

$1 > 0 \Rightarrow f(1) > f(0)$

$2 > 1 \Rightarrow f(2) = 8 > f(1) = 1$ ইত্যাদি।

$\therefore f(x) = x^3$, [0, 4] ব্যবধিতে একটি বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন।

1.B.11. হ্রাসপ্রাপ্ত ফাংশন (Decreasing function) : ফাংশন f কে এবং কোন ব্যবধিতে হ্রাসপ্রাপ্ত ফাংশন বলে যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে f(x) এ পায় অর্থাৎ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. [If f(x) decreases for the করা হয় এবং values of x in any interval then function f(x) is ca function i.e. $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.]

উদাহরণ–24. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ হইলে [1, 4] ব্যবধিতে দ্বারা নির্দেশ ২য়।

$f(1) = 1, f(2) = \frac{1}{4}, f(3) = \frac{1}{9}$ $g : A \to \mathbb{R}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়

(iv) f এবং g এর ভাগ (quotient) ফাংশনকে $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয় যেখানে $g(x) \neq 0$.

উপরের সংজ্ঞায়িত চারটি ফাংশনই বাস্তব মান বিশিষ্ট।

উদাহরণ–27. যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সূত্র $f(x) = x + 1$ এবং $g(x) = x - 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তাহা হইলে $f + g$, $f - g$, fg, $(f + g)(1)$, $(f - g)(2)$, $fg(3)$, $\frac{f}{g}(1)$ এবং $\frac{f}{g}(5)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1 + x - 1 = 2x$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x + 1 - (x - 1) = 2$

$(fg)(x) = f(x)\, g(x) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 1 + 1 - 1 = 2$

$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 2 + 1 - (2 - 1) = 2$

$(fg)(3) = f(3)\, g(3) = (3 + 1)(3 - 1) = 8$

আবার সংজ্ঞানুসারে $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ যেখানে $g(x) \neq 0 = \frac{x+1}{x-1}$ যেখানে $x - 1 \neq 0$

সুতরাং $\frac{f}{g}(1) = \frac{f(1)}{g(1)}$. কিন্তু ইহা সংজ্ঞায়িত নয় কারণ $g(1) = 1 - 1 = 0$

আবার $\frac{f}{g}(5) = \frac{f(5)}{g(5)} = \frac{5+1}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

উদাহরণ–28. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সূত্র $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = -2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে $f(x)$, $g(x)$ এবং $(f + g)(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

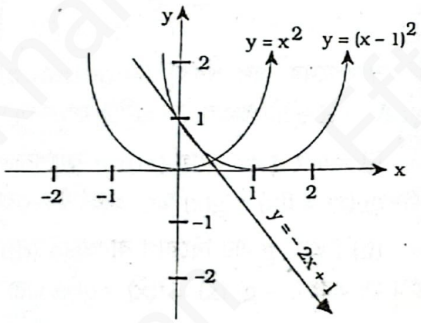
সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

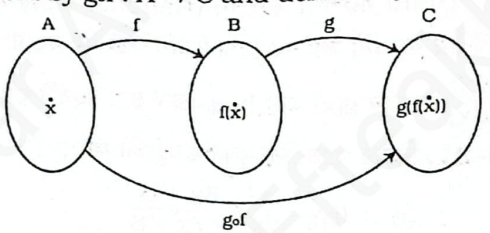
$= x^2 - 2x + 1$

$= (x - 1)^2$

এখানে $f(x)$ একটি প্যারাবোলা, $g(x)$ একটি সরলরেখা এবং $(f + g)(x)$ একটি প্যারাবোলার সমীকরণ নির্দেশ করে। ইহাদের লেখচিত্র প্রদত্ত হইল।



1.B.15. গুণজ ফাংশন (Composite Function) ঃ ধরি $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ যেখানে $R_f = B = D_g$. তাহা হইলে f এবং g এর গুণজ ফাংশনকে $g \circ f : A \to C$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। [Let $f : A \to B$ and $g : B \to C$ where $R_f = B = D_g$. Then composite function of f and g is denoted by $g \circ f : A \to C$ and defined by $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.]



উদাহরণ–29. ধরি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সূত্র $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

এখানে $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$

$(g \circ f)(1) = 1^2 + 1 = 2$ এবং $(g \circ f)(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$

আবার এখানে $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$

$(f \circ g)(0) = (0 + 1)^2 = 1$ এবং $(f \circ g)(5) = (5 + 1)^2 = 36$.

1.B.16. বহুপদী ফাংশন (Polynomial Function) ঃ যে ফাংশনের নির্ভরশীল চলক বহুপদী তাকে বহুপদী ফাংশন বলা হয়। গাণিতীক ভাবে, ফাংশন f কে x এর বহুপদী ফাংশন বলা হইবে যদি $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ..... (1) হয় যেখানে $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ এবং $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.

যদি $a_0 \neq 0$ হয় তবে (1) কে **n** ক্রমের (order) বহুপদী ফাংশন বলা হয়।

যদি $a_0 = 1$ হয় তবে (1) কে n ক্রমের মনিক (monic) বহুপদী ফাংশন বলা হয়।

যদি $n = 0$ হয় তবে (1) কে ধ্রুবক (constant) বহুপদী ফাংশন বলা হয়।

যদি $n = 1$ হয় তবে (1) কে রৈখিক (linear) বা এক ক্রমের বহুপদী ফাংশন বলা হয়।

যদি $n = 2$ হয় তবে (1) কে দ্বিঘাতিক (quadratic) বা দুই ক্রমের বহুপদী ফাংশন বলা হয়।

যদি $f(x) = 0$ হয় তবে (1) কে অর্থাৎ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a^n = 0$ ..... (2) কে n ক্রমের বহুপদী সমীকরণ বলা হয়।

যদি $f(a) = 0$ হয় তবে a কে বহুপদী ফাংশন (1) এর বা বহুপদী সমীকরণ (2) এর মূল (root) বা শূন্য (zero) বলা হয়।

উদাহরণ–30. (i) $f(x) = ax + b (a \neq 0)$ একটি এক ক্রমের বহুপদী বা রৈখিক বহুপদী ফাংশন বা সংক্ষেপে রৈখিক ফাংশন।

(ii) $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ একটি দুই ক্রমের বহুপদী ফাংশন বা দ্বিঘাতিক বহুপদী ফাংশন বা সংক্ষেপে দ্বিঘাতিক ফাংশন বা দ্বিঘাতিক রাশি (expression) বলে।

1.B.17. মূলদীয় বহুপদী ফাংশন (Rational Polynomial Function) ঃ x এর মূলদীয় বহুপদী ফাংশন f কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ যেখানে $g(x)$ এবং $h(x)$ এর উভয়ে বহুপদী ফাংশন এবং $h(x) \neq 0$.

উদাহরণ–31. নিম্নের প্রত্যেকটি মূলদীয় বহুপদী ফাংশন।

(i) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 + 7x + 8}$

(ii) $g(x) = \frac{2x^3 + 8x + 6}{x^2 - 2x + 7}$

কিন্তু নিম্নের কোনটিই মূলদীয় বহুপদী ফাংশন নয় ঃ

(iii) $p(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x^3 + 2x + 8}$

(iv) $q(x) = \frac{x + 8}{\sqrt{x^2 + 6x - 9}}$

1.B.18. বীজগণিতীয় ফাংশন (Algebraic Function) ঃ কোন সংজ্ঞায়িত ডোমেনে একটি ফাংশন $y = f(x)$ কে বীজগণিতীয় ফাংশন বলা হইবে যদি ইহা নিম্নলিখিত আকারের সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)y + p_n(x) = 0$$

যেখানে $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ এর প্রত্যেকটি x এর বহুপদী।

যদি ফাংশনটিকে কোন ডোমেন দুইটি বহুপদী $p(x)$ এবং $q(x)$ এর ভাগফলে অর্থাৎ $\frac{p(x)}{q(x)}$ এ প্রকাশ করা যায় তবে ঐ ফাংশনটিকে মূলদীয় বীজগণিতীয় ফাংশন বলা হয়। অন্যথায়, ইহাকে অমূলদীয় বীজগণিতীয় ফাংশন বলা হয়।

1.B.19. ট্রান্সসেনডেন্টাল বা তুরীয় ফাংশন (Transcendental Function) ঃ যে ফাংশন বীজগণিতীয় নয় ঐ ফাংশনকে কোন সংজ্ঞায়িত ডোমেনে ট্রান্সসেনডেন্টাল বা তুরীয় ফাংশন বলে। এক একটি বিশেষ সংজ্ঞায়িত ডোমেনে নিম্নলিখিত ফাংশন সমূহ প্রাথমিক ট্রান্সসেনডেন্টাল ফাংশন হিসাবে পরিচিত ঃ

(i) সূচকীয় ফাংশন (ii) লগারিদিমিক ফাংশন

(iii) ত্রিকোণমিতিক ফাংশন (iv) ইনভারস্ ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

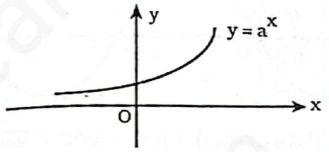
(v) হাইপারবোলিক ফাংশন এবং (vi) ইনভারস্ হাইপারবোলিক ফাংশন।

1.B.20. সূচকীয় ফাংশন (Exponential Function) ঃ যদি $a \in (0, \infty) - \{1\}$ হয়, তবে $f(x) = a^x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ফাংশনটিকে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে সূচকীয় ফাংশন বলে। [If $a \in (0, \infty) - \{1\}$, then the function $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ which is defined by $f(x) = a^x$ is called exponential function with respect to base a.]

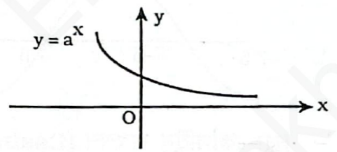
উদাহরণ–32. নিম্নের প্রত্যেকটি সূচকীয় ফাংশন।

(i) $f(x) = 2^x$ (ii) $g(x) = e^x$

সূচকীয় ফাংশন $y = f(x) = a^x$, $a \in (0, \infty) - \{1\}$ এর লেখচিত্র নিম্নে দেওয়া হইল।



(যখন $a > 1$)



(যখন $a < 1$)

1.B.21. লগারিদিমিক ফাংশন (Logarithmic Function) ঃ যদি $a \in (0, \infty) - \{1\}$ হয় তবে $f(x) = \log_a x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে লগারিদম ফাংশন বলে। [If $a \in (0, \infty) - \{1\}$ then the function $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ which is defined by $f(x) = \log_a x$ is called logarithmic function]

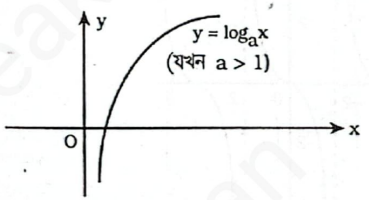
উদাহরণ–33. নিম্নের প্রত্যেকটি লগারিদিমিক ফাংশন।

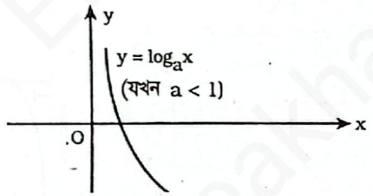
(i) $f(x) = \log_3 x$

(ii) $f(x) = ln\, x = \log_e x$

(iii) $f(x) = \log_{10} x$

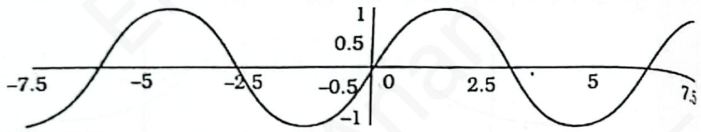
লগারিদিমিক ফাংশন $y = f(x) = \log_a x$, $a \in (0, \infty) - \{1\}$ এর লেখচিত্র নিম্নে দেওয়া হইল ঃ



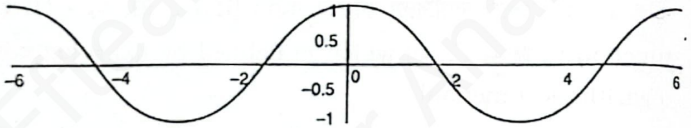


1.B.22. ত্রিকোণমিতিক বৃত্তীয় ফাংশন (Trigonometric Circular Function) ঃ ছয়টি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের সংজ্ঞা, প্রত্যেকটির ডোমেন ও রে উল্লেখসহ লেখচিত্র নিম্নে দেওয়া হইল।

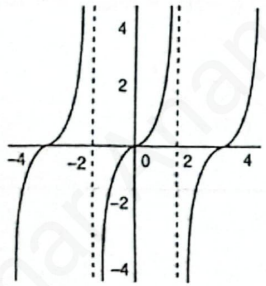
(i) সাইন ফাংশন (Sine Function) ঃ $f(x) = \sin x$ দ্বারা সংজ্ঞায়ি $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক সাইন ফাংশন বলে। [The functio $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ which is defined by $f(x) = \sin x$ is calle trigonometric sine function.]



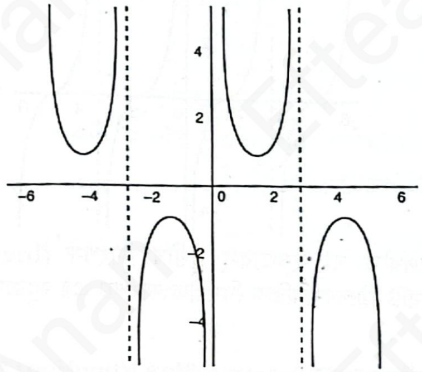
(ii) কোসাইন ফাংশন (Cosine Function) ঃ $f(x) = \cos x$ দ্বারা সংজ্ঞায়ি $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক কোসাইন ফাংশন বলে। [The functio $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ which is defined by $f(x) = \cos x$ is calle trigonometric cosine function.]



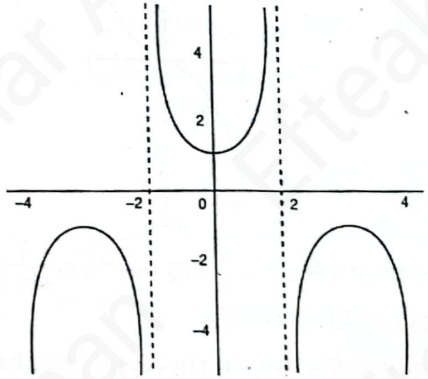
(iii) ট্যানজেন্ট ফাংশন (Tangent Function) ঃ $f(x) = \tan x$ দ্বারা সংজ্ঞায়ি $f : \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট ফাংশ বলে। [The function $f : \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \tan x$ is called trigonometric tangent function.]



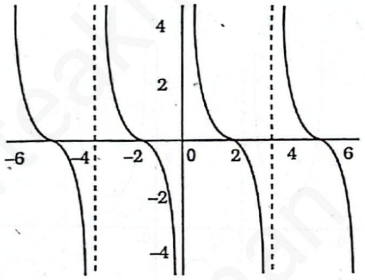
(iv) কোসেকান্ট ফাংশন (Cosecant Function) ঃ $f(x) = \operatorname{cosec} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে যেখানে $A = \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$ এবং $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$. [The function $f : A \to B$ which is defined by $f(x) = \operatorname{cosec} x$ is called trigonometric cosecant function where $A = \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$ and $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$.]



(v) সেকান্ট ফাংশন (Secant Function) ঃ $f(x) = \sec x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক সেকান্ট ফাংশন বলে যেখানে $A = \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$ এবং $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$. [The function $f : A \to B$ which is defined by $f(x) = \sec x$ is called secant function where $A = \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{2\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$ and $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$.]

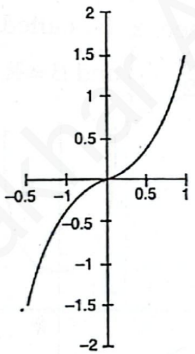


(vi) কোট্যানজেন্ট ফাংশন (Cotangent Function) ঃ $f(x) = \cot x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \cot x$ is called trigonometric cotangent function.]



1.B.23. বিপরীত বা ইনভারস্ বৃত্তীয় ফাংশন (Inverse Circular Functions) ঃ ছয়টি ত্রিকোণমিতিক বিপরীত ফাংশন এর সংজ্ঞা এবং লেখচিত্র নিম্নে দেওয়া হইল।

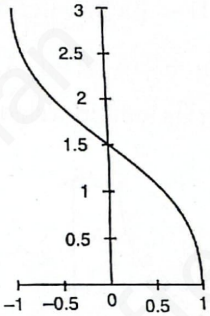
(i) ইনভারস্ সাইন ফাংশন (Inverse Sine Function) ঃ $f(x) = \sin^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস সাইন ফাংশন বলে। [The function $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ which is defined by $f(x) = \sin^{-1}x$ is called trigonometric inverse sine function.]



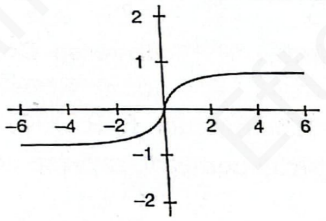
বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ আমরা জানি $a^{-1} = \frac{1}{a}$ কিন্তু $\sin^{-1}x \neq \frac{1}{\sin x}$ একইভাবে অন্য 5টি বিপরীত ফাংশনের জন্য একই নিয়ম প্রযোজ্য।

(ii) ইনভারস্ কোসাইন ফাংশন (Inverse Cosine Function) ঃ $f(x) = \cos^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস

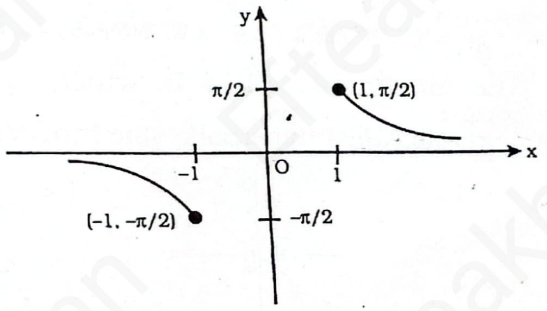
কোসাইন ফাংশন বলে। [The function $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$ which is defined by $f(x) = \cos^{-1}x$ is called trigonometric inverse cosine function.]



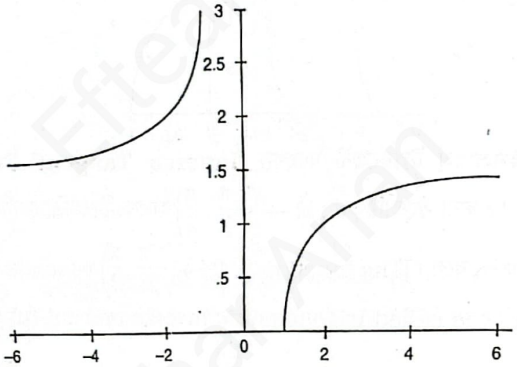
(iii) ইনভারস্ ট্যানজেন্ট ফাংশন (Inverse Tangent Function) ঃ $f(x) = \tan^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ which is defined by $f(x) = \tan^{-1}x$ is called trigonometric inverse tangent function.]



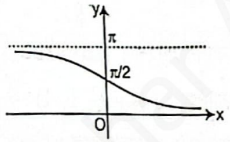
(iv) ইনভারস কোসেকান্ট ফাংশন (Inverse Cosecant Function) ঃ $f(x) = \text{cosec}^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস কোসেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ which is defined by $f(x) = \text{cosec}^{-1}x$ is called trigonometric inverse cosecant function.]



(v) ইনভারস সেকান্ট ফাংশন (Inverse Secant Function) ঃ $f(x) = \sec^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস সেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ which is defined by $f(x) = \sec^{-1}x$ is called trigonometric inverse secant function.]

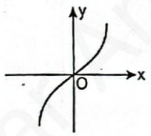


(vi) ইনভারস্ কোট্যানজেন্ট ফাংশন (Inverse Cotangent Function) ঃ $f(x) = \cot^{-1}x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ ফাংশনটিকে ত্রিকোণমিতিক ইনভারস কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : R \to (0, \pi)$ which is defined by $f(x) = \cot^{-1}x$ is called trigonometric inverse cotangent function.]

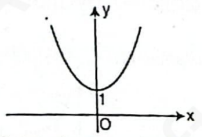


1.B.24. হাইপাবোলিক ফাংশন (Hyperbolic Function) : নিম্নে ছয়টি হাইপারবোলিক ফাংশনের সংজ্ঞা ও লেখচিত্র দেওয়া হইল ঃ

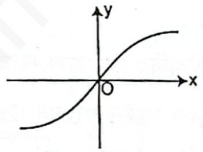
(i) হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন (Hyperbolic sine Function) : $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ is called hyperbolic sine function.]



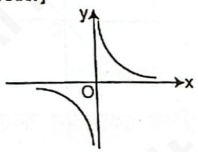
(ii) হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন (Hyperbolic Cosine Function) : $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ which is defined by $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ is called hyperbolic cosine function.]



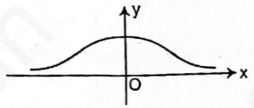
(iii) হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন (Hyperbolic Tangent Function) $f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ is called hyperbolic tangent function.]



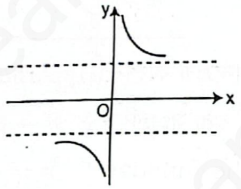
(iv) হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন (Hyperbolic Cosecant Function) : $f(x) = \operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ which is defined by $f(x) = \operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ is called hyperbolic cosecant function.]



(v) হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন (Hyperbolic Secant Function) : $f(x) = \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, 1]$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to (0, 1]$ which is defined by $f(x) = \operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ is called hyperbolic secant function.]



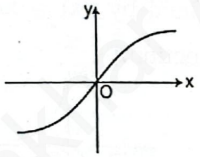
(vi) হাইপারবোলিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন (Hyperbolic Cotangent Function) : $f(x) = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - [-1, 1]$ ফাংশনটিকে হাইপারবোলিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - [-1, 1]$ which is defined by $f(x) = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ is called hyperbolic cotangent function.]



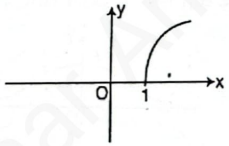
1.B.25. ইনভারস হাইপারবোলিক ফাংশন (Inverse Hyperbolic Function) :

নিম্নে ছয়টি ইনভারস হাইপারবোলিক ফাংশনের সংজ্ঞা এবং লেখচিত্র দেওয়া হইল ঃ

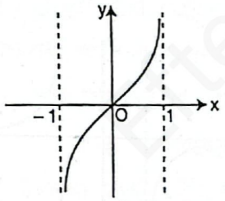
(i) ইনভারস হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন (Inverse Hyperbolic Sine Function) : $f(x) = \sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে ইনভারস হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ is called inverse hyperbolic sine function.]



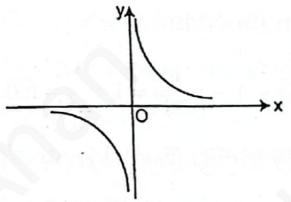
(ii) ইনভারস হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন (Inverse Hyperbolic Cosine Function) : $f(x) = \cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ ফাংশনটিকে ইনভারস হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন বলে। [The function $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ which is defined by $f(x) = \cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ is called inverse hyperbolic cosine function.]



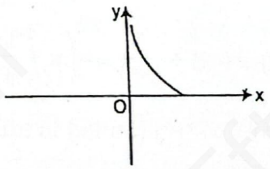
(iii) ইনভারস হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন (Inverse Hyperbolic Tangent Function) : $f(x) = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ ফাংশনটিকে ইনভারস হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ is called inverse hyperbolic tangent function.]



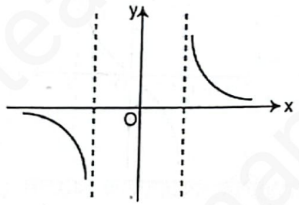
(iv) ইনভাস হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন (Inverse Hyperbolic Cosecant Function) : $f(x) = \operatorname{cosech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ ফাংশনটিকে ইনভাস হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ which is defined by $f(x) = \operatorname{cosech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}}\right)$ is called inverse hyperbolic cosecant function.]



(v) ইনভারস হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন (Inverse Hyperbolic Secant Function) : $f(x) = \operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (0, 1] \to [0, \infty)$ ফাংশনটিকে ইনভারস হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন বলে। [The function $f : (0, 1] \to [0, \infty)$ which is defined by $f(x) = \operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$ is called inverse hyperbolic secant function.]



(vi) ইনভারস হাইপারবোলিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন (Inverse Hyperbolic Cotangent Function) : $f(x) = \coth^{-1}x = \frac{1}{2} ln \left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - [-1, 1] \to \mathbb{R} - \{0\}$ ফাংশনটিকে ইনভারস হাইপারবোলিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে। [The function $f : \mathbb{R} - [-1, 1] \to \mathbb{R} - \{0\}$ which is defined by $f(x) = \coth^{-1}x = \frac{1}{2} ln \left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ is called inverse hyperbolic cotangent function.]



1.B.26. জোড় বা যুগ্ম ফাংশন (Even Function) ঃ

ফাংশন $f(x)$ কে জোড় ফাংশন বলা হইবে যদি $f(-x) = f(x)$ হয়। [If $f(-x) = f(x)$ then $f(x)$ is called even function]

উদাহরণ–34. দেখাও যে $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ একটি জোড় ফাংশন। [Show that $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ is an even function.] **[DUH–1985]**

সমাধান ঃ এখানে $f(-x) = 1 - \frac{1}{(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2} = f(x)$.

সুতরাং $f(x)$ একটি জোড় ফাংশন। [So $f(x)$ is an even function.]

1.B.27. বেজোড় বা অযুগ্ম ফাংশন (Odd Function) ঃ

ফাংশন $f(x)$ কে বেজোড় ফাংশন বলা হইবে যদি $f(-x) = -f(x)$ হয়। [If $f(-x) = -f(x)$ then $f(x)$ is called odd function]

উদাহরণ–35. দেখাও যে $f(x) = x + \frac{1}{x}$ একটি বেজোড় ফাংশন। [Show that $f(x) = x + \frac{1}{x}$ is an odd function.] **[DUH–1985]**

সমাধান ঃ এখানে $f(-x) = (-x) + \frac{1}{(-x)} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

সুতরাং $f(x)$ একটি বেজোড় ফাংশন। [So $f(x)$ is an odd function.]

উপপাদ্য–1. যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ দুইটি জোড় ফাংশন হয় তবে দেখাও যে $f(x) + g(x)$ এবং $f(x)\ g(x)$ জোড় ফাংশন। [If $f(x)$ and $g(x)$ are two even functions then show that $f(x) + g(x)$ and $f(x)\ g(x)$ are even function.]

প্রমাণ ঃ ধরি $h(x) = f(x) + g(x)$.

যেহেতু $f(x)$ এবং $g(x)$ জোড় ফাংশন সেহেতু $f(-x) = f(x)$ এবং $g(-x) = g(x)$.

তাহা হইলে $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = h(x)$

সুতরাং $h(x)$ একটি জোড় ফাংশন। অর্থাৎ $f(x) + g(x)$ একটি জোড় ফাংশন।

আবার ধরি $p(x) = f(x)\ g(x)$. তাহা হইলে $p(-x) = f(-x)\ g(-x) = f(x)\ g(x) = p(x)$

যেহেতু $f(x)$ এবং $g(x)$ জোড় ফাংশন।

সুতরাং $f(x)$ এবং $g(x)$ দুইটি জোড় ফাংশন হইলে $f(x) + g(x)$ এবং $f(x)\ g(x)$ এর প্রত্যেকটি জোড় ফাংশন।

উপপাদ্য–2. যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ বেজোড় ফাংশন হয়, তবে দেখাও যে

(i) $f(x) + g(x)$ বেজোড় ফাংশন (ii) $f(x)\ g(x)$ জোড় ফাংশন। [If $f(x)$ and $g(x)$ are odd functions then show that (i) $f(x) + g(x)$ is an odd function (ii) $f(x)\ g(x)$ is an even function.]

প্রমাণ ঃ যেহেতু $f(x)$ এবং $g(x)$ বেজোড় ফাংশন সেহেতু

$$f(-x) = -f(x) \text{ এবং } g(-x) = -g(x)$$

(i) ধরি $h(x) = f(x) + g(x)$. তাহা হইলে $h(-x) = f(-x) + g(-x)$

$$= -\{f(x) + g(x)\} = -h(x)$$

$\Rightarrow h(x)$ একটি বেজোড় ফাংশন অর্থাৎ $f(x) + g(x)$ একটি বেজোড় ফাংশন।

(ii) ধরি $p(x) = f(x)\ g(x)$. তাহা হইলে $p(-x) = f(-x)\ g(-x)$

$= \{-f(x)\}\{-g(x)\} = f(x)\ g(x) = p(x) \Rightarrow p(x)$ একটি জোড় ফাংশন

অর্থাৎ $f(x)\ g(x)$ একটি জোড় ফাংশন।

উপপাদ্য–3. যদি $f(x)$ জোড় ফাংশন এবং $g(x)$ বেজোড় ফাংশন হয়, তবে দেখাও যে $f(x)\ g(x)$ একটি বেজোড় ফাংশন। [If $f(x)$ is an even function and $g(x)$ is an odd function then show that $f(x)\ g(x)$ is an odd function.]

প্রমাণ ঃ ধরি $h(x) = f(x)\ g(x)$. তাহা হইলে $h(-x) = f(-x)\ g(-x)$

$$= -f(x)\ g(x) = -h(x)$$

[যেহেতু $f(x)$ জোড় ফাংশন এবং $g(x)$ বেজোড় ফাংশন।]

$\Rightarrow h(x)$ একটি বেজোড় ফাংশন অর্থাৎ $f(x)\ g(x)$ একটি বেজোড় ফাংশন।

উপপাদ্য–4. যদি $\forall x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত হয় তবে দেখাও যে $f(x) + f(-x)$ জোড় ফাংশন এবং $f(x) - f(-x)$ বেজোড় ফাংশন। [If $f(x)$ is defined for $\forall x \in \mathbb{R}$ then show that $f(x) + f(-x)$ is an even function and $f(x) - f(-x)$ is an odd function.]

প্রমাণ ঃ ধরি $h(x) = f(x) + f(-x)$.

তাহা হইলে $h(-x) = f(-x) + f(x) = h(x)$

$\Rightarrow h(x)$ একটি জোড় ফাংশন

অর্থাৎ $f(x) + f(-x)$ একটি জোড় ফাংশন

আবার ধরি $p(x) = f(x) - f(-x)$

তাহা হইলে $p(-x) = f(-x) - f(x) = -\{f(x) - f(-x)\} = -p(x)$

$\Rightarrow p(x)$ একটি বেজোড় ফাংশন

অর্থাৎ $f(x) - f(-x)$ একটি বেজোড় ফাংশন।

1.B.28. পর্যায়ী ফাংশন (Periodic Function) ঃ **[RUH–1986]**

একটি ফাংশন $f(x)$ কে উহার ডোমেন D_f এ একটি পর্যায়ী বা পর্যাবৃত্ত ফাংশন বলে যদি একটি যোগবোধক সংখ্যা T বিদ্যমান থাকে যেন $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D_f$ হয়।

এখানে T এর সর্বনিম্ন মানকে পর্যায় বলে।

[A function $f(x)$ is called periodic function in its domain D_f if a positive number T exists such that $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Here the lowest value of T is called period.]

উদাহরণ–36. দেখাও যে $f(x) = \sin x$ একটি পর্যায়ী ফাংশন যাহার পর্যায় 2π. [Show that $f(x) = \sin x$ is a periodic function whose period is 2π.]

সমাধান ঃ এখানে $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$

সুতরাং $f(x)$ একটি 2π পর্যায়ের পর্যায়ী ফাংশন।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ ইহা স্পষ্ট যে

$$\sin x = \sin(2\pi + x) = \sin(4\pi + x) = \sin(6\pi + x) = \cdots$$

অর্থাৎ $f(x) = f(x + 2\pi) = f(x + 4\pi) = f(x + 6\pi) = \cdots$

এখানে $2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots$ এর মধ্যে সবচেয়ে ছোটটিকে $f(x)$ এর পর্যায় বোঝায় অর্থাৎ ত্ত ফাংশনটির পর্যায় 2π.

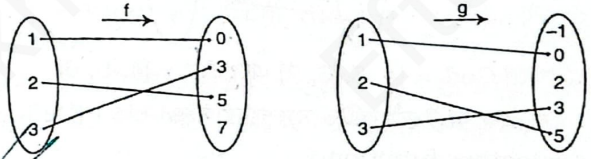
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

1.B.1. সমান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by equal functions?)

Ans : যদি $f : A \to B$ এবং $g : E \to F$ ফাংশনদ্বয়ের ক্ষেত্রে $D_f = D_g$ এবং $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$ (বা $\forall x \in E$) হয়, তবে f ও g কে সমান ফাংশন বলা হয়। অর্থাৎ $f = g$.

1.B.2. সমান ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give the example of equal functions.)

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত f ও g ফাংশনদ্বয় পরস্পর সমান ফাংশন ঃ

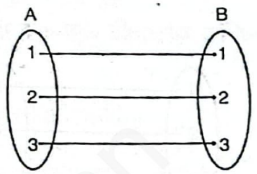


1.B.3. অভেদ ফাংশন কাকে বলে? (What is identity function?) **[NUH–2010]**

Ans : $f(x) = x$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to A$ ফাংশনকে অভেদ ফাংশন বলে।

1.B.4. অভেদ ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Given an example of identity function.)

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি অভেদ ফাংশন ঃ

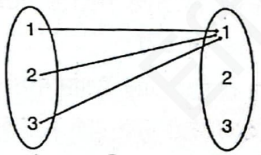


1.B.5. ধ্রুবক ফাংশন কাকে বলে? (What is constant function?)

Ans : কোন ফাংশনের রেঞ্জ R_f একউপাদানী সেট হইলে ফাংশনটিকে ধ্রুবক ফাংশন বলে।

1.B.6. ধ্রুবক ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give an example of constant function.)

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি ধ্রুবক ফাংশন ঃ



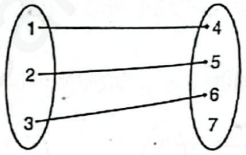
অথবা ঃ $f(x) = 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি ধ্রুবক ফাংশন।

1.B.7. ইনটু ফাংশন কাকে বলে? (What is into function?)

Ans : কোন ফাংশনের কোডোমেন ও রেঞ্জ সমান না হইলে উহাকে ইনটু ফাংশন বলে।

1.B.8. ইনটু ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give an example of into function.)

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি ইনটু ফাংশন ঃ



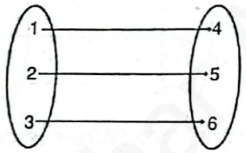
এখানে $\text{Cod}_f = \{4, 5, 6, 7\}$ এবং রেঞ্জ $= \{4, 5, 6\}$.

1.B.9. এক-এক বা ইনজেকটিভ ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define one-one or injective function.)

Ans : $f : A \to B$ ফাংশনটিকে এক-এক বা ইনজেকটিভ ফাংশন বলা হইবে যদি $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ অথবা $f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow a_1 \neq a_2$ হয়, যেখানে $a_1, a_2 \in A$.

1.B.10. এক-এক ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give an example of one-one function.)

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি এক-এক ফাংশন ঃ



অথবা ঃ $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

1.B.11. মনে করি $f : A \to B$ একটি ফাংশন, যেখানে A ও B সসীম সেট এবং $n(A) > n(B)$. ফাংশনটি কি এক-এক? (Let $f : A \to A$ is a function, where A and B are finite sets and $n(A) > n(B)$. Is the function one-one?)

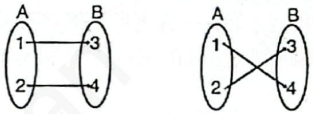
Ans : কোন ফাংশনের ডোমেন এর উপাদান সংখ্যা কোডোমেন এর উপাদান সংখ্যার চেয়ে বেশী হইলে উহা এক-এক হইতে পারে না। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক-এক নয়।

1.B.12. মনে করি A ও B দুইটি সসীম সেট যেখানে $n(A) = r$ এবং $n(B) = s$ $(r \leq s)$। A হইতে B তে কয়টি এক-এক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়? (Let A and B are finite sets where $n(A) = r$ and $n(B) = s$ $(r \leq s)$. How many are one-one functions defined from A to B?)

Ans : $n(A) = r$ এবং $n(B) = s$ $(r \leq s)$ হইলে A সেট হইতে B সেটে ${}^sp_r$ সংখ্যক এক-এক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়।

1.B.13. $A = \{1, 2\}$ সেট হইতে $B = \{3, 4\}$ সেটে সম্ভাব্য সকল এক-এক ফাংশনগুলি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও। (Show by figure all possible one-one functions from the set $A = \{1, 2\}$ to the set $B = \{3, 4\}$.)

Ans : $A = \{1, 2\}$ সেট হইতে $B = \{3, 4\}$ সেট ${}^2p_2 = 2! = 2$টি এক-এক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে ইহা দেখানো হইল ঃ

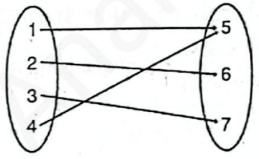


1.B.14. অনটু বা সার্বিক বা সর্বগ্রাহী বা সারজেকটিভ ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define onto or surjective function.)

Ans : $f : A \to B$ ফাংশনটিকে অনটু বা সার্বিক ফাংশন বলা হইবে যদি $f(A) = B$ হয় অর্থাৎ রেঞ্জ ও কোডোমেন সমান হয়।

1.B.15. অনটু ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give an example of onto function.)

Ans : নিম্নে চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি অনটু ঃ



অথবা, $f(x) = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি অনটু ফাংশন।

1.B.16. যদি $f : A \to B$ একটি ফাংশন, যেখানে A ও B সসীম সেট এবং $n(A) < n(B)$. ফাংশনটি কি অনটু? (Let $f : A \to B$ is a function, where A and B are finite sets and $n(A) < n(B)$. Is the function onto?)

Ans : কোন ফাংশনের কোডোমেন এর উপাদান সংখ্যা ডোমেন এর উপাদান সংখ্যার চেয়ে বেশী হইলে উহা অনটু হইতে পারে না।

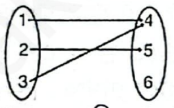
সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি অনটু নয়।

1.B.17. মেনি ওয়ান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by many one function?)

Ans : কোন ফাংশন এক-এক না হইলে উহা মেনি ওয়ান ফাংশন হইবে।

1.B.18. মেনি ওয়ান ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give an example of many one function.)

Ans : নিম্নের চিত্র দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি মেনি ওয়ান ফাংশন ঃ



অথবা, $f(x) = |x|$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ফাংশনটি মেনি ওয়ান ফাংশন।

1.B.19. বিপরীত ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by inverse function?)

Ans : $f : A \to B$ এবং $g : B \to A$ দুইটি ফাংশন হইলে g কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হইবে যদি $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ হয় যেখানে $f(x) \in B$ এবং $g(x) \in A$.

1.B.20. ধরি $f : A \to B$ একটি যে কোন ফাংশন। f^{-1} কি বিদ্যমান? (Let $f : A \to B$ is any function. Does f^{-1} exist?)

Ans : সকল ফাংশনের বিপরীত ফাংশন নাই। যে সকল ফাংশন এক-এক এবং অনটু অর্থাৎ বাইজেকটিভ (bijective) কেবলমাত্র ঐ সকল ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি বহিজেকটিভ ফাংশন হইলে f^{-1} বিদ্যমান অন্যথায় f^{-1} বিদ্যমান নয়।

1.B.21. সাংখিক মানের ফাংশন বা পরম মান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by absolute value function?)

Ans : $y = |x| \begin{cases} x \text{ যখন } x \geq 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$ কে সাংখিক মানের ফাংশন বা পরম মান ফাংশন বলে।

1.B.22. সাংখিক মানের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? (What are the domain and range of absolute value function?)

Ans : $y = |x|$ সাংখিক মানের ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$.

1.B.23. সিগনাম ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by signum function?)

Ans : $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ যখন } x < 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \\ 1 \text{ যখন } x > 0 \end{cases}$ কে সিগনাম ফাংশন বলে।

1.B.24. সিগনাম ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? (What are the domain and range of signum function?)

1.B.25. সাংখিক মানের ফাংশন ও সিগনাম ফাংশনের মধ্যে সম্পর্ক লিখ। (Write the relation between absolute value function and signum function.)

অথবা ঃ $|x|$ ও $\operatorname{sgn} x$ এর মধ্যে সম্পর্ক লিখ। (Write relation between $|x|$ and $\operatorname{sgn} x$.)

Ans : $|x|$ ও $\operatorname{sgn} x$ এর মধ্যে সম্পর্ক $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$

1.B.26. সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখিক ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by greatest integer function?)

Ans : যদি $[x] = n$ যেখানে $n \in \mathbb{Z}$ এবং $n \leq x < n + 1$ হয় তবে $y = [x]$ কে সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখিক ফাংশন বলে।

অথবা ঃ $y = [x]$ কে সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখিক ফাংশন বলা হইবে যদি $[x]$ দ্বারা x এর অনুর্ধ্ব বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা বোঝায় অর্থাৎ $[x]$ এইরূপ পূর্ণসংখ্যা যেখানে $x - 1 < [x] \leq x$.

1.B.27. সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখ্যিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত?

Ans : সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখিক ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{Z}$.

1.B.28. $\left[\frac{3}{2}\right]$ এর মান কত? [What is the value of $\left[\frac{3}{2}\right]$?]

Ans : $\left[\frac{3}{2}\right]$ এর মান 1.

1.B.29. $\left[-\frac{3}{2}\right]$ এর মান কত? [What is the value of $\left[-\frac{3}{2}\right]$?]

Ans : $\left[-\frac{3}{2}\right]$ এর মান -2.

1.B.30. সূচকীয় ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define exponential function.)

Ans : যদি $a \in (0, \infty) - \{1\}$ হয়, তবে $f(x) = a^x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ কে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে সূচকীয় ফাংশন বলে।

1.B.31. লগারিদিমিক ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define logarithmic function.)

Ans : যদি $a \in (0, \infty) - \{1\}$ হয় তবে $f(x) = \log_a x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ কে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে লগারিদিমিক ফাংশন বলা হয়।

1.B.32. ত্রিকোণমিতিক সাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric sine functon?)

Ans : $f(x) = \sin x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ কে ত্রিকোণমিতিক সাইন ফাংশন বলে।

1.B.33. ত্রিকোণমিতিক কোসাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric cosine function?)

Ans : $f(x) = \cos x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ কে ত্রিকোণমিতিক কোসাইন ফাংশন বলে।

1.B.34. ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric tangent function?)

Ans : $f(x) = \tan x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\} \to \mathbb{R}$ কে ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.35. ত্রিকোণমিতিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric cotangent function?)

Ans : $f(x) = \cot x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\} \to \mathbb{R}$ কে ত্রিকোণমিতিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.36. ত্রিকোণমিতিক সেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric secant function.)

Ans : $f(x) = \sec x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$ কে ত্রিকোণমিতিক সেকান্ট ফাংশন বলে যেখানে $A = \mathbb{R} - \left\{\cdots \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$ এবং $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$.

1.B.37. ত্রিকোণমিতিক কোসেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is trigonometric cosecant function?)

Ans : $f(x) = \text{cosec } x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$ কে ত্রিকোণমিতিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে যেখানে $A = \mathbb{R} - \{\cdots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$ এবং $B = \mathbb{R} - (-1, 1)$.

1.B.38. ইনভারস্ সাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse sine function?)

Ans : $f(x) = \sin^{-1} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ কে ইনভারস্ সাইন ফাংশন বলে।

1.B.39. ইনভারস্ কোসাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse cosine function?)

Ans : $f(x) = \cos^{-1} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$ কে ইনভারস্ কোসাইন ফাংশন বলে।

1.B.40. ইনভারস্ ট্যানজেন্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse tangent function?)

Ans : $f(x) = \tan^{-1} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ কে ইনভারস্ ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.41. ইনভারস্ কোট্যানজেন্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse cotangent function?)

Ans : $f(x) = \cot^{-1} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ কে ইনভারস্ কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.42. ইনভারস্ সেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse secant function?)

Ans : $f(x) = \sec^{-1} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ কে ইনভারস্ সেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.43. ইনভারস্ কোসেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is cosecant function?)

Ans : $f(x) = \text{cosec}^{-1} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ কে ইনভারস্ কোসেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.44. হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic sine function?)

Ans : $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন বলে।

1.B.45. হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic cosine function?)

Ans : $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ কে হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন বলে।

1.B.46. হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic tangent function?)

Ans : $f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে হাইপারবোলিক ট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.47. হাইপারবোলিক কোট্যানজ্যান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic cotangent function?)

Ans : $f(x) = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - [-1, 1]$ কে হাইপারবোলিক কোট্যানজেন্ট ফাংশন বলে।

1.B.48. হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic secant function?)

Ans : $f(x) = \text{sech}x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to (0, 1]$ কে হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.49. হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is hyperbolic cosecant function?)

Ans : $f(x) = \text{cosech}x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ কে হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.50. ইনভারস হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse hyperbolic sine function?)

Ans : $f(x) = \sinh^{-1} x = ln\,(x + \sqrt{1 + x^2})$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক সাইন ফাংশন বলে।

1.B.51. ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse hyperbolic cosine function?)

Ans : $f(x) = \cosh^{-1} x = ln\,(x + \sqrt{x^2 - 1})$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোসাইন ফাংশন বলে।

1.B.52. ইনভারস্ হাইপারবোলিক ট্যানজ্যান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse hyperbolic tangent function?)

Ans : $f(x) = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক ট্যানজ্যান্ট ফাংশন বলে।

1.B.53. ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোট্যানজ্যান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse hyperbolic cotangent function?)

Ans : $f(x) = \coth^{-1} x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - [-1, 1] \to \mathbb{R} - \{0\}$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোট্যানজ্যান্ট ফাংশন বলে।

1.B.54. ইনভারস্ হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is inverse hyperbolic secant function?)

Ans : $f(x) = \text{sech}^{-1} x = ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : (0, 1] \to [0, \infty)$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক সেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.55. ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন কাকে বলে? (What is the inverse hyperbolic cosecant function?)

Ans : $f(x) = \text{cosech}^{-1} x = ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ কে ইনভারস্ হাইপারবোলিক কোসেকান্ট ফাংশন বলে।

1.B.56. ফাংশনের লেখচিত্র হইতে এক-এক ফাংশনের ধারণা দাও। (Give the concept of one-one function from graph of the function.)

Ans : $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্রকে x অক্ষ বা x অক্ষের সমান্তরাল প্রত্যেকটি সরলরেখা একাধিক বিন্দুতে ছেদ না করিলে ফাংশনটি এক-এক হইবে।

1.B.57. ফাংশনের লেখচিত্র হইতে অনটু ফাংশনের ধারণা দাও। (Give the concept of onto function from graph of the function.)

Ans : $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্রকে x অক্ষ অথবা x অক্ষের সমান্তরাল প্রত্যেকটি সরলরেখা কমপক্ষে একটি বিন্দুতে ছেদ করিলে ফাংশনটি অনটু হইবে।

1.B.58. বহুপদী ফাংশন কি? (What is polynomial function?)

Ans : যদি $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ এবং $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ হয় তবে $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ কে x এর বহুপদী ফাংশন বলে।

1.B.59. মূলদীয় বহুপদী ফাংশন কি? (What is rational polynomial function?)

Ans : যদি $g(x)$ ও $h(x)$ উভয়য়ে বহুপদী ফাংশন হয় এবং $h(x) \neq 0$, তবে $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ কে x এর মূলদীয় বহুপদী ফাংশন বলে।

1.B.60. সীমাবদ্ধ ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define bounded function.)

Ans : যদি দুইটি বাস্তব সংখ্যা m ও M বিদ্যমান থাকে যেন $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\, x \in (a, b)$ হয়, যেখানে (a, b) ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন সংজ্ঞায়িত ও ইহার মান বিদ্যমান, তবে $f(x)$ কে সীমাবদ্ধ ফাংশন বলে।

1.B.61. বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by increasing function?)

Ans : যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ এর মানও বৃদ্ধি পায় তবে $f(x)$ কে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন বলা হয়।

1.B.62. হ্রাসকৃত ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by decreasing function?)

Ans : যদি x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে f(x) এর মান হ্রাস পায় তবে f(x) কে হ্রাসকৃত ফাংশন বলা হয়।

1.B.63. বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ও হ্রাসকৃত ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give the examples of increasing and decreasing functions.)

Ans : f(x) = 1 + x একটি বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন এবং f(x) = 1 − x একটি হ্রাসকৃত ফাংশন।

1.B.64. জোড় বা যুগ্ম ফাংশন কাকে বলে? (What is even function?) **[NUH–2010]**

Ans : যদি f(x) = f(− x) হয়, তবে f(x) ফাংশনকে জোড় ফাংশন বলে।

1.B.65. বেজোড় বা অযুগ্ম ফাংশন কাকে বলে? (What is odd function?) **[NUH–2010]**

Ans : যদি f(x) = − f(− x) হয়, তবে f(x) ফাংশনকে বেজোড় ফাংশন বলে।

1.B.66. জোড় ও বেজোড় ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give the examples of even and odd functions.) **[NUH–2010]**

Ans : f(x) = cos x একটি জোড় ফাংশন এবং f(x) = sin x একটি বেজোড় ফাংশন।

1.B.67. পর্যায়ী ফাংশন ও পর্যায় বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by the periodic function and period?)

Ans : যদি $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D_f$ হয় তবে f(x) ফাংশনকে পর্যায়ী ফাংশন এবং T এর সর্বনিম্ন মানকে পর্যায় বলে।

1.B.68. পর্যায়ী ফাংশনের উদাহরণ দাও। [Give an example of a periodic function.]

Ans : f(x) = tan x একটি পর্যায়ী ফাংশন যাহার পর্যায়কাল π.

1.B.69. গুণোজ ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by composite function?)

Ans : ধরি $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ দুইটি ফাংশন যেখানে $R_f = B = D_g$. তাহা হইলে f ও g এর গুণোজ ফাংশনকে $g \circ f : A \to C$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় যাহা $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

1.B.70. $f(x) = x^2 + 1$ এবং $g(x) = x^3$ হইলে $fg(2)$ ও $f \circ g(2)$ কত? (If $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x^3$ then, what are $fg(2)$ and $f \circ g(2)$?)

Ans : $fg(2) = f(2).g(2) = 5.8 = 40$ এবং $f \circ g(2) = f(g(2)) = f(8) = 65$.

EXERCISE–1(B)

1. দেখাও যে নিম্নলিখিত f ফাংশনগুলো এক-এক এবং অনটু [Show that following functions f are one-one and onto.]

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = x$ দ্বারা

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = ax + b$ দ্বারা যেখানে $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

(iv) $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ দ্বারা

(v) $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা

(vi) $f : [0, 2] \to [0, 2]$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ দ্বারা

(vii) $f : [0, \infty) \to [3, \infty)$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^2 + 2x + 3$ দ্বারা

(viii) $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 3}$ দ্বারা

(ix) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{যখন } x \neq 5 \\ 10 & \text{যখন } x = 5 \end{cases}$

(x) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞায়িত $f(x) = x^3$ দ্বারা।

2. দেখাও যে ঃ

(i) $f(x) = x + 1$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি এক-এক এবং অনটু।

(ii) $f(x) = x^2$ সূত্রদ্বারা বর্ণিত $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ফাংশনটি এক-এক কিন্তু অনটু নয়।

(iii) $f(x) = |x|$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ফাংশনটি এক-এক নয় কিন্তু অনটু।

(iv) $f(x) = x^2 + 1$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি এক-একও নয় এবং অনটুও নয়।

(v) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 3}$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ ফাংশনটি এক-এক এবং অনটু।

3. দেখাও যে ঃ

(i) $f(x) = x - 1$ সূত্রদ্বারা বর্ণিত $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ ফাংশনটি এক-এক এবং অনটু।

(ii) $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 4, 9\}$ ফাংশনটি এক-এক নয় কিন্তু অনটু।

(iii) $f(x) = x^3$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{-8, -1, 0, 1, 8\}$ ফাংশনটি এক-এক এবং অনটু।

(iv) $f(x) = x^2$ সূত্র দ্বারা বর্ণিত $f : \{-3, -2, -1, 0, 1\} \to \{0, 1, 4, 9, 16\}$ ফাংশনটি এক-একও নয় অনটুও নয়।

4. যদি $f(x) = |x - 2|$ হয় তবে দেখাও যে

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{যখন } x \geq 2 \\ 2-x & \text{যখন } x < 2 \end{cases}$$

5. দেখাও যে $|x| = x \operatorname{sgn} x$

6. যদি $f(x) = [x]$ হয় তবে দেখাও যে $f(7/2) = 3$, $f(-5/2) = -3$, $f(2\pi) = 6$ $f(4e) = 10$, $f(\sqrt{11}) = 3$, $f(5 - \sqrt{2}) = 3$

7. যদি $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x + 5$ হয় তবে দেখাও যে $(f + g)x = x^2 + x + 5$ এবং $(f - g)x = x^2 - x - 5$ আরো $(f + g)(2)$ এবং $(f - g)(-3)$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $(f + g)(2) = 11$ এবং $(f - g)(-3) = 7$

8. যদি $f(x) = |x|$ এবং $g(x) = \operatorname{sgn} x$ হয় তবে $(f + g)(-3)$ এবং $(f - g)(4)$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $(f + g)(-3) = 2$ এবং $(f - g)(4) = 3$

9. যদি $f(x) = |x|$ এবং $g(x) = x^2$ হয় তবে $(fg)(3)$, $(f/g)(-2)$ এবং $(g/f)(0)$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $(fg)(3) = 27$, $(f/g)(-2) = \frac{1}{2}$ এবং $(g/f)(0)$ সংজ্ঞায়িত নয়।

10. যদি $f = \{(0, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 2)\}$ এবং $g = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$ হয় তবে $f \circ g$ এবং $g \circ f$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $f \circ g = \{(0, 2), (1, 0), (2, 3), (3, 1)\}$ এবং

$g \circ f = \{(0, 2), (1, 0), (2, 3), (3, 1)\}$

11. যদি $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x^2 - x - 2$ হয় তবে দেখাও যে

$(f \circ g)(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ এবং $(g \circ f)(x) = x^4 - x^2 - 2$

12. যদি $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$ (ii) $(f \circ f \circ f)(x) = \sqrt[8]{x}$ এবং (iii) $(f \circ f \circ f \circ \cdots \infty)(x) = 1$

13. যদি $f(x) = x^3 + 3$ হয় তবে দেখাও যে $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 3}$

14. যদি $f(x) = x^4$ হয় তবে দেখাও যে f^{-1} বিদ্যমান নয়।

15. দেখাও যে $f(x) + f(-x)$ একটি জোড় ফাংশন এবং $f(x) - f(-x)$ একটি বেজোড় ফাংশন।



———×———

Chapter–1(C)
ফাংশনের লেখচিত্র
GRAPHS OF FUNCTIONS

1.C.1. কোন সমতলে কোন ফাংশনকে জ্যামিতিকভাবে স্থাপন করা গেলে ঐ ফাংশনকে দেখা যায় বা চেনা যায়। ফাংশনের জ্যামিতিকভাবে এই স্থাপনকে ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করা হইয়াছে বলা হয়।

সংজ্ঞা ঃ ধরি $f : A \to B$ একটি বাস্তব ফাংশন। তাহা হইলে A ডোমেনে এবং xy সমতলে $f = \{(x, f(x))\}$ ফাংশনের লেখচিত্র এবং $y = f(x)$ সূত্রের লেখচিত্র একই হইবে।

সংজ্ঞানুসারে f ফাংশনের লেখচিত্র এবং $y = f(x)$ ..... (1) সমীকরণ বা সূত্রের লেখচিত্র একই। সুতরাং অনির্ভরশীল চলক $x \in A$ এর কিছু কিছু বিন্দুর জন্য (1) এর সাহায্যে নির্ভরশীল চলক y এর মান নির্ণয় করিয়া (x, y) আকারের বিন্দুসমূহকে xy সমতলে স্থাপন করিয়া প্রয়োজন অনুযায়ী সরল বা বক্র (মসৃন) ভাবে সংযোগ করিলে (1) এর অর্থাৎ f এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ (1) রৈখিক আকারের সূত্র হইলে কেবলমাত্র উহার উপর দুইটি বিন্দু নির্ণয় করিয়া সরলভাবে সংযোগ করিলে f এর লেখচিত্র পাওয়া যায়। অন্যথায় ফাংশনের লেখচিত্র পাইতে হইলে তিন বা ততোধিক বিন্দুর প্রয়োজন হয়।

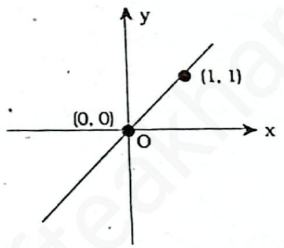
উদাহরণ–1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে f এর লেখচিত্র অংকন কর। [The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = x$. then sketch the graph of f.]

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = x$

যখন $x = 0$ তখন $y = 0$

আবার, যখন $x = 1$ তখন $y = 1$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি (0, 0) ও (1, 1) বিন্দুগামী একটি সরলরেখা হইবে।



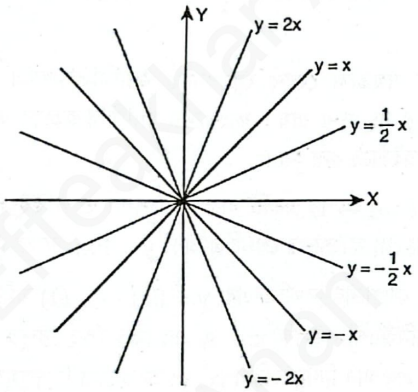
উদাহরণ–2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = mx$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে $m = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ এর জন্য f এর লেখচিত্র অংকন কর।

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = mx$

$m = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ এর জন্য $y = \pm\frac{1}{2}x$, $y = \pm x$, $y = \pm 2x$

এখন 1(a) এর ন্যায় $y = \frac{1}{2}x, y = -\frac{1}{2}x, y = x, y = -x, y = 2x$

এবং $y = -2x$ মূলবিন্দুগামী সরলরেখাগুলি অংকন করি ঃ

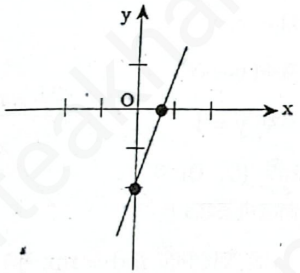


উদাহরণ–3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x - 2$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে f এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান ঃ এখানে $D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = \mathbb{R}$. প্রদত্ত সূত্রটি রৈখিক সূত্র। সুতরাং ফাংশনটির লেখচিত্র নির্ণয় করিতে $y = f(x) = 3x - 2$ সূত্রের উপর দুইটি বিন্দু জানা প্রয়োজন। এখন ঐ সূত্রের সাহায্যে x এবং y এর মানের

x	0	2/3
y	–2	0

তালিকাটি প্রস্তুত করি এবং এই তালিকার (0, –2) এবং (2/3, 0) বিন্দু দুইটি xy সমতলে স্থাপন এবং সংযোগ করিয়া বর্ধিত করিলে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্রটি পাওয়া যাইবে। নিম্নে তাহা প্রদত্ত হইল।

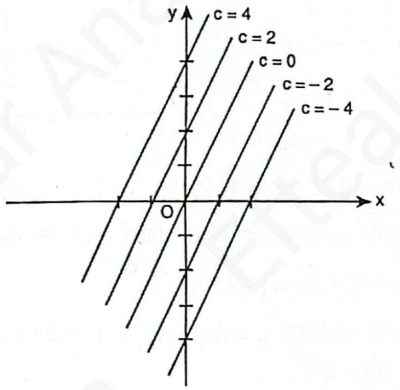


উদাহরণ–4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x + c$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $c = 0, \pm 2, \pm 4$ এর জন্য f এর লেখচিত্র অংকন কর।

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = 3x + c$

$c = 0, \pm 2, \pm 4$ এর জন্য $y = 3x, y = 3x \pm 2, y = 3x \pm 4$

এখন 1(c) এর ন্যায় $y = 3x, y = 3x - 2, y = 3x + 2, y = 3x - 4, y = 3x + 4$ সরলরেখাগুলি অংকন করি ঃ



উদাহরণ–5. $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x + 2$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে f এর লেখ নির্ণয় করে লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান ঃ এখানে $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

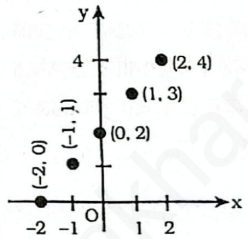
আবার এখানে $f(-2) = -2 + 2 = 0$,

$f(-1) = -1 + 2 = 1$

$f(0) = 0 + 2 = 2$

$f(1) = 1 + 2 = 3$

$f(2) = 2 + 2 = 4$.



সুতরাং f এর লেখ $f^* = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

এখন লেখ f এর উপাদান বা বিন্দুসমূহ xy সমতলে স্থাপন করিলে লেখচিত্র পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ–6. ধরি $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ এবং $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ ফাংশন দুইটি একই সূত্র $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে উভয় ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান ঃ (প্রথম অংশ) ঃ এখানে $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. $f(x) = x^2 + 1$

সূত্র ব্যবহার করে আমরা পাই

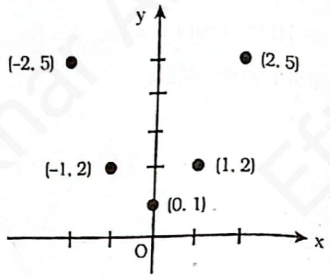
$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$f(1) = 1^2 + 1 = 2$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$



অতএব f এর লেখ = {(–2, 5), (–1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)}.

এখন f এর বিন্দুসমূহ xy সমতলে স্থাপন করিলে f এর লেখচিত্রটি পাওয়া যাইবে।

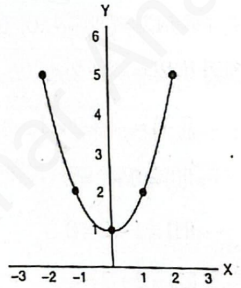
(দ্বিতীয় অংশ) ঃ এখানে $D_f = [-2, 2]$.

এখন $-2 \le x \le 2$ ব্যবধিতে $y = f(x) = x^2 + 1$ সূত্রের সাহায্যে x এবং y এর কিছু মানের একটি তালিকা প্রস্তুত করি।

$(-2 \le x < 2)$

x	–2	–1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

এখন (– 2, 5), (– 1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5) বিন্দু সমূহ xy সমতলে স্থাপন করিয়া মসৃন ভাবে বক্ররেখার সাহায্যে সংযোগ করিলে প্রদত্ত f ফাংশনটির লেখচিত্র পাওয়া যাইবে। f এর লেখচিত্রটি প্রদত্ত হইল।



উদাহরণ–7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + a$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে $a = 0, \pm 2$ এর জন্য f এর লেখচিত্র অংকন কর।

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = x^2 + a$

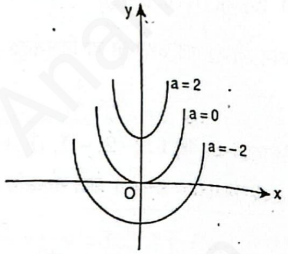
$a = 0, \pm 2$ এর জন্য

$y = x^2$

$y = x^2 + 2$

$y = x^2 - 2$

এখন উপরের উদাহরণের ন্যায় লেখচিত্র অংকন করা হইল ঃ



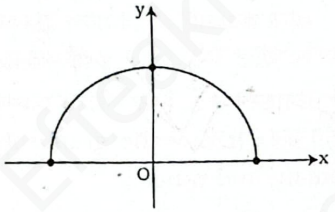
উদাহরণ–8. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে f এর লেখচিত্র অংকন কর। [The function $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Then draw the graph of f.]

সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

যখন $x = 0$ তখন $y = 1$

আবার, যখন $x = \pm 1$ তখন $y = 0$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি (– 1, 0), (0, 1), (1, 0) বিন্দুগামী একটি অর্ধবৃত্ত হইবে।



উদাহরণ–9. $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $a = 1, 2, 3, 4$ এর জন্য f এর লেখচিত্র অংকন কর।

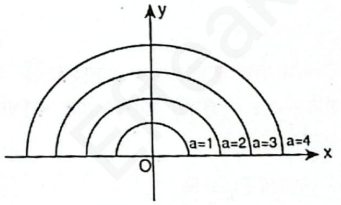
সমাধান ঃ ধরি $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$

$a = 1, 2, 3, 4$ এর জন্য

$y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = \sqrt{4 - x^2}$,

$y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = \sqrt{16 - x^2}$

এখন উদা–8 এর ন্যায় লেখচিত্র অংকন করা হইল।



উদাহরণ–10. নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph of the following function f and find domain and range.]

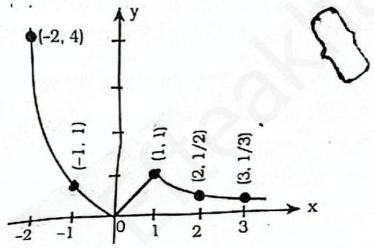
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

[NUH–2006, 2010(Old), NUH(NM)–2010, DUH–1989]

সমাধান **(শর্ত–1)** ঃ $x < 0$ অর্থাৎ $(-\infty, 0)$ ব্যবধিতে $y = f(x) = x^2$ একটি (0, 0) প্রান্ত বিন্দুহীন এবং (–1, 1), (–2, 4) ··· বিন্দুসমুহগামী একটি প্যারাবোলার অংশ বিশেষের সমীকরণ নির্দেশ করে।

(শর্ত–2) ঃ $0 \le x \le 1$ ব্যবধিতে $y = f(x) = x$ একটি (0, 0) এবং (1, 1) প্রান্তবিন্দুধারী রেখাংশের সমীকরণ নির্দেশ করে।

(শর্ত–3) ঃ $x > 1$ অর্থাৎ $(1, \infty)$ ব্যবধিতে $y = f(x) = 1/x$ একটি (1, 1) বিন্দুহীন এবং (2, 1/2), (3, 1/3), ··· বিন্দুসমুহগামী একটি আয়তাকার হাইপারবোলার একখন্ডের অংশ বিশেষের সমীকরণ নির্দেশ করে।



এখন আয়তাকার স্থানাঙ্কের xy সমতলে উপরে আলোচিত বিন্দুসমূহ স্থাপন করে শর্ত 1 ও শর্ত 3 এর জন্য বক্রভাবে এবং শর্ত 2 এর জন্য সরলভাবে সংযোগ করিয়া f এর যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তাহা প্রদত্ত হইল।

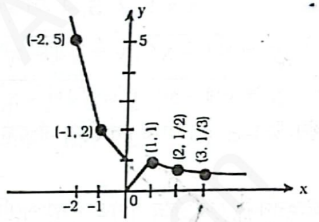
প্রদত্ত ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। সুতরাং $D_f = \mathbb{R}$. আবার লেখচিত্র হইতে ইহা স্পষ্ট যে y এর মান $[0, \infty)$ ব্যবধিতে বিদ্যমান। সুতরাং $R_f = [0, \infty)$.

উদাহরণ–11. নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph of the following function f and find domain and range.]

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{যখন} \quad x < 0 \\ x & \text{যখন} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন} \quad x > 1 \end{cases}$$

[NUH–2005, DUH–1986, 1988, 2006]

সমাধান ঃ উপরের উদাহরণের মত অগ্রসর হও। প্রদত্ত ফাংশনটির লেখচিত্র নিম্নরূপ হইবে।



এখানে $D_f = \mathbb{R}$

এবং $R_f = [0, \infty)$.

উদাহরণ–12. নিম্নভাবে সংজ্ঞায়িত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Draw the graph of the function f which is defined as follows.]

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{যখন} \quad x > 1 \\ x & \text{যখন} \quad 0 < x \le 1 \\ -x & \text{যখন} \quad x \le 0 \end{cases}$$

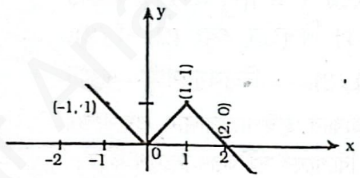
[NUH–2010, DUH–1989]

সমাধান ঃ (শর্ত–1) ঃ $x > 1$ বা $(1, \infty)$ ব্যবধিতে $y = f(x) = 2 - x$ একটি (1, 1) খোলা প্রান্ত বিন্দু এবং (2, 0) বিন্দুগামী রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।

(শর্ত–2) ঃ $0 < x \le 1$ বা $(0, 1]$ ব্যবধিতে $y = f(x) = x$ একটি (0, 0) খোলা প্রান্ত বিন্দু এবং (1, 1) প্রান্ত বিন্দু বিশিষ্ট রেখাংশের সমীকরণ নির্দেশ করে।

(শর্ত–3) ঃ $x \le 0$ বা $(-\infty, 0]$ ব্যবধিতে $y = f(x) = -x$ একটি (0, 0) প্রান্ত বিন্দু বিশিষ্ট এবং (–1, 1) বিন্দুগামী রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।

এখন উপরের আলোচিত তিন শর্তের বিন্দুসমূহ আয়তকার স্থানাঙ্কের সমতল xy এ স্থাপন করিয়া সরলভাবে সংযোগ করিলে ফাংশন f এর যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তাহা প্রদত্ত হইল।



উদাহরণ–13. নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিত f ফাংশনের লেখচিত্র অংকনসহ ইহার ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f(x) = |x| + |x-1|$. **[DUH–1992]**

সমাধান ঃ এখানে $y = f(x) = |x| + |x-1|$

$$= \begin{cases} x+x-1 & \text{যখন} \quad x \ge 1 \\ x-(x-1) & \text{যখন} \quad 0 \le x < 1 \\ -x-(x-1) & \text{যখন} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x-1 & \text{যখন} \quad x \ge 1 \\ 1 & \text{যখন} \quad 0 \le x < 1 \\ -2x+1 & \text{যখন} \quad x < 0 \end{cases}$$

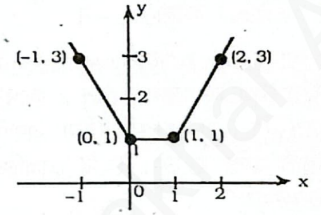
(শর্ত–1) ঃ $x \ge 1$ শর্তে বা ব্যবধিতে $y = 2x - 1$ একটি রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে যাহার প্রান্ত বিন্দু (1, 1). এখন এই রশ্মির উপর আরেকটি বিন্দু (2, 3) লই। এখন আয়তাকার স্থানাঙ্কের সমতল xy এ ঐ বিন্দু দুইটি স্থাপন করিয়া নূন্যতম দূরত্ব পথে উহাদেরকে যোগ করিয়া উর্ধমুখী করিলে নির্ণেয় শর্তের লেখচিত্র পাওয়া যাইবে।

(শর্ত–2) ঃ $0 \le x < 1$ শর্তে বা ব্যবধিতে $y = 1$ একটি (0, 1) প্রান্ত বিন্দু বিশিষ্ট একটি রেখাংশের সমীকরণ নির্দেশ করে যাহার অপর প্রান্ত (1, 1) খোলা। এই রেখাংশটি x অক্ষের সমান্তরাল।

এখন xy সমতলে (0, 1) এবং (1, 1) বিন্দুর সংযুক্ত রেখাংশ নির্ণয় করিয়া (1, 1) বিন্দুতে খোলা চিহ্ন ব্যবহার করিলে নির্ণেয় শর্তের লেখচিত্র পাওয়া যাইবে।

(শর্ত–3) ঃ $x < 0$ শর্তে $y = -2x + 1$ একটি খোলা রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে যাহার প্রান্ত বিন্দু (0, 1) বিন্দুর কাছাকাছি। এই রশ্মির উপর আরেকটি বিন্দু (–1, 3) লই।

এখন xy সমতলে এ দুই বিন্দুগামী রশ্মি নির্ণয় করিয়া (0, 1) প্রান্ত বিন্দুতে খোলা চিহ্ন ব্যবহার করিলে প্রদত্ত শর্তের লেখচিত্র পাওয়া যাইবে।



প্রদত্ত ফাংশনের নির্ণেয় লেখচিত্র প্রদত্ত হইল।

লেখচিত্র হইতে ইহা স্পষ্ট যে প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [1, \infty)$.

উদাহরণ–14. নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Draw the graph of the function f which is defined as follows.]

$$f(x) = |x+1| + |x-2|. \quad \textbf{[NUH–1997, 2003]}$$

সমাধান ঃ $y = f(x) = |x+1| + |x-2|$

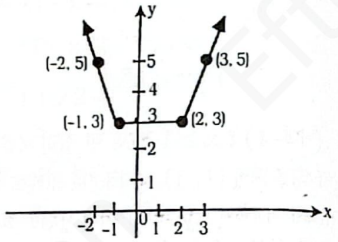
$$= \begin{cases} x+1+x-2 & \text{যখন} \quad x \ge 2 \\ x+1-(x-2) & \text{যখন} \quad -1 \le x < 2 \\ -(x+1)-(x-2) & \text{যখন} \quad x < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x-1 & \text{যখন} \quad x \ge 2 \\ 3 & \text{যখন} \quad -1 \le x < 2 \\ -2x+1 & \text{যখন} \quad x < -1 \end{cases}$$

(শর্ত–1) ঃ $x \geq 2$ ব্যবধিতে $y = 2x - 1$ একটি (2, 3) প্রান্ত বিন্দু এবং (3, 5) বিন্দুগামী একটি রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।

(শর্ত–2) ঃ $-1 \leq x < 2$ ব্যবধিতে $y = 3$ একটি রেখাংশের সমীকরণ নির্দেশ করে যার একপ্রান্ত বিন্দু (–1, 3) এবং অন্যপ্রান্ত বিন্দু (2, 3) যা খোলা।

(শর্ত–3) ঃ $x < -1$ ব্যবধিতে $y = -2x + 1$ একটি (–1, 3) খোলা প্রান্ত বিন্দু এবং (–2, 5) বিন্দুগামী একটি রশ্মির সমীকরণ নির্দেশ করে।



উপরের আলোচিত বিন্দুসমূহ আয়তকার স্থানাঙ্কের সমতল xy এ স্থাপন করে সরলভাবে সংযোগ করিলে লেখচিত্র পাওয়া যায়।

উদাহরণ–15. নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } |x| > 1 \\ 1 + x & \text{যখন } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{যখন } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

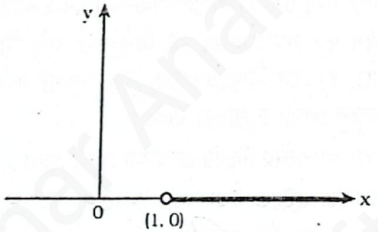
[NUH–1997, 2009, NU(NM)–2004, 2009, BSc(Pass)–2006]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশনটি তিনটি শর্তে তিনটি সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

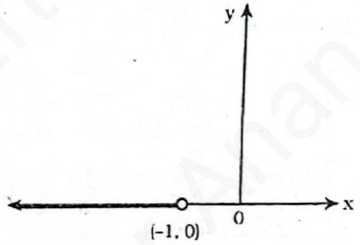
(শর্ত–1) ঃ এখানে $|x| > 1$

$\Rightarrow x > 1$ অথবা $x < -1$.

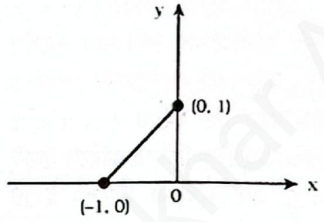
এখন $x > 1$ শর্তে $y = f(x) = 0$ সূত্রটির লেখচিত্র অঙ্কন করলে x অক্ষের উপরস্থ (1, 0) প্রান্তবিন্দুহীন একটি ডানমুখী রশ্মি হইবে। ইহার লেখচিত্র প্রদত্ত হইল।



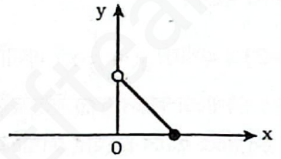
আবার $x < -1$ শর্তে $y = f(x) = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করিলে x অক্ষের উপরস্থ (–1, 0) প্রান্ত বিন্দুহীন একটি বামমুখী রশ্মি হইবে। নিম্নে ইহার লেখচিত্র প্রদত্ত হইল।



(শর্ত–2) ঃ $-1 \leq x \leq 0$ শর্তে $y = f(x) = 1 + x$ সূত্রটির লেখচিত্র একটি (– 1, 0) [যখন $x = -1$ তখন $y = 1 - 1 = 0$] এবং (0, 1) [যখন $x = 0$ তখন $y = 1$] প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট একটি রেখাংশ নির্দেশ করিবে। ইহার লেখচিত্র প্রদত্ত হইল।

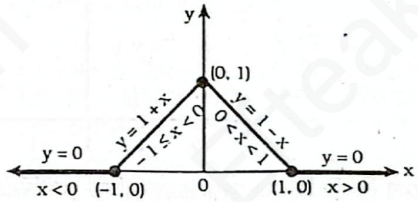


(শর্ত–3) ঃ $0 < x \leq 1$ শর্তে $y = f(x) = 1 - x$ সূত্রটির লেখচিত্র একটি (0, 1) প্রান্তবিন্দুহীন এবং (1, 0) প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট রেখাংশ হইবে। ইহার লেখচিত্র প্রদত্ত হইল।



উপরের চারটি লেখচিত্রের মিলিত লেখচিত্রই হইল f এর লেখচিত্র। নিম্নে তাহা প্রদত্ত হইল।

উপরের লেখচিত্র হইতে ইহা স্পষ্ট যে x অক্ষের প্রত্যেক বিন্দুতে লেখচিত্র বিদ্যমান। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন হইল সমস্ত বাস্তবসংখ্যার সেট অর্থাৎ $D_f = \mathbb{R}$. আবার উপরের লেখচিত্র হইতে

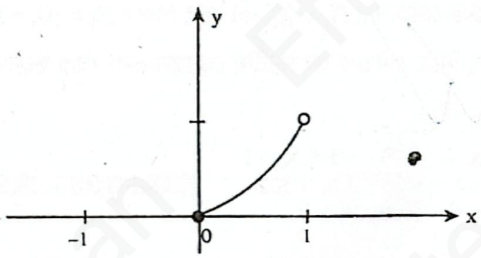


ইহা স্পষ্ট যে [0, 1] ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে y এর মান বিদ্যমান। সুতরাং প্রদত্ত ব্যবধির রেঞ্জ $R_f = [0, 1]$.

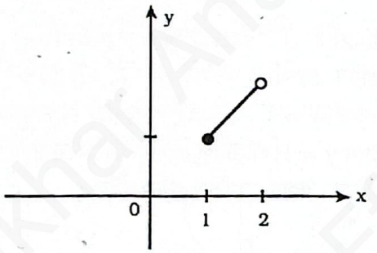
উদাহরণ–16. নিম্নে সংজ্ঞায়িত f ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয়সহ লেখচিত্র অঙ্কন কর। $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{যখন } 1 \leq x < 2 \\ (1/2)x^2 & \text{যখন } 2 \leq x < \infty \end{cases}$ **[DUH–1987]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশনটি তিনটি শর্তে তিনটি সূত্রদ্বারা সংজ্ঞায়িত।

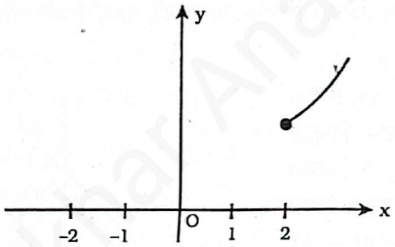
(শর্ত–1) ঃ এখানে $y = f(x) = x^2$ একটি প্যারাবোলার সমীকরণ নির্দেশ করে। এখন এই প্যারাবোলার লেখচিত্র অঙ্কন করে ইহা হইতে $0 < x < 1$ ব্যবধির অংশটুকু চিহ্নিত করিলে ইহাই শর্ত 1 এর লেখচিত্র হইবে। ইহার লেখচিত্র প্রদত্ত হইল।



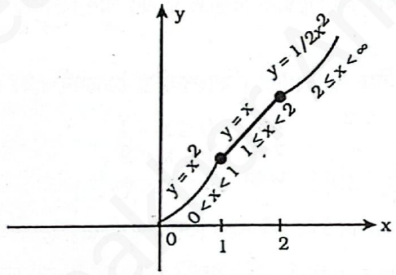
(শর্ত–2) ঃ এখানে $y = x$ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে। এখন এই সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন করে ইহা হইতে $1 \le x < 2$ ব্যবধির অংশটুকু চিহ্নিত করিলে ইহাই শর্ত 2 এর লেখচিত্র হইবে। ইহার লেখচিত্র প্রদত্ত হইল।



(শর্ত–3) ঃ এখানে $y = \frac{1}{2}x^2$ একটি প্যারাবোলার সমীকরণ নির্দেশ করে। এখন এই প্যারাবোলার লেখচিত্র অঙ্কন করে ইহা হইতে $2 \le x < \infty$ শর্তের লেখ চিত্র চিহ্নিত করিলে শর্ত 3 এর লেখচিত্র হইবে। ইহার লেখচিত্র প্রদত্ত হইল।



উপরের তিনটি চিহ্নিত লেখচিত্রের মিলিত লেখচিত্রই প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র হইবে।



উপরের লেখচিত্র হইতে ইহা স্পষ্ট যে প্রদত্ত ফাংশনটির মান $0 < x < \infty$ বা $(0, \infty)$ ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে বিদ্যমান এবং ঐ মান $0 < y < \infty$ বা $(0, \infty)$ ব্যবধির সমস্ত বিন্দু। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন ঃ $D_f = [0, \infty)$ এবং রেঞ্জ ঃ $R_f = [0, \infty)$.

উদাহরণ–17. নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর।

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{যখন } -1 \le x < 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$$

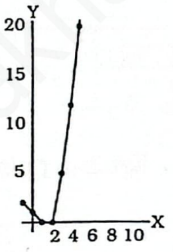
[NUH–1995. B.Sc(Pass)–2010]

সমাধান ঃ এখানে $y = f(x)$ এবং ইহা তিনটি সূত্রদ্বারা সংজ্ঞায়িত। আবার এখানে

(i) $-1 \le x < 1$ বা $[-1, 1]$ ব্যবধিতে f সরলরেখা নির্দেশ করে। এই ব্যবধিতে f নিম্নমুখী এবং ইহার রেঞ্জ = $(1 - 1, 1 + 1] = (0, 2]$.

(ii) $1 \le x \le 2$ বা $[1, 2]$ ব্যবধিতে f রেখাংশ নির্দেশ করে যাহা x অক্ষে অবস্থিত এবং ঐ ব্যবধিতে ইহার রেঞ্জ = $\{0\}$.

(iii) $x > 2$ বা $[2, \infty)$ ব্যবধিতে f প্যারাবোলার সমীকরণ নির্দেশ করে এবং ইহা উর্ধমুখী। ঐ ব্যবধিতে উহার রেঞ্জ = $(0, \infty)$.



সুতরাং f এর ডোমেন $D_f = [-1, 1) \cup [1, 2] \cup [2, \infty) = [-1, \infty)$ এবং রেঞ্জ $R_f = (0, 2] \cup \{0\} \cup (0, \infty) = (0, \infty)$.

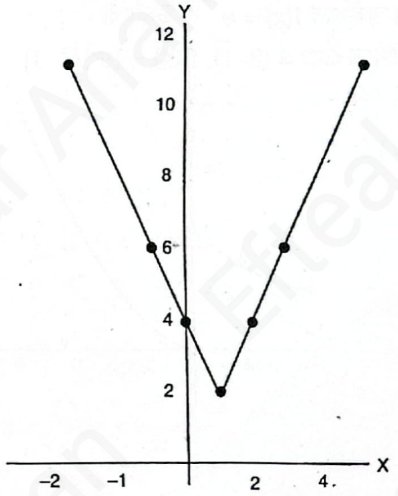
উদাহরণ–18. $f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$ দ্বারা বর্ণিত f ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান ঃ এখানে $y = f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$

$$= \begin{cases} x + x - 1 + x - 2 & \text{যখন } x \ge 2 \\ x + x - 1 - (x-2) & \text{যখন } 1 \le x < 2 \\ x - (x-1) - (x-2) & \text{যখন } 0 \le x < 1 \\ -x - (x-1) - (x-2) & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x - 3 & \text{যখন } x \ge 2 \\ x + 1 & \text{যখন } 1 \le x < 2 \\ -x + 3 & \text{যখন } 0 \le x < 1 \\ -3x + 3 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

নিম্নে প্রদত্ত f ফাংশনের লেখচিত্র প্রদত্ত হইল।



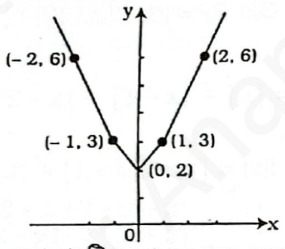
উদাহরণ–19. $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত f ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান ঃ এখানে $y = f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$

$$= \begin{cases} x+1+x+x-1 & \text{যখন} \quad x \geq 1 \\ x+1+x-(x-1) & \text{যখন} \quad 0 \leq x < 1 \\ x+1-x-(x-1) & \text{যখন} \quad -1 \leq x < 0 \\ -(x+1)-x-(x-1) & \text{যখন} \quad x < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x & \text{যখন} \quad x \geq 1 \\ x+2 & \text{যখন} \quad 0 \leq x < 1 \\ -x+2 & \text{যখন} \quad -1 \leq x < 0 \\ -3x & \text{যখন} \quad x < -1 \end{cases}$$

নিম্নে প্রদত্ত f ফাংশনের লেখচিত্র প্রদত্ত হইল ঃ

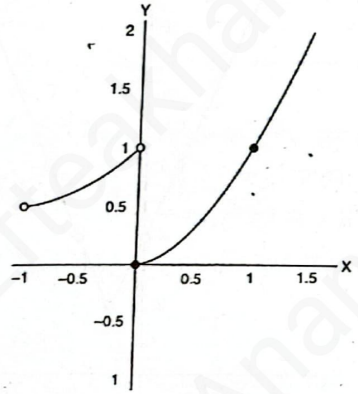


উদাহরণ–20. নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অংকন কর। $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{2}} & \text{যখন} \quad -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন} \quad 0 \leq x < 2 \end{cases}$ **[DUH–1987; NUH–2003]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশনটি $(-1, 0)$ এবং $[0, 2)$ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত। সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = (-1, 0) \cup [0, 2) = (-1, 2)$.

আবার $(-1, 0)$ ব্যবধিতে $f(x) = e^{-\frac{|x|}{2}}$ ঊর্ধ্বমুখী।

সুতরাং এই ব্যবধিতে রেঞ্জ $= (f(-1), f(0)) = (e^{-1/2}, 1)$



আবার $[0, 2)$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2$ ঊর্ধ্বমুখী।

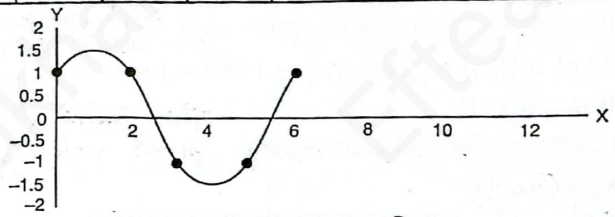
সুতরাং এই ব্যবধিতে রেঞ্জ $= [f(0), f(2)] = (0, 4)$.

সুতরাং নির্ণেয় রেঞ্জ $R_f = (e^{-1/2}, 1) \cup [0, 4) = [0, 4)$

শর্ত অনুযায়ী ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন করা হলো।

উদাহরণ–21. $f(x) = \sin x + \cos x$ ফাংশনের লেখচিত্র $0 \leq x \leq 2\pi$ ব্যবধিতে নিম্নে প্রদত্ত হইল ঃ

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
f(x)	1	$\sqrt{2}$	1	0	– 1	$-\sqrt{2}$	– 1	0	1

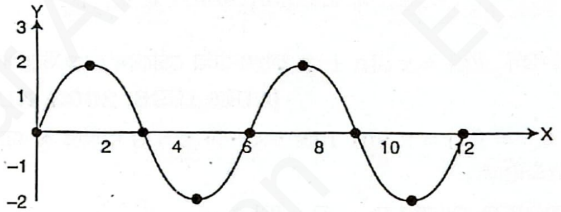


উদাহরণ–22. $f(x) = \sin x + \sin |x|$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ

সমাধান ঃ $y = f(x) = \sin x + \sin |x|$

$$= \begin{cases} \sin x + \sin x & \text{যখন} \quad x \geq 0 \\ \sin x - \sin x & \text{যখন} \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\sin x & \text{যখন} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{যখন} \quad x < 0 \end{cases}$$

নিম্নে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র প্রদত্ত হইল ঃ



উদাহরণ–23. $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}|\cos x|$ এর লেখচিত্র অংকন কর। **[NUH(NM)–2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}|\cos x| \quad \cdots\cdots (1)$$

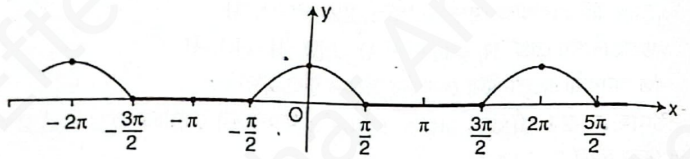
$\cdots -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}, \cdots$ ব্যবধিতে $f(x) = 0$

আবার, $\cdots -\frac{5\pi}{2} < x < -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$

$\cdots$ ব্যবধিতে $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x$

$= \cos x$

নিম্নে (1) ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন করা হইল ঃ



উদাহরণ–24. $f(x) = \cos \pi/x$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর।

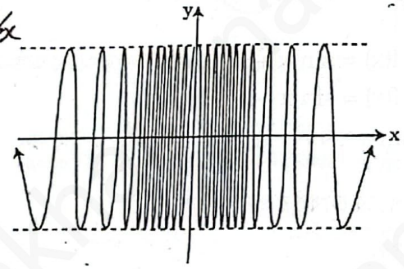
সমাধান ঃ $y = f(x) = \cos \pi/x$ ফাংশনটি $x = 0$ ব্যতিত x এর অন্য সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। সুতরাং $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

আবার $|y| = |f(x)| = |\cos \pi/x| \leq 1$ অর্থাৎ $-1 \leq y \leq 1$

সুতরাং $R_f = [-1, 1]$

নিম্নে প্রদত্ত ফাংশনটির লেখচিত্র প্রদত্ত হইল ঃ

x	$f(x) = \cos \pi/x$
1	−1
−1	1
2	0
−2	0
½	1
−½	1



উদাহরণ–25. $f(x) = x \sin 1/x$ ফাংশনটির ডোমেন রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর। **[NUH–1996, 2002, NUH(NM)–2006]**

সমাধান ঃ $y = f(x) = x \sin 1/x$ ফাংশনটি $x = 0$ ব্যতিত x এর অন্য সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

সুতরাং ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

প্রদত্ত ফাংশনে x এর পরিবর্তে $-x$ বসাইলে মানের কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং ফাংশনটি y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

x এর ধনাত্মক মানের জন্য ফাংশনের মান নিম্নরূপ হয় ঃ

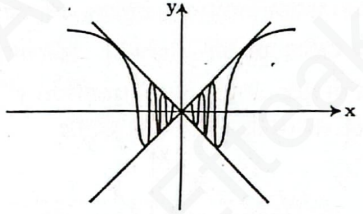
$f(x) \in (0, 1)$ যখন $\frac{1}{\pi} < x < \infty$	$f(x) \in \left[-\frac{2}{3\pi}, 0\right)$ যখন $\frac{1}{2\pi} < x < \frac{1}{\pi}$
$f(x) \in \left(0, \frac{2}{5\pi}\right]$ যখন $\frac{1}{3\pi} < x < \frac{1}{2\pi}$	$f(x) \in \left[-\frac{2}{7\pi}, 0\right)$ যখন $\frac{1}{4\pi} < x < \frac{1}{3\pi}$
$f(x) \in \left(0, \frac{2}{9\pi}\right]$ যখন $\frac{1}{5\pi} < x < \frac{1}{4\pi}$	$f(x) \in \left[-\frac{2}{11}\pi, 0\right)$ যখন $\frac{1}{6\pi} < x < \frac{1}{5\pi}$
... ...	... ...
... ...	... ...

আবার $f(x) = 0$ যখন $x = \pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, \cdots$

ফাংশনের সকল মান বিবেচনা করিয়া পাই, $f(x) \in \left[-\frac{2}{3\pi}, 1\right), \forall x$

সুতরাং ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \left[-\frac{2}{3\pi}, 1\right)$

নিম্নে ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন করা হইল ঃ



চিত্র হইতে স্পষ্ট যে ফাংশনটির মান $\left[\frac{-2}{3\pi}, 1\right)$ ব্যবধির মধ্যে বিদ্যমান।

অর্থাৎ $\frac{-2}{3\pi} \leq y < 1$. সুতরাং $R_f = \left[\frac{-2}{3\pi}, 1\right)$

উদাহরণ–26. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র অঙ্কন কর। **[NUH–2002]**

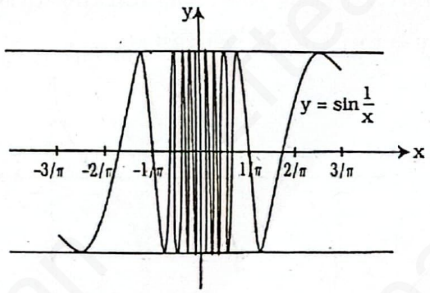
সমাধান ঃ $y = f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দু ব্যতিত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

আবার $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$. সুতরাং $-1 \leq y \leq 1$ $\therefore R_f = [-1, 1]$

আবার $y = f(x) = \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$

অর্থাৎ $x = \cdots, -\frac{1}{3\pi}, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi} \cdots$ বিন্দুতে ফাংশনটি x অক্ষকে ছেদ করে। নিম্নে প্রদত্ত ফাংশনটির লেখচিত্র প্রদত্ত হইল ঃ



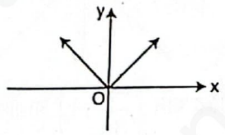
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

1.C.1. ফাংশনের লেখচিত্র অংকন বলিতে কি বোঝায়? (What is mean by drawing a graph of a function?)

Ans : কোন সমতলে কোন ফাংশনকে জ্যামিতিকভাবে স্থাপন করা গেলে ঐ ফাংশনকে দেখা যায় বা চেনা যায়। ফাংশনের জ্যামিতিকভাবে এই স্থাপনকে ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করা হইয়াছে বলা হয়।

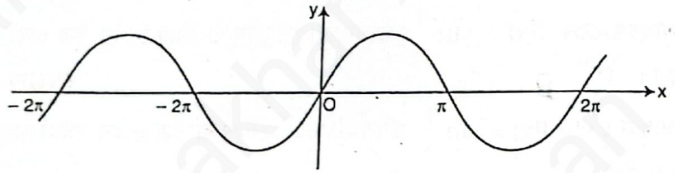
1.C.2. সাংখিক মানের ফাংশন $y = |x|$ এর লেখচিত্র আঁক। (Sketch the graph of absolute value function $y = |x|$.)

Ans : $y = |x|$ এর লেখচিত্র নিম্নে আঁকা হইল ঃ



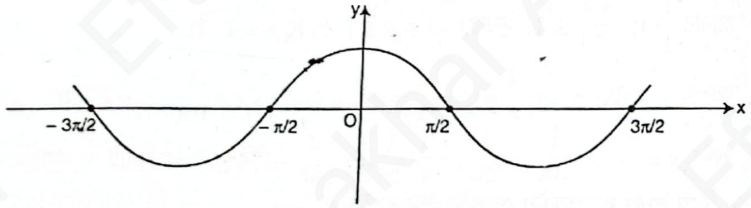
1.C.3. $y = \sin x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \sin x$.)

Ans : নিম্নে $y = \sin x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



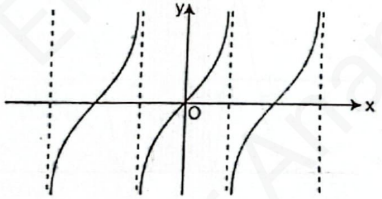
1.C.4. $y = \cos x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \cos x$.)

Ans : নিম্নের $y = \cos x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



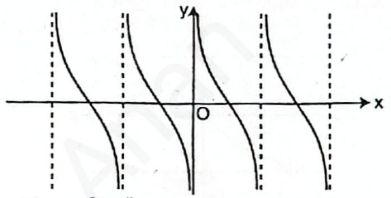
1.C.5. $y = \tan x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \tan x$.)

Ans : নিম্নে $y = \tan x$ অংকন করা হইল ঃ



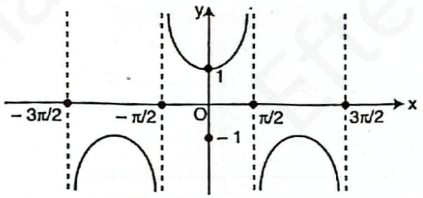
1.C.6. $y = \cot x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \cot x$.)

Ans : নিম্নে $y = \cot x$ আঁকা হইল ঃ



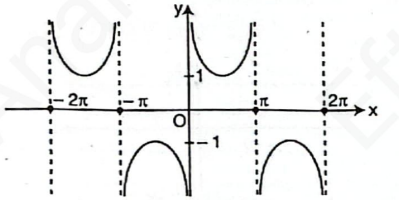
1.C.7. $y = \sec x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \sec x$.)

Ans : নিম্নে $y = \sec x$ আঁকা হইল ঃ



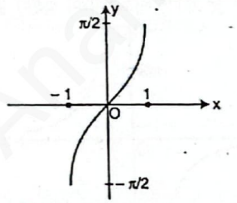
1.C.8. $y = \text{cosec } x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \text{cosec } x$.)

Ans : নিম্নের $y = \text{cosec } x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



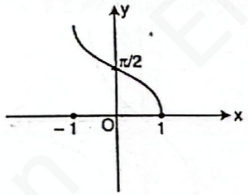
1.C.9. $y = \sin^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \sin^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \sin^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



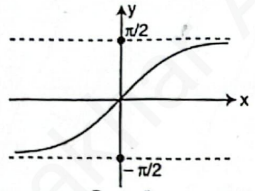
1.C.10. $y = \cos^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \cos^{-1} x$.)

Ans : নিম্নের $y = \cos^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



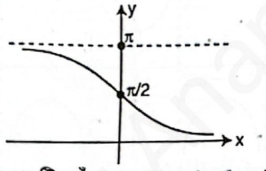
1.C.11. $y = \tan^{-1}x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \tan^{-1}x$.)

Ans : নিম্নে $y = \tan^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



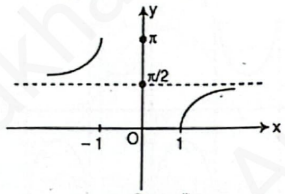
1.C.12. $y = \cot^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the functions $y = \cot^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \cot^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



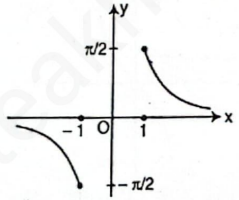
1.C.13. $y = \sec^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \sec^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \sec^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



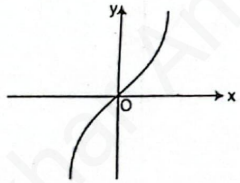
1.C.14. $y = \text{cosec}^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \text{cosec}^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \text{cosec}^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



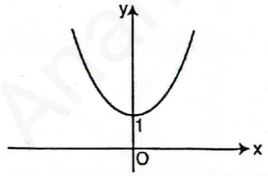
1.C.15. sinhx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function y = sinhx.)

Ans : নিম্নে y = sinhx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



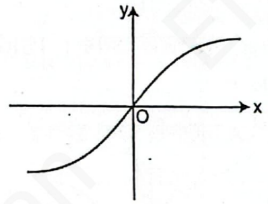
1.C.16. y = coshx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function y = coshx.)

Ans : নিম্নে y = coshx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



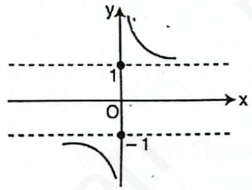
1.C.17. y = tanhx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function y = tanhx.)

Ans : নিম্নে y = tanhx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



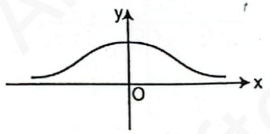
1.C.18. y = cothx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function y = cothx.)

Ans : নিম্নে y = cothx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



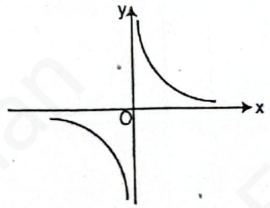
1.C.19. y = sechx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the functions y = sechx.)

Ans : নিম্নে y = sechx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



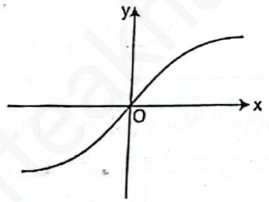
1.C.20. y = cosechx ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function y = cosechx.)

Ans : নিম্নে y = cosechx ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



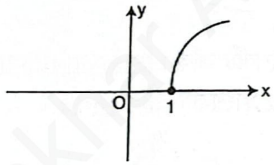
1.C.21. $y = \sinh^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \sinh^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \sinh^{-1} x$ এর লেখচিত্র আঁকা হইল ঃ



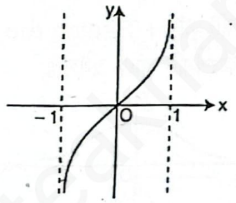
1.C.22. $y = \cosh^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \cosh^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \cosh^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



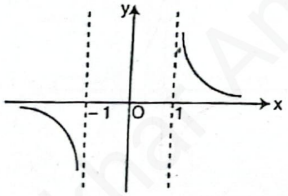
1.C.23. $y = \tanh^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \tanh^{-1} x$.)

Ans : $y = \tanh^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



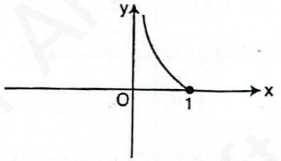
1.C.24. $y = \coth^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \coth^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \coth^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



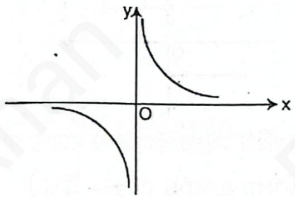
1.C.25. $y = \text{sech}^{-1} x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \text{sech}^{-1} x$.)

Ans : নিম্নে $y = \text{sech}^{-1} x$ ফাংশনটি আঁকা হইলে ঃ



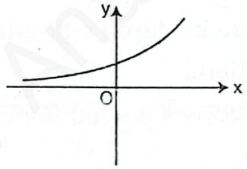
1.C.26. $y = \text{cosech}^{-1} x$ ফাংশনটির আকার কিরূপ হইবে? (What is the shape of the function $y = \text{cosech}^{-1} x$?)

Ans : $y = \text{cosech}^{-1} x$ ফাংশনটির আকার নিম্নরূপ হইবে ঃ



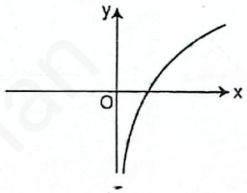
1.C.27. $y = a^x$, $a > 1$ সূচকীয় ফাংশনটি আঁক। (Sketch the exponential function $y = a^x$, $a > 1$.)

Ans : $y = a^x$, $a > 1$ সূচকীয় ফাংশনটি নিম্নে আঁকা হইল ঃ



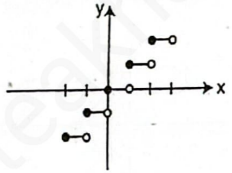
1.C.28. $y = \log_a x$, $a > 1$ লগারিদিমিক ফাংশনটি অংকন কর। (Sketch the logarithmic functon $y = \log_a x$, $a > 1$.)

Ans : $y = \log_a x$, $a > 1$ লগারিদিমিক ফাংশনটি নিম্নে অংকন করা হইল ঃ



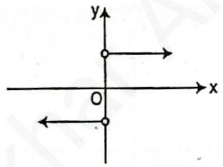
1.C.29. সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখ্যিক ফাংশন এর লেখচিত্র আঁক। (Sketch the graph of greatest integer function.)

Ans : সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখ্যিক ফাংশন নিম্নে আঁকা হইল ঃ



1.C.30. সিগনাম ফাংশনের লেখচিত্র আঁক। (Sketeh the graph of signum function.)

Ans : সিগনাম ফাংশনের লেখচিত্র নিম্নে আঁকা হইল ঃ

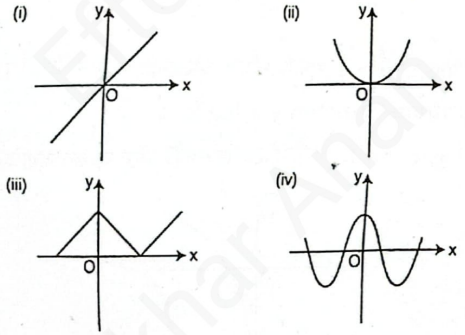


1.C.31. $y = f(x)$ এর লেখচিত্র হইতে ফাংশনের ধারণা দাও। (Give the concept of function from graph of $y = f(x)$.)

Ans : xy সমতলে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র y অক্ষের সমান্তরাল হইলে অথবা y অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখা লেখচিত্রকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিলে $y = f(x)$ ফাংশন হইবে না।

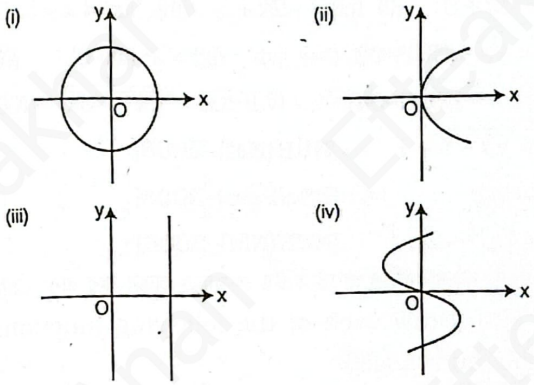
1.C.32. $y = f(x)$ এর কয়েকটি নমুনা লেখচিত্র অংকন কর যেখানে $y = f(x)$ ফাংশন হয়। (Drawing some sample graph of $y = f(x)$ such that $y = f(x)$ is function.)

Ans : xy সমতলে নিম্নের প্রত্যেকটি $y = f(x)$ ফাংশনের নমুনা লেখচিত্র ঃ



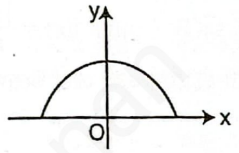
1.C.33. $y = f(x)$ এর কয়েকটি নমুনা লেখচিত্র অংকন কর যেখানে $y = f(x)$ ফাংশন না হয়। (Drawing some sample graph of $y = f(x)$ such that $y = f(x)$ is not function.)

Ans : যে $y = f(x)$ দ্বারা নিম্নের নমুনা লেখচিত্র প্রকাশিত হয় উহারা ফাংশন নয়।



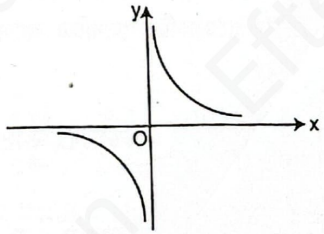
1.C.34. $y = \sqrt{1 - x^2}$ ফাংশনটি আঁক। [Draw the function $y = \sqrt{1 - x^2}$).]

Ans : নিম্নের প্রদত্ত ফাংশনটি আঁকা হইল ঃ



1.C.35. $y = \frac{1}{x}$ ফাংশনটি অংকন কর। [Draw the function $y = \frac{1}{x}$.]

Ans : নিম্নের প্রদত্ত ফাংশনটি অংকন করা হইল ঃ



EXERCISE–1(C)

1. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর (Draw each of the following functions) :

(i) $f(x) = 3x + 8$ (ii) $f(x) = -2x + 3$ (iii) $f(x) = x + 5,\ 0 \le x \le 2$

(iv) $f(x) = \sqrt{x}$ **[NUH–02, 04]** (v) $f(x) = a^x\ (a > 0)$ **[NUH–02, 0**

(vi) $f(x) = e^{-x^2}$ **[NUH–04]** (vii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ **[NUH(NM)–0**

(viii) $f(x) = \sqrt{x-5} + 1$ **[NUH(NM)–2008]**

(ix) $f(x) = |x|$ **[BSc(Pass)–2008]**

(x) $f(x) = |x|^2 - 2|x|$ **[NUH(NM)–2006]**

2. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন এবং রে নির্ণয় কর। (Draw each of the following functions and find domain and range.)

(i) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ (ii) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ যখন $x \ne -1$

$= -2$ যখন $x = -1$

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3},\ -2 \le x \le 2$ (iv) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ **[NUH(NM)–07**

3. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্ক কর ঃ

(i) $f(x) = 2x^2$ (ii) $f(x) = x^2 - 1$ (iii) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{2},\ 0 \le x \le \infty$

4. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ

(i) $f(x) = -|x-1|$ (ii) $f(x) = -|x| + 1$ (iii) $f(x) = |x-3|,\ 3 < x < \infty$

৩. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর ডোমেন এবং রে উল্লেখসহ ঃ

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন} \quad x < 0 \\ 2 & \text{যখন} \quad x = 0 \\ 3 & \text{যখন} \quad x > 0 \end{cases}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R};\ R_f = \{1, 2, 3\}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন} \quad x < -2 \\ 0 & \text{যখন} \quad -2 \le x < 2 \\ 1 & \text{যখন} \quad x \ge 2 \end{cases}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R};\ R_f = \{-1, 0, 1\}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{যখন} \quad x < 0 \\ 2 & \text{যখন} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{যখন} \quad x > 1 \end{cases}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R};\ R_f = \{2\}$

৬. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ

(i) $f(x) = -|x| + |x-1|$

(ii) $f(x) = |x+2| + |x-2|$

(iii) $f(x) = |x-1| + |x+3|$ **[NUH–2008]**

(iv) $f(x) = |x-1| + |x-3|$ **[NUH–2004]**

(v) $f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$

7. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন} \quad 0 \le x < 2 \\ 2 & \text{যখন} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$ উত্তর ঃ $D_f = [0, 3];\ R_f = \{1, 2\}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{যখন} \quad x < 0 \\ 2 & \text{যখন} \quad 0 < x \end{cases}$ উত্তর ঃ $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty),\ R_f = \{-2, 2\}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন} \quad x \ge 2 \\ 1 & \text{যখন} \quad -2 < x < 2 \\ 0 & \text{যখন} \quad x \le -2 \end{cases}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R};\ R_f = \{0, 1\}$

8. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ

(i) $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন} \quad x > 2 \\ 1 & \text{যখন} \quad 0 < x < 2 \\ -x & \text{যখন} \quad x < 0 \end{cases}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{0, 2\};\ R_f = (0, \infty)$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{যখন} \quad x < -1 \\ 2 & \text{যখন} \quad -1 \le x \le 1 \\ 2x & \text{যখন} \quad x > 1 \end{cases}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R},\ R_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{যখন} \quad x \le 0 \\ 0 & \text{যখন} \quad 0 < x < 1 \\ 3x & \text{যখন} \quad 1 \le x \end{cases}$ উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R},\ R_f = [0, \infty)$

9. ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ

(i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন} \quad x \ge 1 \\ 1 & \text{যখন} \quad -1 < x < 1 \\ x^2 & \text{যখন} \quad x \le -1 \end{cases}$

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = [1, \infty)$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{যখন} \quad x \ge 1 \\ x^2 & \text{যখন} \quad -1 < x < 1 \\ -2x & \text{যখন} \quad x \le -1 \end{cases}$

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R};\ R_f = (0, 1) \cup [2, \infty)$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{যখন} \quad x > 1 \\ x^2 & \text{যখন} \quad -1 \le x \le 1 \\ x^2-1 & \text{যখন} \quad x < -1 \end{cases}$

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = [0, \infty)$

10. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ

(i) $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন} \quad 1 \le x \le 2 \\ 2 & \text{যখন} \quad -1 < x < 1 \\ x^2+1 & \text{যখন} \quad -3 \le x \le -1 \end{cases}$

উত্তর ঃ $D_f = [-3, 2]$; $R_f = [1, 10]$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{যখন} \quad 1 < x \le 2 \\ 5 & \text{যখন} \quad 0 \le x \le 1 \\ -x^2+5 & \text{যখন} \quad -2 \le x < 0 \end{cases}$

উত্তর ঃ $D_f = [-2, 2]$; $R_f = [1, 7]$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন} \quad x \ge 2 \\ 3 & \text{যখন} \quad -1 \le x < 2 \\ -x^2 & \text{যখন} \quad -2 \le x < -1 \end{cases}$

উত্তর ঃ $D_f = [-2, \infty)$

$R_f = [-4, -1) \cup \{3\} \cup [4, \infty)$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{যখন} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{যখন} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{যখন} \quad x > 2 \end{cases}$ **[NUH(NM)–2006]**

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$

$R_f = (-\infty, 4]$

(v) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন} \quad x < 0 \\ 0 & \text{যখন} \quad x = 0 \\ x+2 & \text{যখন} \quad x > 0 \end{cases}$ **[NUH(NM)–2003]**

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \{-1\} \cup \{0\} \cup (2, \infty)$

(vi) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{যখন} \quad x \ne 0 \\ 0 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$ **[BSc(Pass)–2007]**

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$

$R_f = \{-1, 0, 1\}$

Chapter–2(A)
সীমা
LIMIT

2.A.1. সূচনা (Introduction) ঃ এই অধ্যায়ে ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস এর সীমাস্থ (limiting) মূল ধারণা নিয়ে আলোচনায় সীমা সম্পর্কিত বিভিন্ন সংজ্ঞা, অস্তিত্ব, প্রকৃতি, উপপাদ্য এবং সমস্যাবলী বর্ণনা করা হইয়াছে।

2.A.2. চলরাশির সীমা (Limit of a Variable) ঃ কোন স্বাধীন চলক একটি নির্দিষ্ট নিয়মানুযায়ী কতকগুলি মান গ্রহণের জন্য একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার দিকে অগ্রসর হইতে থাকিলে তবে ঐ সংখ্যাটিকে চলরাশির সীমা বলা হয়।

কোন বাস্তব চলরাশি x বাস্তব অক্ষের কোন নির্দিষ্ট a মানের দিকে কতকগুলি মান গ্রহন কালে ধাবিত হইতে থাকিলে a কে x এর সীমা বলা হয় এবং ইহাকে $x \to a$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। x এর মান ক্রমশঃ বাস্তব অক্ষের a বিন্দুর বামদিক হইতে অথবা ঐ বিন্দুর ডানদিক হইতে a এর নিকটবর্তী হইতে থাকিলে উহাদের মধ্যকার দূরত্ব ক্ষুদ্রতর হয় অর্থাৎ $|x - a| < \delta$ হয় যেখানে $\delta > 0$ অতি ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যা পূর্বে জানা যে কোন ক্ষুদ্রতম যোগবে ধক সংখ্যার চেয়েও স্ক্ষুদ্রতম।

যদি বাস্তব অক্ষের a বিন্দুর এর ডান দিক হইতে x চলক a এর দিকে ধাবিত হয় তখন ইহাকে $x \to a_+$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একইভাবে যদি a এর বামদিক হইতে x চলক a এর দিকে ধাবিত হয় তখন ইহাকে $x \to a_-$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.A.3. ফাংশনের সীমা (Limit of function) ঃ

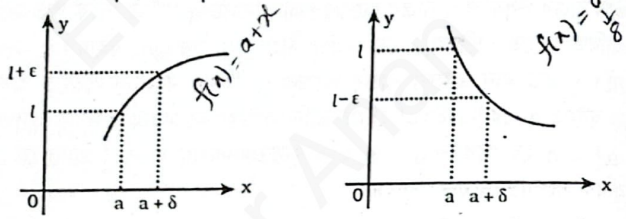
[NUH–2002, 2009, NUH(NM)–2009]

যদি একটি চলক x এর মান a এর উভয় দিক হইতে (ডান বা বাম) অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে l কে f(x) ফাংশনের সীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim_{x \to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [If the values of f(x) become arbitrarily close to a single number l as the values of a variable x approaches to a from both sides of a (Right or Left) then l is called the limit of the function f(x). It is denoted by $\lim_{x \to a} f(x) = l$.]

2.A.4. ($\delta - \varepsilon$) এর সাহায্যে ফাংশনের সীমা [Limit of functions using ($\delta - \varepsilon$)] ঃ যদি প্রত্যেক সংখ্যা $\epsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল একটি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা যায় যে, $0 < |x - a| < \delta$ হইলে $|f(x) - l| < \epsilon$ হয় তবে l কে f(x) ফাংশনের সীমা বলা হয়। [If for each number $\epsilon > 0$, there corresponds a small positive number δ such that $|f(x) - l| < \epsilon$ when $0 < |x - a| < \delta$ then l is called the limit of the function f(x).]

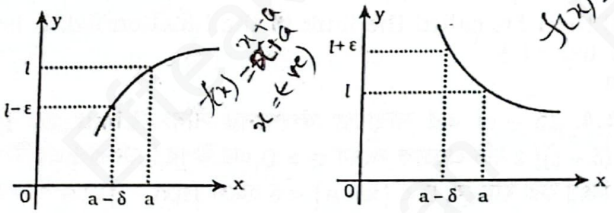
2.A.5. ডান সীমা (Right Hand Limit or R. H. L.) ঃ যদি একটি চলক x এর মান a এর ডান দিক হইতে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় $f(x)$ এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে l কে $f(x)$ ফাংশনের ডান সীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim_{x\to a_+} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [If the values of $f(x)$ become arbitrarily close to a single number l as the values of a variable x approaches to a from right side of a then l is called right hand limit of the function $f(x)$. It is denoted by $\lim_{x\to a_+} f(x) = l$]

এইক্ষেত্রে যদি কোন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ε এর জন্য এরূপ একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা সম্ভব হয় তবে $|f(x) - l| < \varepsilon$ হইবে যখন $a < x < a + \delta$ হয়।



2.A.6. বাম সীমা (Left Hand Limit or L. H. L.) ঃ যদি একটি চলক x এর মান a এর বাম দিক হইতে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় $f(x)$ এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে l কে $f(x)$ ফাংশনের বামসীমা বলা হয়। ইহাকে $\lim_{x\to a_-} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। [If the values of $f(x)$ become arbitrarily close to a single number l as the values of a variable x approaches to a from left side of a then l is called left hand limit of the function $f(x)$. It is denoted by $\lim_{x\to a_-} f(x) = l$]

এইক্ষেত্রে যদি কোন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ε এর জন্য এরূপ একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা সম্ভব হয় তবে $f(x) - l| < \varepsilon$ হইবে যখন $a - \delta < x < a$ হয়।



সীমা এর সংজ্ঞাকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a_+} f(x) = l = \lim_{x\to a_-} f(x).$$

2.A.7. $+\infty$ এবং $-\infty$ এর অর্থ বা তাৎপর্য (Meaning of $+\infty$ and $-\infty$) ঃ কোন চলকের মান সীমাহীন ভাবে বৃদ্ধি পেয়ে পূর্বে জানা বৃহত্তম সংখ্যা অপেক্ষা বড় হইলে, উহাকে $+\infty$ চিহ্ন বা ধনাত্মক অসীম বলা হয়।

আবার সীমাহীনভাবে হ্রাস পেয়ে পূর্বে জানা ক্ষুদ্র সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইয়া আরও ক্ষুদ্রতর দিকে অগ্রসর হয়, তবে উহাকে $-\infty$ চিহ্ন বা ঋনাত্মক অসীম বলা হয়। প্রকৃত পক্ষে $+\infty$ এবং $-\infty$ কোন সংখ্যা নয়, শুধু প্রতীক মাত্র।

2.A.8. $\lim_{x\to a_+} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to a_-} f(x) = -\infty$ এর ব্যাখ্যা (explanation)।

(i) যদি কোন ধনাত্মক সংখ্যার জন্য x এর মান a এর দিকে অগ্রসর হয় এবং x এর মানের জন্য $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি বৃহত্তর হইতে বৃহত্তর হইতে থাকে তখন ইহাকে $\lim_{x\to a_+} f(x) = \infty$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় যেখানে $a < x \le a + \delta$.

(ii) আবার যখন x এর মান a এর দিকে অগ্রসর হয়ে x এর মানের জন্য $f(x)$ এর অনুরূপ মানগুলি ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতর হইতে থাকে, তখন ইহাকে $\lim_{x\to a_-} f(x) = -\infty$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় যেখানে $a - \delta \le x < a$.

2.A.9. $\lim_{x\to a} f(x)$ এবং $f(a)$ এর মধ্যকার পার্থক্য [Difference between $\lim_{x\to a} f(x)$ and $f(a)$] ঃ **[BSc(Pass)-2008, 2009]**

যদি x এর মান a এর উভয় দিক হতে (ডান বা বাম) অগ্রসর হয়ে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন $f(x)$ এর মানকে $\lim_{x\to a} f(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, অর্থাৎ $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমাস্থ মানকে $\lim_{x\to a} f(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

আবার $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মানকে $f(a)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের মান $f(a)$ এবং সীমাস্থমান $\lim_{x\to a} f(x)$।

[When the value of x reaches very near to a from both sides of a (right or left) then the value of $f(x)$ is denoted by $\lim_{x\to a} f(x)$, that is, the limitting value of $f(x)$ at $x = a$ is denoted by $\lim_{x\to a} f(x)$.

Again, the value of $f(x)$ at $x = a$ is denoted by $f(a)$.

So at $x = a$ the functional value is $f(a)$ and the limitting value is $\lim_{x\to a} f(x)$.]

2.A.10. $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ এবং $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$ এর ব্যাখ্যা (explanation) : **[NUH-2003]**

x এর মান সীমাহীন ভাবে বৃদ্ধি পেয়ে পূর্বে জানা বৃহত্তম সংখ্যা অপেক্ষা বড় হওয়ায় যদি f(x) এর মান l_1 এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে ইহাকে $\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

আবার x এর মান সীমাহীন ভাবে হ্রাস পেয়ে পূর্বে জানা ক্ষুদ্র সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হওয়ায় যদি f(x) এর মান l_2 এর অতি নিকটবর্তী হয় তবে ইহাকে $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

[$\lim_{x\to\infty} f(x) = l_1$ denote the value of f(x) is very near to l_1 when x increases infinitely and greater than any known large number. Again, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$ denote the value of f(x) is very near to l_2 when x decreases infinitely and smaller than any known small numbers.]

2.A.11. ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব (Existence of limit of function) : x এর সকল মানের জন্য f(x) ফাংশন সিদ্ধ হইলে, ডান পক্ষ এবং বাম মান একটি নির্দিষ্ট মান a এর জন্য সমান হইবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি $\lim_{x\to a} f(x) = l$ সিদ্ধ হয়। সীমার সংজ্ঞা অনুযায়ী যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা $\varepsilon > 0$ এর জন্য অপর একটি সংখ্যা $\delta > 0$ পাওয়া যাইবে যেন

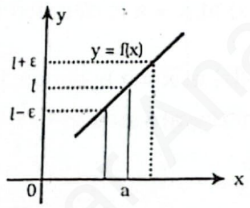
$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ যেখানে } 0 < |x-a| < \delta$$

অর্থাৎ $|f(x) - l| < \varepsilon$ যেখানে $0 < (x-a) < \delta$ এবং $0 < (a-x) < \delta$

সুতরাং $\lim_{x\to a_+} f(x) = l$ এবং $= \lim_{x\to a_-} f(x) = l$

i. e. $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_-} f(x) = l$

অতএব x = a বিন্দুতে f(x) এর সীমা l. i. e. $\lim_{x\to a} f(x) = l$.



2.A.12. সীমার মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem on Limit) ঃ

উপপাদ্য–1. প্রমাণ কর যে বিভিন্ন নির্দিষ্ট চলকের সীমার মানের বীজগণিতীয় সমষ্টি উহাদের মানের বীজগণিতীয় সমষ্টির সমান।

অর্থাৎ যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $\lim_{x\to a} \phi(x) = m$, $\lim_{x\to a} \psi(x) = n \cdots$ হয়।

তবে প্রমাণ কর $\lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} \phi(x) \pm \lim_{x\to a} \psi(x) \pm \cdots = l \pm m \pm n \pm \cdots$

[NUH–2005, BSc (Pass)–2007]

প্রমাণ ঃ প্রথম দুইটি সীমা বিবেচনা করিয়া পাই,

যদি ক্ষুদ্র ধনাত্মক ε এর মানের জন্য অধিকতর ক্ষুদ্রতর সংখ্যা δ_1 এবং δ_2 হয়, তখন

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta_1 \text{ এবং}$$

$$|\phi(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta_2$$

অপর ক্ষুদ্র সংখ্যা δ যাহা δ_1 এবং δ_2 হইতে অধিক ক্ষুদ্রতর

সেক্ষেত্রে $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ যখন $0 < |x-a| < \delta$

$$|f(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta$$

$$\therefore |f(x) + \phi(x) - (l+m)| \le |f(x) - l| + |\phi(x) - m|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ যখন } 0 < |x-a| < \delta$$

সুতরাং $\lim_{x\to a} \{f(x) + \phi(x)\} = l + m$ ..... (i)

অনুরূপে $\lim_{x\to a} \{f(x) - \phi(x)\} = l - m$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং একত্রে আমরা পাই $\lim_{x\to a} \{f(x) \pm \phi(x)\} = l \pm m$

একইভাবে একাধিক ফাংশনের সীমার ক্ষেত্রে

$$\lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} \phi(x) \pm \lim_{x\to a} \psi(x) \pm \cdots = l \pm m \pm n \pm \cdots$$

উপপাদ্য–2. বিভিন্ন মানের চলকের সীমার মানের গুণফল উহাদের মানের গুণফলের সমান। অর্থাৎ

যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $\lim_{x\to a} \phi(x) = m$, $\lim_{x\to a} \psi(x) = n \cdots$ ইত্যাদি হয়, তবে

$$\lim_{x\to a} \{f(x).\ \phi(x).\ \psi(x) \cdots\}$$

$$= \lim_{x\to a} f(x).\ \lim_{x\to a} \phi(x).\ \lim_{x\to a} \psi(x) \cdots = l.\ m.\ n \pm \cdots$$

প্রমাণ ঃ যে কোন দুইটি ফাংশনের জন্য

$\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} \psi(x) = m$

ধরি $f(x) = l + \eta_1(x)$ এবং $\psi(x) = m + \eta_2(x)$ ..... (i)

যেখানে $\lim_{x\to a} \eta_1(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} \eta_2(x) = 0$ ..... (ii)

যদি ক্ষুদ্র ধনাত্মক ϵ এর মানের জন্য অপর দুইটি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা δ_1 এবং δ_2 হয়, তবে $|\eta_1(x)| < \sqrt{\epsilon}$ যেখানে $0 < |x-a| < \delta_1$ এবং $|\eta_2(x)| < \sqrt{\epsilon}$ যেখানে $0 < |x-a| < \delta_2$. অপর ক্ষুদ্র সংখ্যা δ যাহা δ_1 এবং δ_2 অপেক্ষা অধিক ক্ষুদ্রতর।

সেক্ষেত্রে $|\eta_1(x)\,\eta_2(x)| < \sqrt{\epsilon}\,\sqrt{\epsilon} = \epsilon$ যেখানে $0 < |x-a| < \delta$

i. e. $\lim_{x\to a} \eta_1(x)\,\eta_2(x) = 0$ ..... (iii)

(i) নং সমীকরণ হইতে $\lim_{x\to a} f(x)\,\psi(x) = \lim_{x\to a} \{l + \eta_1(x)\}\{m + \eta_2(x)\}$

$= \lim_{x\to a} \{lm + l\eta_2(x) + m\eta_1(x) + \eta_1(x)\,\eta_2(x)\}$

$= lm$ [(ii) ও (iii) নং হইতে] $\therefore \lim_{x\to a} f(x)\,\phi(x) = lm$

অনুরূপে একাধিক নির্দিষ্ট সংখ্যক ফাংশনের ক্ষেত্রে

$\lim_{x\to a} f(x).\,\phi(x).\,\psi(x)\cdots = l.\,m.\,n\cdots$

উপপাদ্য–3. দুইটি ফাংশনের চলকের সীমার অনুপাত উহাদের মানের অনুপাতের সমান যেখানে হরের ফাংশনের লিমিট শূন্য নয়।

প্রমাণ ঃ ধরি $\lim_{x\to a} f(x) = l$ যেখানে $|f(x) - l| < \epsilon$ যখন $0 < |x-a| < \delta_1$

$\lim_{x\to a} \phi(x) = m.\ (m \neq 0)$ যেখানে $|\phi(x) - m| < \epsilon$ যখন $0 < |x-a| < \delta_2$

এই ক্ষেত্রে ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ϵ এর জন্য ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক সংখ্যা δ_1 এবং δ_2.

এখানে $\left|\frac{f(x)}{\phi(x)} - \frac{l}{m}\right| = \left|\frac{mf(x) - l\phi(x)}{m\phi(x)}\right|$

$= \frac{|m(f(x)-l) - l(\phi(x)-m)|}{|m|\,|\phi(x)|} \le \frac{|m|\,|f(x)-l| + |l|\,|\phi(x)-m|}{|m|\,|\phi(x)|}$

$< \frac{|m|\,\epsilon + |l|\,\epsilon}{|m|\,|m|}$ যেহেতু $|\phi(x)| > |m|$

$= \frac{|m| + |l|}{m^2}\epsilon$

সুতরাং $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{l}{m}$ যেখানে $m \neq 0$.

উপপাদ্য–4. (সেন্ডুইস উপপাদ্য)

মুক্ত ব্যবধিতে দুইটি ফাংশনের একই সীমা মানের মধ্যবর্তী কোন ফাংশন সেই মানকে সিদ্ধ করিবে।

মনে করি $g(x) \le f(x) \le h(x)$, x এর সকল মানের জন্য

যখন $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ তখন $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

2.A.13. সীমাস্থ মানের সারণী তালিকা (Lists of limiting values) :

সারণী–1

	$\lim \lvert g\rvert$ এর মান	$\lim \frac{1}{\lvert g\rvert}$ এর মান
1	0	$+\infty$
2	$+\infty$	0

সারণী–2

	lim f এর মান	lim g এর মান	lim(f + g) এর মান
1	c	$+\infty$	$+\infty$
2	c	$-\infty$	$-\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
5	$+\infty$	$-\infty$	সমাধান যোগ্য নয় বা অনির্ণেয়

সরণী–3

	$\lim \lvert f\rvert$ এর মান	$\lim \lvert g\rvert$ এর মান	$\lim \lvert fg\rvert$ এর মান
1	$c \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
2	0	$+\infty$	অনির্ণেয় বা সমাধান যোগ্য নয়
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

সারণী–4

	$\lim \lvert f\rvert$ এর মান	$\lim \lvert g\rvert$ এর মান	$\lim \frac{\lvert f\rvert}{\lvert g\rvert}$ এর মান
1	$c \neq 0$	0	$+\infty$
2	0	0	অনির্ণেয় বা সমাধান যোগ্য নয়
3	c	$+\infty$	0
4	$+\infty$	c	$+\infty$
5	$+\infty$	$+\infty$	অনির্ণেয় বা সমাধান যোগ্য নয়।

2.A.14. অনির্ণেয় আকার (Indeterminate Form) :

সংজ্ঞা ঃ যদি $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হয় তবে $\frac{f(x)}{g(x)}$ কে $x = a$ বিন্দুতে $\frac{0}{0}$ আকারের অনির্ণেয় আকার বলে।

সংজ্ঞা ঃ যদি $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হয় তবে $\frac{f(x)}{g(x)}$ কে $x = a$ বিন্দুতে $\frac{\infty}{\infty}$ আকারের অনির্ণেয় আকার বলে।

উদাহরণ–1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x(1 - 2^{-2x})}{2^x(1 + 2^{-2x})}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 2^{-2x}}{1 + 2^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$

উদাহরণ–2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–1965]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}.$

উদাহরণ–3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1964]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^4\left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2!\,x^2} + \frac{1}{3!\,x^3} + \frac{1}{4!} + \frac{x}{5!} + \cdots\right)}$

$= \frac{1}{0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{4!} + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$

উদাহরণ–4. $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1991]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$

$= \lim_{x\to 0} \left\{1 + \frac{1}{x}.x + \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{x} - 2\right)}{3!}x^3 + \cdots\right\}$

$= \lim_{x\to 0} \left\{1 + 1 + \frac{1 - x}{2!} + \frac{(1 - x)(1 - 2x)}{3!} + \cdots\right\} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$

উদাহরণ–5. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর $\lim_{x\to 2} (3x + 4) = 10$ **[DUH–1992]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 2} (3x + 4) = 10$ প্রমাণ করিতে যে কোন ক্ষুদ্র সংখ্যা $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি ক্ষুদ্রতর সংখ্যা $\delta > 0$ বিদ্যমান থাকিবে যাহাতে [It will be proved that there exists a small number $\delta > 0$ which is dependent of a small number $\varepsilon > 0$ such that].

$|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 10| < \varepsilon$ যেখানে $f(x) = 3x + 4$

এখন $|f(x) - 10| = |3x + 4 - 10| = |3(x - 2)| = 3.|x - 2|$

$< 3\delta$ [$\because |x - 2| < \delta$]

$\Rightarrow |f(x) - 10| < \varepsilon$. যেখানে $3\delta = \varepsilon$ বা $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

সুতরাং $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল $\delta > 0$ বিদ্যমান যাহাতে [So there exists a $\delta > 0$ which is dependent on $\varepsilon > 0$.]

$|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 10| < \varepsilon$ অর্থাৎ $\lim_{x\to 2} (3x + 4) = 10.$

উদাহরণ–6. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর। $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$ **[NUH–2010, NUH(NM)–2009]**

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ এবং $|x - 3| < \delta$ যেখানে $\delta > 0$.

$\therefore |f(x) - 6| = \left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| = |x + 3 - 6| = |x - 3|$

সুতরাং $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল $\delta > 0$ বিদ্যমান যাহাতে [So there exists a $\delta > 0$ which is dependent on $\varepsilon > 0$.]

$$|x-3| < \delta \Rightarrow |f(x)-6| < \varepsilon \quad \therefore \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6.$$

উদাহরণ–7. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4. \qquad \textbf{[B.Sc(Pass)–2009]}$$

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ এবং $|x-2| < \delta$ যেখানে $\delta > 0$.

এখন, $|f(x)-4| = \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right|$

$= |x+2-4|$

$= |x-2| < \delta$

$\Rightarrow |f(x)-4| < \in$ যেখানে $\in = \delta > 0$

$\therefore$ ক্ষুদ্র সংখ্যা $\in > 0$ এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি ক্ষুদ্রতর সংখ্যা $\delta > 0$ বিদ্যমান যেখানে [Therefore, there exists a small number $\delta > 0$ which is dependent on a small number $\varepsilon > 0$ where]

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-4| < \in.$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

উদাহরণ–8. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর।

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3 \quad \textbf{[NUH(NM)–2010, B.Sc(Pass)–2010, DUH–1980]}$$

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, প্রমাণ করিতে হইবে, যে কোন ক্ষুদ্র সংখ্যা $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি সংখ্যা $\delta > 0$ পাওয়া যাইবে যাহাতে [Let $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$. We shall prove that there exists a number $\delta > 0$ which is dependent on a small number $\varepsilon > 0$ such that]

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$$

এখন যেহেতু $x \to 1$ সেহেতু $|x-1| < \delta$ যেখানে δ পূর্বে জানা যে কোন যোগবোধক ক্ষুদ্রতম সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্র। তাহা হইলে [Now since $x \to 1$ so $|x-1| < \delta$ where δ is smaller than any known positive small number. So]

$$|x-1| < \delta < 1.$$

এখন $|f(x)-3| = \left|\frac{x^3-1}{x-1} - 3\right| = |x^2+x+1-3|$

$= |x^2+x-2| = |(x-1)^2 + 3(x-1)|$

$\leq |x-1|^2 + 3|x-1|$ $[\because |a+b| \leq |a| + |b|]$

$< |x-1| + 3|x-1|$ $[\because |x-1| < 1]$

$\therefore |f(x)-3| < 4|x-1|$

$\Rightarrow |f(x)-3| < 4\delta$ $[\because |x-1| < \delta]$

$\Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$ যেখানে $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

সুতরাং $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল $\delta > 0$ বিদ্যমান যাহাতে [So depending on $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$.]

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon \quad \therefore \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3.$$

উদাহরণ–9. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর। $\lim_{x\to 2} (x^3 - 3x + 7) = 9.$

[BSc(Pass)–2008]

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = x^3 - 3x + 7$ এবং $|x-2| < \delta$, $\delta > 0$

এখন যেহেতু $x \to 2$ সেহেতু $|x-2| < \delta$ যেখানে δ পূর্বে জানা যে কোন যোগবোধক ক্ষুদ্রতম সংখ্যার চেয়েও ক্ষুদ্র। [Now since $x \to 2$ so $|x-2| < \delta$ where δ is smaller than any known positive small number. So]

তাহলে $|x-2| < \delta < 1$.

এখন $|f(x)-9| = |x^3 - 3x + 7 - 9| = |x^3 - 3x - 2|$

$= |(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 9(x-2)|$

$\leq |x-2|^3 + 6|x-2|^2 + 9|x-2|$

$< |x-2| + 6|x-2| + 9|x-2|$ $[\because |x-2| < 1]$

$\therefore |f(x)-9| < 16|x-2|$

$\Rightarrow |f(x)-9| < 16\,\delta \Rightarrow |f(x)-9| < \varepsilon$ যেখানে $\delta = \frac{\varepsilon}{16}$.

সুতরাং $\varepsilon > 0$ এর উপর নির্ভরশীল $\delta > 0$ বিদ্যমান যাহাতে [So depending on $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$.]

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-9| < \varepsilon \quad \therefore \lim_{x\to 2} (x^3 - 3x + 7) = 9.$$

উদাহরণ–10. নিম্নে বর্ণিত f(x) ফাংশনটির জন্য

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ এবং (b) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$ নির্ণয় কর।

$$f(x) = \begin{cases} 1+2x \text{ যখন } -1/2 \le x < 0 \\ 1-2x \text{ যখন } 0 \le x < 1/2 \\ -1+2x \text{ যখন } x > 1/2 \end{cases}$$ **[NUH–2006, DUH–1986]**

সমাধান ঃ (a) $x = 0$ বিন্দুতে

ডান সীমা $= \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (1-2x) = 1 - 0 = 1$

বাম সীমা $= \lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} (1+2x) = 1 + 0 = 1$

যেহেতু $x = 0$ বিন্দুতে ডানপক্ষ সীমা = বামপক্ষ সীমা = 1 $\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

(b) $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে

ডান সীমা $= \lim_{x\to \frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}+} (-1+2x) = -1+1 = 0$

বাম সীমা $= \lim_{x\to \frac{1}{2}-} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}-} (1-2x) = 1-1 = 0$

যেহেতু $\lim_{x\to \frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}-} f(x) = 0$ $\therefore \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = 0$.

উদাহরণ–11. যদি $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{1/x} & \text{যখন } x \ne 0 \\ e^2 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুতে

ডান সীমা $= \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (1+2x)^{1/x}$

$= \lim_{x\to 0_+} \{(1+2x)^{1/2x}\}^2 = e^2$

বাম সীমা $= \lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} (1+2x)^{1/x}$

$= \lim_{x\to 0_-} \{(1+2x)^{1/2x}\}^2 = e^2$

যেহেতু $x = 0$ বিন্দুতে ডান সীমা = বাম সীমা $= e^2$ $\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = e^2$

উদাহরণ–12. নিম্নের ফাংশনটির $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর বিদ্যমানতা আলোচনা কর।

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{2}}, -1 < x < 0 \\ x^2, 0 \le x < 2 \end{cases}$$ **[DUH–1987]**

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুতে বাম সীমা $= \lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} e^{-\frac{|x|}{2}} = e^{-0} = 1$

ডান সীমা $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} x^2 = 0$

ডান এবং বাম মান বিদ্যমান আছে কিন্তু ইহারা সমান নয়।

সুতরাং $\lim f(x)$ এর সীমাস্থ মান নাই।

উদাহরণ–13. কোন বিন্দুতে একটি ফাংশনের সীমা অস্তিত্ব আছে যদিও ঐ বিন্দুতে ফাংশন অস্তিত্বহীন, উদাহরণ দ্বারা সত্যতা প্রমাণ কর। **[RUH–1979]**

সমাধান ঃ মনে করি $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

$x = 2$ বিন্দুতে ডান সীমা $= \lim_{x\to 2_+} f(x) = \lim_{x\to 2_+} \frac{x^2-4}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2_+} (x+2) = 4.$

বাম সীমা $= \lim_{x\to 2_-} f(x) = \lim_{x\to 2_-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2_-} (x+2) = 4$

যেহেতু ডান সীমা = বাম সীমা

$\therefore x = 2$ বিন্দুতে সীমার অস্তিত্ব আছে। আবার $f(2) = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$, বিদ্যমান নয়।

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব আছে কিন্তু ফাংশন অস্তিত্বহীন।

উদাহরণ–14. কোন বিন্দুতে একটি ফাংশনের অস্তিত্ব আছে, যদিও ঐ বিন্দুতে ঐ ফাংশনের সীমা অস্তিত্বহীন, উদাহরণ দ্বারা সত্যতা প্রমাণ কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = [x]$.

যখন $[x]$ দ্বারা x এর মানের বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা বুঝায় যাহা x হইতে বৃহত্তর নয়।

$x = 0$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} [x] = 0$, $\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} [x] = -1$

যেহেতু $\lim_{x\to 0_+} f(x) \ne \lim_{x\to 0_-} f(x)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে সীমার অস্তিত্ব নাই। আবার $f(0) = [0] = 0$, বিদ্যমান।

$\therefore x = 0$ বিন্দুতে $f(x) = [x]$ এর সীমার অস্তিত্ব বিদ্যমান নয় যদিও ফাংশনের অস্তিত্ব বিদ্যমান।

উদাহরণ–15. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ বিদ্যমান নয়।

সমাধান ঃ L. H. L. $= \lim_{x\to 0_-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0_-} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to 0_-} (-1) = -1$

R. H. L. $= \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0_+} (1) = 1$

এখন যেহেতু L. H. L $\neq$ R. H. L সেহেতু $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–16. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1985]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots - \left(x - \frac{1}{\lfloor 3}x^3 + \frac{1}{\lfloor 5}x^5 - \cdots\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\lfloor 3} + \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{\lfloor 5}\right)x^2 + \cdots\right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

উদাহরণ–17. $\lim_{x\to 0_+} x^{1/x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1984]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0_+} x^{1/x} = \lim_{x\to 0_+} e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$= e^{\infty(-\infty)}$ $[\because x \to 0_+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to \infty$ এবং $\ln x \to -\infty]$

$= e^{-\infty} = 0.$

উদাহরণ–18. মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$. **[RUH–1980, 1983]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \cdots}{x}\right)^{1/x}$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots\right)^{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^{1/x} \quad [\text{যেহেতু } x \to 0]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^{-6/x^2}\right\}^{-x/6} = \lim_{x\to 0} e^{-x/6} = e^0 = 1.$$

উদাহরণ–19. মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x}$.

[B.Sc(Pass)–2010, CUH–82, 84, 86]

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots}{x}\right)^{1/x}$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + \cdots\right)^{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^{1/x} \quad [\text{যেহেতু } x \to 0]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^{3/x^2}\right\}^{x/3}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{x/3} = e^0 = 1.$$

উদাহরণ–20. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$

সমাধান ঃ $\left|x \sin\frac{1}{x}\right| = |x| \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \quad \left[\because \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1\right]$

$$\Rightarrow \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

$$\therefore \left|\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}\right| \leq \left|\lim_{x\to 0} x\right| = 0$$

সুতরাং $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$ [প্রমাণিত]

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

2.A.1. ফাংশনের সীমা বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by the limit of a function?)

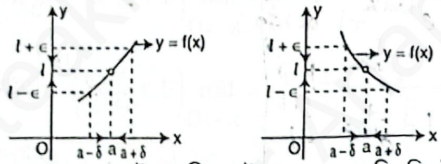
Ans : যদি একটি চলক x এর মান a এর উভয় দিক হইতে (ডান বা বাম) অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে l কে x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশনের সীমা বলে। ইহাকে $\lim_{x\to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.A.2. $(\delta - \epsilon)$ এর সাহায্যে ফাংশনের সীমার সংজ্ঞা দাও। (Define limit of function using $(\delta - \epsilon)$.)

Ans : যদি পূর্ব নির্ধারিত কোন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ϵ এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা যায় যেন $|f(x) - l| < \epsilon$ যখন $0 < |x - a| < \delta$, তবে l কে x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশনের সীমা বলে।

2.A.3. চিত্রের সাহায্যে সীমার ধারণা দাও। (Give the concept of limit with graph.)

Ans :

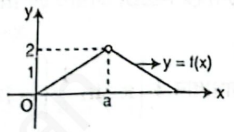


চিত্রে x এর মান a এর উভয় দিক হইতে a এর অতি নিকটবর্তী হইলে f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়।

$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = l.$

2.A.4. চিত্র হইতে $\lim_{x\to a} f(x)$ নির্ণয় কর। (Find $\lim_{x\to a} f(x)$ from graph.)

Ans : চিত্রে দেখা যায়, x এর মান a এর উভয় দিক হইতে a এর অতি নিকটবর্তী হইলে f(x) এর মান 2 এর নিকটবর্তী হয়।



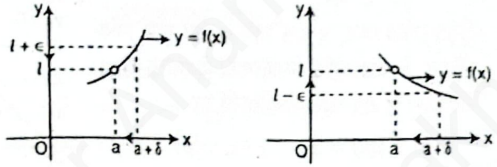
$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = 2.$

2.A.5. ফাংশনের ডানসীমা কি? (What is the right limit of a function?)

Ans : যদি একটি চলক x এর মান a এর ডান দিক হইতে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে l কে x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশনের ডানসীমা বলে। ইহাকে $\lim_{x\to a+} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.A.6. চিত্রের সাহায্যে ডান সীমার ধারণা দাও। (Give the concept of right limit with graph.)

Ans :



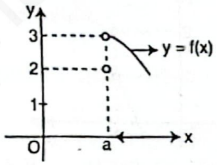
চিত্রে x এর মান a এর ডান দিক হইতে a এর অতি নিকটবর্তী হইলে f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়।

$\therefore \lim_{x\to a+} f(x) = l.$

2.A.7. চিত্র হইতে $\lim_{x\to a+} f(x)$ নির্ণয় কর। (Find $\lim_{x\to a+} f(x)$ from graph.)

Ans : চিত্রে দেখা যায়, x এর মান a এর ডান দিক হইতে a এর অতি নিকটবর্তী হইলে f(x) এর মান 3 এর অতি নিকটবর্তী হয়।

$\therefore \lim_{x\to a+} f(x) = 3.$

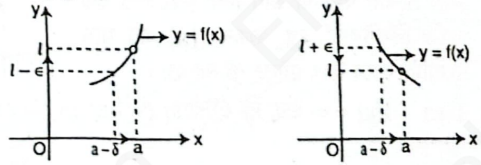


2.A.8. ফাংশনের বামসীমা কি? (What is left limit of a function?)

Ans : যদি একটি চলক x এর মান a এর বামদিক হইতে অগ্রসর হইয়া a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়, তবে l কে x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশনের বামসীমা বলে। ইহাকে $\lim_{x\to a-} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

2.A.9. চিত্রের সাহায্যে বাম সীমার ধারণা দাও। (Give the concept of left limit using graph.)

Ans :

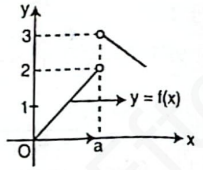


চিত্রে x এর মান a এর বাম দিক হইতে a এর অতি নিকটবর্তী হইলে f(x) এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর অতি নিকটবর্তী হয়।

$\therefore \lim_{x\to a-} f(x) = l.$

2.A.10. চিত্র হইতে $\lim_{x\to a-} f(x)$ নির্ণয় কর। (Find $\lim_{x\to a-} f(x)$ from graph.)

Ans : চিত্রে দেখা যায়, x এর মান a এর বাম দিক হইতে a এর অতি নিকটবর্তী হওয়ায় f(x) এর মান 2 এর অতি নিকটবর্তী হয়।

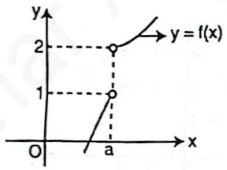


$\therefore \lim_{x\to a-} f(x) = 2.$

2.A.11. ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by existence of limit of function?)

Ans : যদি $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = l$ হয়, তবে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব আছে যেখানে $\lim_{x\to a+} f(x) = l$. আবার $\lim_{x\to a+} f(x) \neq \lim_{x\to a-} f(x)$ হইলে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের সীমায় অস্তিত্ব নাই।

2.A.12. চিত্র হইতে $\lim_{x\to a} f(x)$ নির্ণয় কর। (Find $\lim_{x\to a} f(x)$ from graph.)

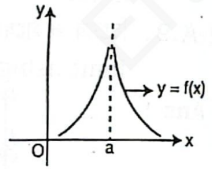


Ans : এখানে $\lim_{x\to a+} f(x) = 2$ এবং $\lim_{x\to a-} f(x) = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to a+} f(x) \neq \lim_{x\to a-} f(x)$, সুতরাং $\lim_{x\to a} f(x)$ বিদ্যমান নাই।

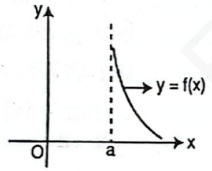
2.A.13. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$?)

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর বাম বা ডান দিক হইতে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন f(x) এর মান অসীমিতভাবে বৃহৎ হইতে বৃহত্তর হয়।



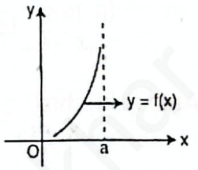
2.A.14. $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$?)

Ans : $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর ডান দিক হইতে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন f(x) এর মান অসীমিতভাবে বৃহৎ হইতে বৃহত্তর হয়।



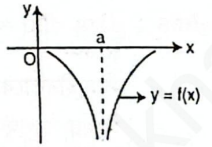
2.A.15. $\lim_{x\to a-} f(x) = \infty$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $\lim_{x\to a-} f(x) = \infty$?)

Ans : $\lim_{x\to a-} f(x) = \infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর বামদিক হইতে a এর অতিনিকটবর্তী হয়, তখন f(x) এর মান অসীমিতভাবে বৃহৎ হইতে বৃহত্তর হয়।



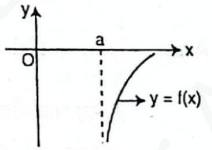
2.A.16. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ দ্বারা কি বোঝায়?
(What is meant by $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$?)

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর বাম বা ডান দিক হইতে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন f(x) এর মান অসীমিতভাবে ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হয়।



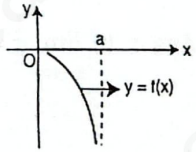
2.A.17. $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$ দ্বারা কি বোঝায়?
(What is meant by $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$?)

Ans : $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর ডান দিক হইতে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন f(x) এর মান অসীমিতভাবে ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হয়।



2.A.18. $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$ দ্বারা কি বোঝায়?
(What is meant by $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$?)

Ans : $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান a এর বাম দিক হইতে a এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন f(x) এর মান অসীমিতভাবে ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হয়।



2.A.19. সীমা নির্ণয় কর (Find limits) : (i) $\lim_{x\to a+} \frac{1}{x-a}$ (ii) $\lim_{x\to a-} \frac{1}{x-a}$

Ans : (i) $\lim_{x\to a+} \frac{1}{x-a} = \infty$ (ii) $\lim_{x\to a-} \frac{1}{x-a} = -\lim_{x\to a-} \frac{1}{a-x} = -\infty$

2.A.20. সীমা কত? (What are limits?)

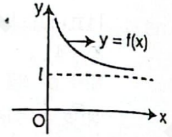
(i) $\lim_{x\to a_+} \frac{1}{(x-a)^2}$ (ii) $\lim_{x\to a_-} \frac{1}{(x-a)^2}$

Ans : (i) $\lim_{x\to a_+} \frac{1}{(x-a)^2} = \infty$

(ii) $\lim_{x\to a_-} \frac{1}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a_-} \frac{1}{(a-x)^2} = \infty.$

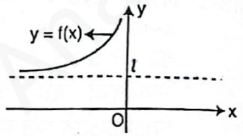
2.A.21. $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$?)

Ans : $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পেয়ে পূর্বে জানা বৃহত্তম সংখ্যা অপেক্ষা বড় হয়, তখন f(x) এর মান l এর অতি নিকটবর্তী হয়।



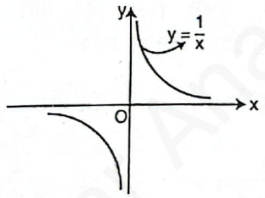
2.A.22. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ দ্বারা কি বোঝায়?
(What is meant by $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$?)

Ans : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ দ্বারা বোঝায়, যখন x এর মান সীমাহীনভাবে ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হয়, তখন f(x) এর মান l এর অতি নিকটবর্তী হয়।



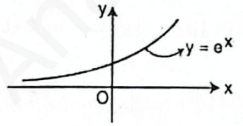
2.A.23. সীমা কত? (What are limits?) (i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ (ii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$

Ans : (i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (ii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$



2.A.24. সীমা কত? (What are limits?) (i) $\lim_{x\to\infty} e^x$ (ii) $\lim_{x\to-\infty} e^x$

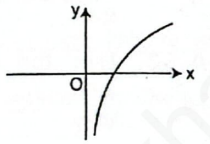
Ans : (i) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ (ii) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$



2.A.25. সীমা কত? (What is limit?) $\lim_{x\to\infty} \ln x$

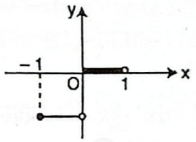
Ans : এখানে x এর মান সীমাহীনভাবে বৃহৎ হইতে বৃহত্তর হইলে $\ln x$ এর মানও বৃহৎ হইতে বৃহত্তম হয়।

$\therefore \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$



2.A.26. সীমা কত? (What are limits?) $\lim_{x\to0_+} [x]$ এবং $\lim_{x\to0_-} [x]$

Ans : $\lim_{x\to0_+} [x] = 0$ এবং $\lim_{x\to0_-} [x] = -1$



2.A.27. যদি $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ তবে $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ হইলে $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

2.A.28. যদি $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ হয় তবে $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ হইলে $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

2.A.29. $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ হইলে $\lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$

2.A.30. $\lim_{x\to a} f(x) = c$ (ধ্রুবক) এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হইলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = c$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হইলে $\lim_{x\to a} |(f(x) + g(x)| = \infty$

2.A.31. $\lim_{x\to a} f(x) = c$ (ধ্রুবক) এবং $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ হইলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = c$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ হইলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = -\infty$

2.A.32. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হইলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হইলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \infty$

2.A.33. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ হইলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ হইলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x) = -\infty$.

2.A.34. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ হইলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ হইলে $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ অনির্ণেয় আকার হইবে।

2.A.35. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হইলে $f(x) \cdot g(x)$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হইলে $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ অনির্ণেয় আকার হইবে।

2.A.36. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হইলে $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ কত?

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হইলে $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ অনির্ণেয় আকার হইবে।

2.A.37. স্যান্ডউইচ বা স্কুইজিং উপপাদ্যের বর্ণনা দাও। (State the sandwich or squeezing theorem.)

Ans : যদি x এর সমস্ত মানের জন্য $g(x) \le f(x) \le h(x)$

এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ হয় তবে $\lim_{x\to a} f(x) = l$ হইবে।

2.A.38. $\lim_{x\to a} f(x)$ ও $f(a)$ দ্বারা কি বোঝায়? (What are meant by $\lim_{x\to a} f(x)$ and $f(a)$?)

Ans : $\lim_{x\to a} f(x)$ দ্বারা বোঝায় $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমাস্থ মান এবং $f(a)$ দ্বারা বোঝায় $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান।

2.A.39. $f(x)$ ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে সীমাস্থমান বিদ্যমান কিন্তু ফাংশনের মান বিদ্যমান নয়। (Give an example of $f(x)$ where limitting value exists but functional value does not exist.)

Ans : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে সীমাস্থমান বিদ্যমান অর্থাৎ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (বিদ্যমান) কিন্তু ঐ বিন্দুতে ফাংশনের মান বিদ্যমান নয় অর্থাৎ $f(0)$ বিদ্যমান নয়।

2.A.40. $f(x)$ ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে ফাংশনের মান বিদ্যমান কিন্তু সীমাস্থমান বিদ্যমান নয়। (Give an example of $f(x)$ where functional value exists but limitting value does not exist.)

Ans : $f(x) = [x]$ ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের মান বিদ্যমান অর্থাৎ $f(0) = 0$ (বিদ্যমান) কিন্তু ঐ বিন্দুতে সীমাস্থমান বিদ্যমান নয়, কারণ $\lim_{x\to 0_+} [x] = 0$

এবং $\lim_{x\to 0_-} [x] = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} [x]$ বিদ্যমান নয়।

2.A.41. $f(x)$ ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের মান ও সীমাস্থমান উভয়ে বিদ্যমান। (Give an example of $f(x)$ where functional value and limitting value both exist at $x = 0$.)

Ans : $f(x) = |x|$ ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের মান ও সীমাস্থমান বিদ্যমান। অর্থাৎ $f(0) = 0$ এবং $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ (বিদ্যমান)।

2.A.42. $f(x)$ ফাংশনের উদাহরণ দাও, যেখানে $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের মান ও সীমাস্থমান বিদ্যমান নয়। (Give an example of $f(x)$, where functional value and limitting value both are not exist at $x = 0$.)

Ans : $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ফাংশনটির $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের মান ও সীমাস্থ মান বিদ্যমান নয়। অর্থাৎ $f(0)$ ও $\lim_{x\to 0} f(x)$ বিদ্যমান নয়। কারণ $f(0) = \frac{0}{0}$ (অসংজ্ঞায়িত)

এবং $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0_-} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

EXERCISE–2(A)

✪ মান নির্ণয় কর।

1. $\lim_{x\to 1} (x^2 - 2x + 1)$

2. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$

3. $\lim_{x\to -1} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x^3 - \frac{\pi^3}{8}}{x - \frac{\pi}{2}}$

5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

6. $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^2 + 7}{3x^2 - x}$

7. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{3x^4 + x}}{x^2 - 8}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$

9. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$ **[DUH–1990]**

10. $\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^n - 1}{x}$ **[DUH–1983]**

11. $\lim_{x\to 0} (1 - x)^{1/x}$

12. $\lim_{x\to \infty} (1 - 1/x)^x$

✪ $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর ঃ

13. $\lim_{x\to 4} (2x - 2) = 6$

14(i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ **[NUH–1999]**

(ii) $\lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$ **[NUH–2003]**

15. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = 8$

16. $\lim_{x\to 3} x^3 - 2x^2 + 1 = 10$

17(i). $\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4}$ **[DUH–1983]**

(ii). $\lim_{x\to 0} \frac{x + 1}{2x + 1} = 1$ **[NUH(NM)–2002]**

18. একটি ফাংশন f(x) কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হইল

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{যখন } x < 3 \\ 5 & \text{যখন } x = 3 \\ 2(5 - x) & \text{যখন } x > 3 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 3_+} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3_-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3} f(x)$ নির্ণয় কর।

19. যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 0_+} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0_-} f(x)$ এবং (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ নির্ণয় কর।

20. যদি $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ হয়, তবে $\lim_{x\to 0_+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to 0_-} f(x)$ নির্ণয় কর।

21. যদি $f(x) = \frac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$ হয়, তবে $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান আছে?

22. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ এর জন্য $\lim_{x\to 0} f(x)$ এর মান কি বিদ্যমান আছে?

যদি বিদ্যমান থাকে, তবে নির্ণয় কর।

23. উদাহরণসহ f(x) এর অবস্থাগুলি ব্যাখ্যা কর।

(i) f(a) অস্তিত্বহীন কিন্তু $\lim_{x\to a} f(x)$ এর অস্তিত্ব আছে।

(ii) f(a) এবং $\lim_{x\to a} f(x)$ উভয়ের অস্তিত্ব আছে কিন্তু উহারা অসমান।

24. যদি $f(x) = \frac{x^2}{(x - 1)(x - 2)}$ হয় তবে প্রমাণ কর।

(a) $\lim_{x\to 1_+} f(x) = -\infty$ এবং $\lim_{x\to 1_-} f(x) = \infty$

(b) $\lim_{x\to 2_+} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to 2_-} f(x) = -\infty$

25. যদি একটি ফাংশন f কে $f(x) = [x]$ দ্বারা বর্ণনা করা যায় যখন $[x]$ দ্বারা x এর মানের বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা বুঝায়, যাহা x হইতে বৃহত্তর নয়। তবে প্রমাণ কর।

$\lim_{x\to 1_+} f(x) = 1$ এবং $\lim_{x\to 1_-} f(x) = 0$.

26. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} \frac{3x}{|x| + x^2}$ বিদ্যমান নয়।

27. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} f(x)$ বিদ্যমান নয়

যেখানে $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x| + x^2} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

28. দেখাও যে $\lim_{x\to 2} f(x)$ বিদ্যমান নয়। যেখানে $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{7-x} & \text{যখন } x<2 \\ 7-x & \text{যখন } x>2 \end{cases}$

29. দেখাও যে $\lim_{x\to 3} f(x)$ বিদ্যমান। যেখানে $f(x) = \begin{cases} \frac{9}{6-x} & \text{যখন } x>3 \\ 6-x & \text{যখন } x<3 \end{cases}$

30. যদি $f(x) = x - [x]$ হয় তবে দেখাও যে
$\lim_{x\to 2} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

31. যদি $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} & \text{যখন } x\neq 1 \\ 1 & \text{যখন } x=1 \end{cases}$ হয় তবে দেখাও যে $\lim_{x\to 1} f(x)$ বিদ্যমান নয় কিন্তু $\lim_{x\to 2} f(x)$ এবং $\lim_{x\to -5} f(x)$ বিদ্যমান।

32. দেখাও যে $\lim_{x\to 1_+} \left([x] + \frac{|x-1|}{x-1} + 2\right) = 4$

33. দেখাও যে $\lim_{x\to 5_-} \frac{x}{[x]} \neq \lim_{x\to 5_+} \frac{x}{[x]}$

34. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} 1 - x + [x] - [1-x]$ বিদ্যমান নয়।

35. (i) দেখাও যে $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ এর সীমা বিদ্যমান নয়। **[NUH–2002]**

(ii) দেখাও যে $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ বিদ্যমান নয়।

ANSWER–2(A)

1.	0	2.	$\frac{3}{4}$	3.	$-\frac{1}{2}$
4.	$\frac{3\pi^2}{4}$	5.	4	6.	$\frac{5}{3}$
7.	$\sqrt{3}$	8.	$\frac{1}{4}$	9.	0
10.	n	11.	$\frac{1}{e}$	12.	$\frac{1}{e}$
18.	4, 4, 4	19.	0, 0, 0	21.	বিদ্যমান নাই

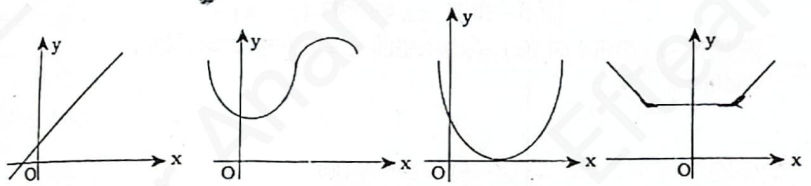
বিদ্যমান, 0.

Chapter–2(B)
অবিচ্ছিন্নতা
CONTINUITY

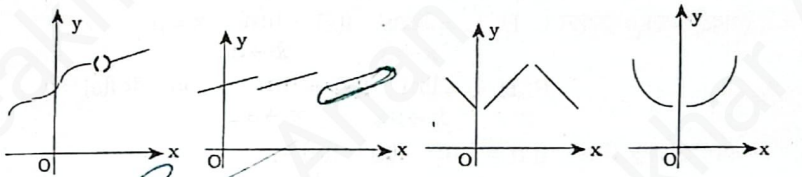
2.B.1. একটি ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করিতে যদি কোথাও ফাঁকা (gap) বা ভাঙ্গা (break) বিদ্যমান না থাকে তবে সাধারণ অর্থে ঐ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন (continuous) ফাংশন বলে। অন্যথায় ঐ ফাংশনটিকে বিচ্ছিন্ন (discontinus) ফাংশন বলে। অবিচ্ছিন্নতা এবং বিচ্ছিনতার ব্যাপক ধারণা ইহা হইতে অর্জন করা যায় না। তাই এ সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করিতে হইলে বিন্দুতে এবং ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্নতার সংজ্ঞা সম্বন্ধে ধারনা থাকার বিশেষ প্রয়োজন।

2.B.2 অবিচ্ছিন্ন এবং বিচ্ছিন্ন ফাংশনের কয়েকটি লেখচিত্র (Some graps of continuous and disconinuous functions) :

(i) নিম্নে প্রদত্ত $y = f(x)$ আকারের ফাংশনের প্রত্যেকটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের লেখচিত্র কারণ উহাদের কোনটিরই ফাঁকা বা ভাঙ্গা বিদ্যমান নাই ঃ



(ii) নিম্নে প্রদত্ত $y = f(x)$ আকারের ফাংশনের প্রত্যেকটি বিচ্ছিন্ন ফাংশনের লেখচিত্র কারণ উহাদের প্রত্যেকটিতে এক বা একাধিক ফাঁকা বা ভাঙ্গা বিদ্যমান ঃ



2.B.3. অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের সংজ্ঞা (Definition of a continuous Function) ঃ **[NUH–2002, 2009, BSc(Pass)–2007]**

সংজ্ঞা ঃ $x = a$ বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ কে অবিচ্ছিন্ন বলা হইবে যদি $f(a)$ সংজ্ঞায়িত $\lim_{x\to a} f(x)$ বিদ্যমান এবং $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ হয়। এখানে $\lim_{x\to a} f(x)$ দ্বারা বুঝায় x বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমাস্থমান এবং $f(a)$ দ্বারা বোঝায় $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান।

আবার $\lim_{x\to a} f(x)$ বিদ্যমান $\Leftrightarrow \lim_{x\to a_-} f(x) = \lim_{x\to a_+} f(x)$

সুতরাং উপরের সংজ্ঞাকে আমরা নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত
বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ কে অবিচ্ছিন্ন বলা হইবে যদি

(i) $f(a)$ সংজ্ঞায়িত হয়

(ii) $\lim_{x\to a_-} f(x)$ এবং $\lim_{x\to a_+} f(x)$ বিদ্যমান থাকে

(iii) $\lim_{x\to a_-} f(x) = \lim_{x\to a_+} f(x) = f(a)$ হয়।

[A function $f(x)$ is said to be continuous at $x = a$ if

(i) $f(a)$ is defined

(ii) $\lim_{x\to a_-} f(x)$ and $\lim_{x\to a_+} f(x)$ exist

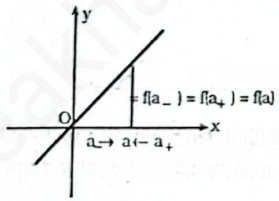
(iii) $\lim_{x\to a_-} f(x) = \lim_{x\to a_+} f(x) = f(a)$.]

$(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞা ঃ একটি ফাংশন $f(x)$ কে $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি প্রত্যেক $\varepsilon > 0$ এর জন্য ইহার উপর নির্ভরশীল একটি ক্ষুদ্র $\delta > 0$ পাওয়া যায় যেন [A function $f(x)$ is said to be continuous at $x = a$ if for every $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ depending on it such that

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ হয় যখন } |x - a| < \delta.$$

উদাহরণ–1. দেখাও যে $f(x) = x$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

সমাধান ঃ



(পদ্ধতি–1) ঃ এখানে L. H. L. $= \lim_{x\to a_-} f(x) = \lim_{x\to a_-} x = a$

R. H. L $= \lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_+} x = a$ এবং $f(a) = a$

এখন যেহেতু $\lim_{x\to a_-} f(x) = \lim_{x\to a_+} f(x) = f(a) = a$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

(পদ্ধতি–2) ঃ এখানে $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$ এবং $f(a) = a$

এখন যেহেতু $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ–2. দেখাও যে $f(x) = \sin x$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

সমাধান ঃ (পদ্ধতি–1) ঃ এখানে

L. H. L. $= \lim_{x\to a_-} f(x) = \lim_{x\to a_-} \sin x = \sin a$

R. H. L. $= \lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_+} \sin x = \sin a$ এবং $f(a) = \sin a$

এখন যেহেতু $\lim_{x\to a_-} f(x) = \lim_{x\to a_+} f(x) = f(a)$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

(পদ্ধতি–2) ঃ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ এবং $f(a) = \sin a$

এখন যেহেতু $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন। [প্রমাণিত]

✪ বামদিক এবং ডানদিক হইতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন ঃ

সংজ্ঞা ঃ $x = a$ বিন্দুতে একটি ফাংশন $f(x)$ বামদিক হইতে অবিচ্ছিন্ন হইবে যদি $\lim_{x\to a_-} f(x) = f(a)$ হয়।

উদাহরণ–3. (i) নিম্ন বর্ণিত ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে বামদিক হইতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন

$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{যখন } x \le 1 \\ 3 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$ কারণ এখানে $\lim_{x\to 1_-} f(x) = 2 = f(2)$.

সংজ্ঞা ঃ $x = a$ বিন্দুতে একটি ফাংশন $f(x)$ ডানদিক হইতে অবিচ্ছিন্ন হইবে যদি $\lim_{x\to a_+} f(x) = f(a)$ হয়।

উদাহরণ–3. (ii) নিম্ন বর্ণিত ফাংশনটি $x = 3$ বিন্দুতে ডানদিক হইতে অবিচ্ছিন্ন ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x \ge 3 \\ 5 & \text{যখন } x < 3 \end{cases} \text{ কারণ এখানে } \lim_{x\to 3_+} f(x) = 1 = f(3)$$

সংজ্ঞা ঃ যদি $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি উভয় দিক হইতে অবিচ্ছিন্ন হয় তবে ঐ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হইবে।

✪ বিচ্ছিন্ন ফাংশন ঃ যদি $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন না হয় তবে $f(x)$ কে বিচ্ছিন্ন ফাংশন বলা হয়। [If $f(x)$ is not continuous at $x = a$ then it is said to be discontinuous]

✪ বিচ্ছিন্ন হইবার শর্ত সমূহ ঃ নিম্নের যেকোন একটি শর্তে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন হইবে।

(i) $f(a)$ সংজ্ঞায়িত নয় অথবা $\lim_{x\to a} f(x)$ বিদ্যমান না হয়।

(ii) $f(a)$ সংজ্ঞায়িত এবং $\lim_{x\to a} f(x)$ বিদ্যমান কিন্তু $\lim_{x\to a} f(x) \ne f(a)$

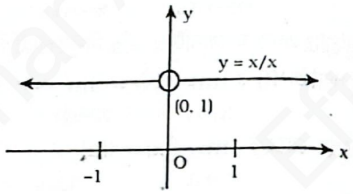
(iii) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ কেবলমাত্র বামদিক হইতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

(iv) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ কেবলমাত্র ডানদিক হইতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

(v) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করা না যায়।

উদাহরণ–4. ধরি $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x > 0 \\ 1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$ এখানে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর বিচ্ছিন্ন ফাংশন কারণ $f(0)$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–5. $y = f(x) = \frac{x}{x}$ একটি $x = 0$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন ফাংশন কারণ ঐ বিন্দুতে $f(0)$ সংজ্ঞায়িত নয়। প্রদত্ত ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন করা হইল।



✪ **ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন** [Continuous function on an interval]

সংজ্ঞা ঃ একটি ফাংশন $f(x)$ কে (a, b) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বলা হইবে যদি ঐ ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন হয়। [A function $f(x)$ is said to be continuous in an interval (a, b) if it is continuous at every point of the interval.]

উদাহরণ–6. ধরি $f(x) = x^2$, $1 \le x \le 5$, দেখাও যে $f(x)$ ফাংশনটি $[1, 5]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

সমাধান ঃ ধরি $a \in (1, 5)$. তাহা হইলে $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = a^2$ যেখানে $1 < a < 5$.

আবার $\lim_{x \to 1_+} f(x) = \lim_{x \to 1_+} x^2 = 1 = f(1)$

এবং $\lim_{x \to 5_-} f(x) = \lim_{x \to 5_-} x^2 = 25 = f(5)$

সুতরাং ফাংশনটি প্রদত্ত ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

2.B.4. বিচ্ছিন্নতার প্রকার (Clasification of Discontinuity) ঃ

বিচ্ছিন্নতার পাঁচটি প্রকার নিম্নরূপ।

(i) সাধারণ বিচ্ছিন্নতা **(Ordinary Discontinuity) ঃ** ইহা দুই প্রকারের

(1) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের মান নির্দিষ্ট

কিন্তু $\lim_{h \to 0} f(a + h) \ne \lim_{h \to 0} f(a - h) \ne f(a)$ এবং

(2) $\lim_{h \to 0} f(a + h)$ এবং $\lim_{h \to 0} f(a - h)$ এর মান সিদ্ধ না হয়।

(ii) মিশ্র বিচ্ছিন্নতা **(Mixed discontinuity) ঃ** $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের সীমাস্থ মানের একটি অংশ সিদ্ধ করিবে এবং অপর অংশ নির্ণয় করা যাবে না বা বিচ্ছিন্ন হইবে তখন উহাকে মিশ্র বিচ্ছিন্নতা বলা হয়।

$\lim_{h \to 0} f(a + h) \ne f(a)$ কিন্তু $\lim_{h \to 0} f(a - h) = f(a)$ হয়

এবং $\lim_{x \to 0} f(a - h) \ne f(a)$ কিন্তু $\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$ হয়।

(iii) দূরীকরণ যোগ্য বিচ্ছিন্নতা **(Removable discontin.** বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমাস্থ মান বিদ্যমান কিন্তু ফাংশনের মান বা $f(x)$ এর মান সম.

$\lim_{h \to 0} f(a + h) = \lim_{h \to 0} f(a - h) \ne f(a)$ $= l$

তখন এই ধরনের বিচ্ছিন্নতাকে দূরীকরণ বা অপসারণীয় বিচ্ছিন্নতা বলা হয়।

(iv) অসীম বিচ্ছিন্নতা **(Infinite discontinuity) ঃ** $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের সীমাস্থ মানের একটি কিংবা উভয় অসীম হইলে

অর্থাৎ $\lim_{h \to 0} f(a + h)$ এবং $\lim_{h \to 0} f(a - h)$ এর মান $+\infty$ বা $-\infty$ হইলে ফাংশনটিকে অসীম বিচ্ছিন্নতা বলা হয়।

(v) দোদুল্যমান বিচ্ছিন্নতা **(Osicillatory discontinuity) ঃ** কোন নির্দিষ্ট সীমাস্থ মান থাকে না কিন্তু ফাংশনের মান সসীম বা অসীমভাবে দোদুল্যমান থাকে, তবে ঐ বিচ্ছিন্ন বিন্দু সাপেক্ষে ফাংশনটিকে দোদুল্যমান বিচ্ছিন্নতা বলা হয়। $\sin \frac{1}{x}$ ফাংশন -1 এবং $+1$ এর মধ্যে দোদুল্যমান এবং $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন হয়।

✪ **সমাধানকৃত উদাহরণ মালা ঃ**

উদাহরণ–7. f বাস্তব ফাংশনটি $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{যখন } x \ne 2 \\ 3 & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$ দ্বারা প্রদত্ত হইলে দেখাও যে f ফাংশনটি $x = 2$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। f ফাংশনটিকে এমনভাবে সংজ্ঞায়িত কর যেন উহা $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়। [The real function f is given by $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{when } x \ne 2 \\ 3 & \text{when } x = 2 \end{cases}$. Show that the function f is discontinuous at $x = 2$. Define the function f in such a way that it is continuous at $x = 2$.] **[NUH(NM)–2005, DUH–1982, 1985]**

সমাধান ঃ যখন $x = 2$, তখন $f(x) = 3$ $\therefore f(2) = 3$

$\lim_{x \to 2_+} f(x) = \lim_{x \to 2_+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2_+} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

$\lim_{x \to 2_-} f(x) = \lim_{x \to 2_-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2_-} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন। [So the function $f(x)$ is discontinuous at $x = 2$.]

(দ্বিতীয় অংশ) ঃ $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার জন্য নিম্নরূপ সংজ্ঞায়িত হইল [For continuity $f(x)$ is defined at $x = 2$ in the following way]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{যখন } x \ne 2 \\ 4 & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$$

উদাহরণ–8. একটি ফাংশন f(x) নিম্নরূপ বর্ণিত হইল

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

প্রমাণ কর যে উহা $x = 0$ বিন্দুতে ডান অবিচ্ছিন্ন অথচ উহা উক্ত বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন নয়। [Prove that it is right continuous at $x = 0$ but not continuous at that point.] **[DUH–1976]**

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0_+} 1 = 1$

এবং $f(x) = 1 \quad \therefore f(0) = 1$

$\therefore \lim_{x\to 0_+} f(x) = f(0) = 1$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন ডান অবিচ্ছিন্ন। [So f(x) is right continuous at $x = 0$]

আবার $\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0_-} \frac{(-x)}{x} = -1$

$\therefore \lim_{x\to 0_+} f(x) \neq \lim_{x\to 0_-} f(x) \neq f(0).$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয় অর্থাৎ বিচ্ছিন্ন। [So f(x) is not continuous at $x = 0$.]

উদাহরণ–9. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{যখন } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{যখন } x \geq 2 \end{cases}$

দেখাও যে $x = 2$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

সমাধান ঃ $x = 2$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 2_+} f(x) = \lim_{x\to 2_+} x^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$\lim_{x\to 2_-} f(x) = \lim_{x\to 2_-} x + 2 = 2 + 2 = 4$

যখন $x = 2$ তখন $f(2) = 2^2 - 1 = 3. \quad \therefore \lim_{x\to 2_+} f(x) \neq \lim_{x\to 2_-} f(x) \neq f(2)$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ–10. $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে $f : R \to R$ ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর যেখানে [At $x = 0$ and $x = 1$ discuss the continuity of the function $f : R \to R$ where]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

[NUH–03, NUH(NM) 04, 09, BSc(Pass)–06, DUH–86, 88]

সমাধান ঃ (প্রথমত) $x = 0$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} x = 0$

$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} (x^2 + 1) = 0 + 1 = 1$

এখানে $\lim_{x\to 0_+} f(x) \neq \lim_{x\to 0_-} f(x)$

অতএব $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিছিন্ন। [Therefore f(x) is discontinuous at $x = 0$.]

(দ্বিতীয়ত) $x = 1$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$

$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} x = 1$

যখন $x = 1$ তখন $f(1) = 1$, যেহেতু $\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_-} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন। [So the function f(x) is continuous at $x = 1$.]

উদাহরণ–11. $f(x) = 3 + 2x$ যখন $-\frac{3}{2} \leq x < 0$

$= 3 - 2x$ যখন $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$

$= -3 - 2x$ যখন $x \geq \frac{3}{2}$

ফাংশনটির $x = 0$ এবং $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর। [Investigate the continuity of the function at $x = 0$ and $x = \frac{3}{2}$.]

[NUH–2007, 2009, NUH(NM)–2003, 2007, DUH–1982]

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (3 - 2x) = 3 - 0 = 3$

$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} (3 + 2x) = 3 + 0 = 3$

যখন $x = 0$ তখন $f(0) = 3 - 0 = 3$

$\therefore \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_-} f(x) = f(0) = 3$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। [So the function is continuous at $x = 0$.]

$x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে $\lim_{x\to \frac{3}{2}+} f(x) = \lim_{x\to \frac{3}{2}+} (-3 - 2x) = -3 - 2.\frac{3}{2} = -6$

$\lim_{x\to \frac{3}{2}-} f(x) = \lim_{x\to \frac{3}{2}-} (3 - 2x) = 3 - 2.\frac{3}{2} = 0$

$\therefore \lim_{x\to\frac{3}{2}+} f(x) \neq \lim_{x\to\frac{3}{2}-} f(x)$

সুতরাং $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন। [So the function is discontinuous at $x = \frac{3}{2}$.]

উদাহরণ-12. যদি $f(x) = \begin{cases} a+x & \text{যখন } x \geq 0 \\ a-x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

তবে $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর। [Test the continuity of the function f(x) at x = 0.] **[RUH-1981]**

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুতে $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} (a+x) = a+0 = a$

$\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-} (a-x) = a-0 = a$

যখন $x = 0$ তখন $f(0) = a+0 = a$ $\therefore \lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0-} f(x) = f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। [So the function is continuous at x = 0.]

উদাহরণ-13. যদি $f(x) = -x$ যখন $x \leq 0$

$= x$ যখন $0 < x < 1$

$= 1-x$ যখন $x \geq 1$

তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন এবং $x = 1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। [Show that the function f(x) is continuous at x = 0 and discontinuous at x = 1.] **[DUH-1975, RUH-1980]**

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুতে $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} x = 0$

$\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-} (-x) = 0$

যখন $x = 0$ তখন $f(0) = 0$, $\therefore \lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0-} f(x) = f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন। [So the function is continuous at x = 0]

$x = 1$ বিন্দুতে $\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} (1-x) = 1-1 = 0$

এবং $\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} x = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to1+} f(x) \neq \lim_{x\to1-} f(x)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন। [So the function is discontinuous at x = 1]

উদাহরণ-14. যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$

হয় তবে $x = 1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর। [Test the continuity of the function f(x) at x = 1.] **[CUH-1981]**

সমাধান ঃ $x = 1$ বিন্দুতে $\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} (2x-1) = 2.1-1 = 1$

$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} x = 1$

যখন $x = 1$ তখন $f(1) = 1$, যেহেতু $\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1-} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ-15. যদি $f(x) = \begin{cases} -x & \text{যখন } x \leq 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x \leq 1 \\ 2-x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$

তবে $x = 0$, $x = 1$ বিন্দুদ্বয়ে উহার অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর। **[DUH-1989]**

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুতে $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} x = 0$

$\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-} (-x) = 0$

যখন $x = 0$ তখন $f(0) = 0$, যেহেতু $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0-} f(x) = f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয় অংশ) $x = 1$ বিন্দুতে $\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} (2-x) = 2-1 = 1$

$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} x = 1$

যখন $x = 1$ তখন $f(1) = 1$, যেহেতু $\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1-} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ-16. যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 1 \\ 2.5 & \text{যখন } x = 1 \text{ হয়} \\ x^2+5 & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$

$x = 1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর। **[JUH-1983]**

সমাধান ঃ $x = 1$ বিন্দুতে $\lim_{x\to1+} f(x) \lim_{x\to1+} (x^2+5) = 1+5 = 6$

$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} x^2 = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to1+} f(x) \neq \lim_{x\to1-} f(x)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ–17. একটি ফাংশন $f(x)$ কে $(-4, 4)$ ব্যবধিতে নিম্নরূপে বর্ণনা করা হইল

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{যখন } -4 \le x < -1 \\ 4 & \text{যখন } -1 \le x \le 0 \\ 4+x^2 & \text{যখন } 0 < x \le 4 \end{cases}$$ দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f($

ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু $x = -1$ বিন্দুতে উহা বিচ্ছিন্ন। **[RUH–1969]**

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (4+x^2) = 4+0 = 4$

এবং $\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} 4 = 4$

যখন $x = 0$ তখন $f(0) = 4$, যেহেতু $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_-} f(x) = f(0)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয় অংশ) $x = -1$ বিন্দুতে $\lim_{x\to(-1)+} f(x) = \lim_{x\to(-1)+} 4 = 4$

এবং $\lim_{x\to(-1)-} f(x) = \lim_{x\to(-1)-} (1+x) = 1+(-1) = 0$

যেহেতু $\lim_{x\to(-1)+} f(x) \ne \lim_{x\to(-1)-} f(x)$

সুতরাং $x = -1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ–18. ফাংশন f নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত হইল

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{যখন } x \le 0 \\ 5x-4 & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ 4x^2-3x & \text{যখন } 1 < x < 2 \\ 3x+4 & \text{যখন } x \ge 2 \end{cases}$$ $x = 0, 1, 2$ বিন্দুতে ফাংশন f এর

অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর। **[NUH–2010(Old), DUH–1990, RUH–1987]**

সমাধান ঃ (প্রথমত) $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (5x-4) = 0-4 = -4$$

এবং $\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} (-x^2) = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0_+} \ne \lim_{x\to 0_-} f(x)$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয়ত) $x = 1$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} (4x^2-3x) = 4-3 = 1$

এবং $\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} 5x-4 = 5-4 = 1$

যখন $x = 1$ তখন $f(1) = 5-4 = 1$, যেহেতু $\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_-} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

(তৃতীয়ত) $x = 2$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 2_+} f(x) = \lim_{x\to 2_+} (3x+4) = 6+4 = 10$

এবং $\lim_{x\to 2_-} f(x) = \lim_{x\to 2_-} (4x^2-3x) = 16-6 = 10$

যখন $x = 2$ তখন $f(2) = 6+4 = 10$, $\therefore \lim_{x\to 2_+} f(x) = \lim_{x\to 2_-} f(x) = f(2)$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ–19. যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2} & \text{যখন } x \ne 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

প্রমাণ কর যে $a = 1$ না হইলে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন হইবে।

সমাধান ঃ যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 1$, $\therefore f(0) = 1$

এখন $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0_+} \left(\dfrac{\sin ax}{ax}\right)^2 . a^2$

$= 1 . a^2 = a^2$

$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0_-} \left(\dfrac{\sin ax}{ax}\right)^2 . a^2 = a^2$

সুতরাং $a \ne 1$ হইলে $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_-} f(x) \ne f(0)$

এবং $a = 1$ হইলে $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_-} f(x) = f(0)$

কাজেই $a = 1$ না হইলে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ–20. নিম্ন বর্ণিত ফাংশনের $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর। $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 < x \le 2 \\ 1+x^2 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$ **[RUH–1979]**

সমাধান ঃ (প্রথমত) $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা করি।

$\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} 0 = 0$, $\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} \ln x = \ln 1 = 0$

এবং $f(1) = \ln 1 = 0$ যেহেতু $\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_-} f(x) = f(1)$

কাজেই $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয়ত) $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষ কর।

$$\lim_{x\to 2_+} f(x) = \lim_{x\to 2_+} (1+x^2) = 1 + 2^2 = 5$$

$$\lim_{x\to 2_-} f(x) = \lim_{x\to 2_-} (0) = 0$$

যেহেতু $\lim_{x\to 2_+} f(x) \neq \lim_{x\to 2_-} f(x)$

কাজেই $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

2.B.1. $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন বলিতে কি বুঝ? *(What do you mean by the functions f(x) is continuous at a point x = a?)* **[NUH-2010]**

Ans : যদি $\lim_{x\to a_+} f(x)$ ও $\lim_{x\to a_-} f(x)$ সসীম বা বিদ্যমান হয় এবং $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_-} f(x) = f(a)$ হয়, তবে $f(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হইবে।

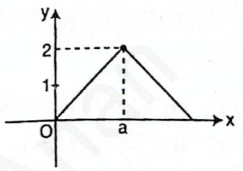
2.B.2. বিচ্ছিন্ন ফাংশন কি? (What is discontinuous function.)

Ans : কোন ফাংশন কোন বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন না হইলে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটিকে বিচ্ছিন্ন ফাংশন বলে।

2.B.3. $(\delta - \epsilon)$ এর সাহায্যে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define continuous function using $(\delta - \epsilon)$.) **[NUH(NM)-2010]**

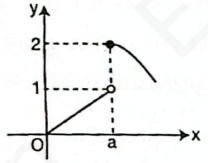
Ans : যদি পূর্ব নির্ধারিত কোন ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ϵ এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা যায় যেন $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ যখন $0 < |x - a| < \delta$, তবে $f(x)$ কে $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বলা হয়।

2.B.4. চিত্র হইতে $\lim_{x\to a_+} f(x)$, $\lim_{x\to a_-} f(x)$ এবং $f(a)$ নির্ণয় কর। [Find $\lim_{x\to a_+} f(x)$, $\lim_{x\to a_-} f(x)$ and $f(a)$ from graph.]



Ans : চিত্র হইতে পাই, $\lim_{x\to a_+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to a_-} f(x) = 2$ এবং $f(a) = 2$.

2.B.5. $f(x)$ ফাংশনের প্রদত্ত চিত্রানুযায়ী $f(x)$ ফাংশন কি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন? (According to given graph of f(x), Is f(x) is continuons function at x = a?)

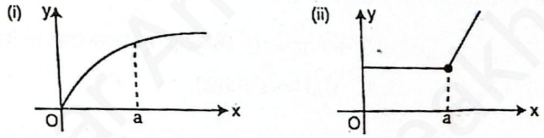


Ans : চিত্র হইতে পাই, $\lim_{x\to a_+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to a_-} f(x) = 1$ এবং $f(x) = 2$.

যেহেতু $\lim_{x\to a_+} f(x) \neq \lim_{x\to a_-} f(x)$, সুতরাং ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন নয়।

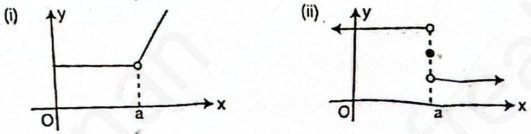
2.B.6. $f(x)$ এর দুইটি নমুনা লেখচিত্র আঁক যেন, ইহা $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়। (sketch two sample graph of f(x) such that, it is continuous at x = a.)

Ans : নিম্নে $f(x)$ এর দুইটি নমুনা লেখচিত্র আঁকা হইল যেখানে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।



2.B.7. $f(x)$ এর দুইটি নমুনা লেখচিত্র আঁক যেন, ইহা $x = a$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন হয়। (Sketch two sample graph of f(x) such that, it is discontinuous at x = a.)

Ans : নিম্নে $f(x)$ এর দুইটি নমুনা লেখচিত্র আঁকা হইল যেখানে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।



2.B.8. একটি ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define continuous function in a interval.)

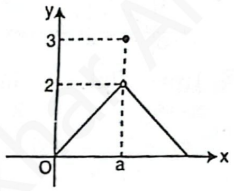
Ans : একটি ফাংশন f(x) কে (a, b) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বলা হইবে যদি ঐ ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে f(x) অবিচ্ছিন্ন হয়।

2.B.9. দূরীকরণযোগ্য বিচ্ছিন্নতা কি? (What is removable discontinuity.)

Ans : যদি $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_-} f(x) \neq f(a)$ হয়, তবে f(x) কে x = a বিন্দুতে দূরীকরণযোগ্য (removable) বিচ্ছিন্ন ফাংশন বলে।

2.B.10. f(x) ফাংশনের নমুনা লেখচিত্র আঁক যেন, ইহা x = a বিন্দুতে দূরীকরণযোগ্য বিচ্ছিন্ন হয়। (Draw a sample graph of f(x) such that, it is removable discontinuous at x = a.)

Ans :



চিত্র হইতে পাই, $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_-} f(x) = 2$ কিন্তু f(a) = 3

সুতরাং ইহা দূরীকরণযোগ্য (removable) বিচ্ছিন্ন।

2.B.11. একটি ফাংশনের উদাহরণ দাও যাহা একটি বিন্দুতে দূরীকরণযোগ্য বিচ্ছিন্ন হয়। [Give an example of a function which is removable discontinuous at a point.)

Ans : $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ফাংশনটি x = 2 বিন্দুতে দূরীকরণযোগ্য বিচ্ছিন্ন। কারণ $\lim_{x\to 2_+} f(x) = \lim_{x\to 2_-} f(x) = 4 \neq f(2)$.

2.B.12. মনে করি y = f(x) একটি বহুপদী ফাংশন। কোন্ ব্যাবধিতে ইহা অবিচ্ছিন্ন? (Let y = f(x) is a polynomial function. Which is the interval where it is continuous?)

Ans : y = f(x) বহুপদী ফাংশন হওয়ায় ইহা x এর সমস্ত মানের জন্য অবিচ্ছিন্ন হইবে অর্থাৎ (– ∞, ∞) ব্যবধিতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হইবে।

2.B.13. কোন্ ব্যবধিতে y = sin x ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন? (Which is the interval where the function y = sin x is continuous?)

Ans : y = sin x ফাংশনটি (– ∞, ∞) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

2.B.14. ব্যবধি লিখ যেখানে y = cos x ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। (Write the interval where the function y = cos x is continuous.)

Ans : y = cos x ফাংশনটি (– ∞, ∞) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

2.B.15. ব্যবধি লিখ যেখানে $f(x) = e^x$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। (Write the interval where the function $f(x) = e^x$ is continuous.)

Ans : $f(x) = e^x$ ফাংশনটি (– ∞, ∞) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

2.B.16. ব্যবধি লিখ যেখানে f(x) = *ln* x ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। (Write the interval where the function f(x) = *ln* x is continuous.)

Ans : f(x) = *ln* x ফাংশনটি (0, ∞) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

2.B.17. কোন্ বিন্দুতে মূলদীয় বহুপদী ফাংশন বিচ্ছিন্ন? (Which are the points where the rational polynomial function is discontinuous?)

Ans : যে সকল বিন্দুতে মূলদীয় বহুপদী ফাংশনের হর শূন্য হয়, ঐ সকল বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন হইবে।

2.B.18. কোন্ কোন্ বিন্দুতে $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)(x-2)}$ মূলদীয় বহুপদী ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন? (Which are the points where the rational polynomial function $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)(x-2)}$ is discontinuous?)

Ans : যেহেতু x = 1 এবং x = 2 বিন্দুতে $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)(x-2)}$ ফাংশনটির হর শূন্য হয়, সুতরাং x = 1 এবং x = 2 বিন্দুতে প্রদত্ত ফাশনটি বিচ্ছিন্ন হইবে।

2.B.19. কোন বিন্দুতে $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন? (Which is the point where the function $f(x) = \frac{1}{x}$ is discontinuous?)

Ans : x = 0 বিন্দুতে $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

2.B.20. কোন্ বিন্দুতে $f(x) = \frac{2x+1}{x(x-1)}$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন? (Which are the points where the function $f(x) = \frac{2x+1}{x(x-1)}$ is continuous?)

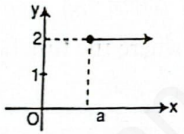
Ans : x = 0 এবং x = 1 ব্যতীত x এর সমস্ত বিন্দুতে $f(x) = \frac{2x+1}{x(x-1)}$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

2.B.21. ডান অবিচ্ছিন্ন ফাংশন কি? (What is the right continuous function?)

Ans : যদি $\lim_{x \to a_+} f(x) = f(a)$ হয়, তবে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি ডান অবিচ্ছিন্ন হইবে।

2.B.22. $f(x)$ এর একটি নমুনা লেখচিত্র আঁক যেন, ইহা $x = a$ বিন্দুতে ডান অবিচ্ছিন্ন হয়। [Draw a sample graph of $f(x)$ such that, it is right continuous at $x = a$.)

Ans :

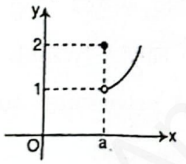


চিত্র হইতে পাই, $\lim_{x \to a_+} f(x) = f(a) = 2$

$\therefore x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটি ডান অবিচ্ছিন্ন।

2.B.23. $f(x)$ এর একটি নমুনা লেখচিত্র আঁক যেন, ইহা $x = a$ বিন্দুতে ডান অবিচ্ছিন্ন না হয়। (Draw a sample graph of $f(x)$ such that, it is not right continuous at $x = a$.)

Ans :



চিত্র হইতে পাই, $\lim_{x \to a_+} f(x) = 1$ এবং $f(a) = 2$

যেহেতু $\lim_{x \to a_+} f(x) \neq f(a)$, সুতরাং ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে ডান অবিচ্ছিন্ন নয়।

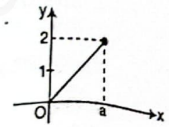
2.B.24. বাম অবিচ্ছিন্ন ফাংশন কি? (What is left continuous function?)

Ans : যদি $\lim_{x \to a_-} f(x) = f(a)$ হয়, তবে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি বাম অবিচ্ছিন্ন হইবে।

2.B.25. $f(x)$ এর একটি নমুনা লেখচিত্র আঁক যেন, ইহা $x = a$ বিন্দুতে বাম অবিচ্ছিন্ন হয়। (Draw a sample graph of $f(x)$ such that, it is left continuous at $x = a$.)

Ans : চিত্র হইতে পাই, $\lim_{x \to a_-} f(x) = f(a) = 2$

$\therefore x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটি বাম অবিচ্ছিন্ন।



EXERCISE–2(B)

1. প্রমাণ কর $x = 2$ বিন্দুতে $f(x) = x^2 + 1$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

2. যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ যখন } x \neq 1 \\ 2 \text{ যখন } x = 1 \end{cases}$ তবে দেখাও যে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন।

3. একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হইল

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 1 - x & \text{যখন } 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

দেখাও যে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন। **[DUH–1964]**

4. দেখাও যে $f(x) = |x|$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন। **[RUH–1985]**

5. যদি $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \text{ যখন } x \neq 0 \\ 1 \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$ দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়।

6. যদি $y = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x \leq 1 \\ x & \text{যখন } 1 < x \leq 2 \\ 1/4\, x^3 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$ তবে দেখাও যে $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে y অবিচ্ছিন্ন।

7. যদি $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ হয়, তবে $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর।

8. $x = 2$ বিন্দুতে নিম্নলিখিত ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতার আলোচনা কর।

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন } 1 < x \leq 2 \\ 15 & \text{যখন } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$ **[DUH–1980]**

9. $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ ফাংশন $x = 4$ বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত নয়। $f(4)$ এর মান কত হইলে উহা $x = 4$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হইবে। **[DUH–1975]**

10. $x \neq 2$ এর জন্য $f(x)$ ফাংশনটি $\frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$ এর সমান। $f(x)$ কে $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন করার জন্য $f(2)$ এর মান কত হইবে? **[DUH–1979]**

11. যদি $f(x) = \begin{cases} -\cos x \text{ যখন } x \neq 0 \\ \cos x \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$

তবে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর। **[DUH–1981]**

12. যদি $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } x^2 > 1 \\ 1 & \text{যখন } x^2 < 1 \\ 1/2 & \text{যখন } x^2 = 1 \end{cases}$ তবে দেখাও যে $x = 1$ এবং $x = -1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন হইবে। x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত হওয়া সত্ত্বেও কেন বিচ্ছিন্ন হইল তাহা বর্ণনা কর।

13. একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হইল।

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(b^2 - a^2) & \text{যখন } 0 \le x \le a \\ \frac{b^2}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^3}{3x} & \text{যখন } a < x \le b \\ \frac{b^3 - a^3}{3x} & \text{যখন } x > b \end{cases}$$

তবে দেখাও যে x এর সকল যোগবোধক মানের জন্য $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন। **[RUH–1988]**

14. যদি $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{যখন } x > 0 \\ 2 & \text{যখন } x = 0 \\ 1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$ তবে $\lim_{x \to 0} f(x)$ নির্ণয় কর $x = 0$ বিন্দুতে উহা কি অবিচ্ছিন্ন? **[RUH–1978]**

15. $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর।

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi/x) & \text{যখন } x \ne 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$ **[DUH–1978]**

16. যদি $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{যখন } x \ne 0 \\ 4 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন। তুমি কি $f(0)$ কে এমনভাবে সংজ্ঞায়িত করিতে পার যেন উহা $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়। **[BSc(Pass)–2007]**

17. $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা পরিক্ষা কর।

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{2}} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 2 \end{cases}$$

18. যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 0 & \text{যখন } x = 1/2 \\ x + 3 & \text{যখন } 1/2 < x \le 1 \end{cases}$ তবে যে সকল বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন সেই সকল বিন্দু নির্ণয় কর।

19. এইরূপ দুইটি ফাংশনের উদাহরণ দাও যাহাদের লিমিটের অস্তিত্ব আছে, কিন্তু বিচ্ছিন্ন।

20. দেখাও $f(x) = \begin{cases} \sin 3x / x & \text{যখন } x \ne 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

21. দেখাও $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{যখন } x \ne 4 \\ 3x - 4 & \text{যখন } x = 4 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 4$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

22. দেখাও যে $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 9)/(x - 3) & \text{যখন } x > 3 \\ 6 & \text{যখন } x = 3 \\ 3x - 3 & \text{যখন } x < 3 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 3$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

24. দেখাও $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \\ 2x + 1 & \text{যখন } x > 0 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

25. দেখাও $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} & \text{যখন } x \ne 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

26. দেখাও যে $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{3x} & \text{যখন } x \ne 0 \\ a & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হইবে যদি $a = \frac{5}{3}$ হয়।

27. দেখাও $f(x) = \begin{cases} \frac{6 \cos x}{\pi - 2x} & \text{যখন } x \ne \pi/2 \\ 3 & \text{যখন } x = \pi/2 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

28. দেখাও যে $f(x) = \sin |x|$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

29. দেখাও যে $f(x) = \begin{cases} \cos x + \frac{\sin x}{x} + 1 & \text{যখন } x \ne 0 \\ 3 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

30. দেখাও যে $f(x) = \begin{cases} \sin x + \frac{\tan x}{x} & \text{যখন } x \ne 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

31. দেখাও যে $a = \frac{2}{5}$ হইলে $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{5x} & \text{যখন } x \ne 0 \\ a & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

32. দেখাও $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\tan^{-1}x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

33. যদি $a = -1$ হয় তবে দেখাও যে $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 2}{a - 1} & \text{যখন } x \neq 1 \\ -2a & \text{যখন } x = 1 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

34. দেখাও যে $f(x) = \begin{cases} 1/2 - x & \text{যখন } 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & \text{যখন } x = 1/2 \\ 3/2 - x & \text{যখন } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

35. দেখাও যে $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + x^3 + 2x^2}{\tan^{-1}x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

ANSWER–2(B)

7. বিচ্ছিন্ন 8. বিচ্ছিন্ন 9. $f(4) = 8$ 10. $f(2) = 7$
11. বিচ্ছিন্ন 14. 1, বিচ্ছিন্ন 15. বিচ্ছিন্ন 17. বিচ্ছিন্ন।



—x—

Chapter–2(C)
অন্তরীকরণ যোগ্যতা
DIFFERENTIABILITY

2.C.1. ফাংশনের ডেরিভেটিভ (Derivative of a Function) : [NUH-2002, DUH-2002]

সংজ্ঞা : যদি $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ..... (1) কে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর ডেরিভেটিভ বলা হইবে যদি (1) এর লিমিট বিদ্যমান থাকে।

[Let the function $f(x)$ is defined at $x = a$. Then

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{..... (1)}$$

is called the derivative of $f(x)$ at $x = a$ provided the limit of (1) exists]

ফাংশন $f(x)$ এর $x = a$ বিন্দুতে ডেরিভেটিভকে অর্থাৎ (1) কে নিম্নলিখিতভাবেও সংজ্ঞায়িত করা যায় [The derivative of $f(x)$ at $x = a$ can also be defined by]

$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ .....(2) বা $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ..... (3)

বিশেষ দ্রষ্টব্য : ডেরিভেটিভকে অনেক সময় অন্তরক সহগ (differential coefficient) বা অন্তরজও বলা হয়।

2.C.2. অন্তরীকরণযোগ্য (Differentiable) ফাংশন : ফাংশন $f(x)$ কে $x = a$ বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্য বলা হইবে যদি ইহার ঐ বিন্দুতে ডেরিভেটিভ বিদ্যমান থাকে।

2.C.3. বাম ডেরিভেটিভ (Left Hand Derivative or L. H. D) বা ডান ডেরিভেটিভ (Right Hand Derivative বা R. H. D) :

সংজ্ঞা : যদি $\lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ বিদ্যমান থাকে তবে ইহাকে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ এর বাম ডেরিভেটিভ (বা L. H. D.) বলা হয় এবং ইহাকে $f'_-(a)$ বা $Lf'(a)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ $f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

[If $\lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ exists then it is called the left derivative (L. H. D.) of $f(x)$ at $x = a$ and denoted it by $L'(a)$ or $Lf'(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.]

সংজ্ঞা ঃ যদি $\lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ বিদ্যমান থাকে তবে ইহাকে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ এর ডান ডেরিভেটিভ (বা R. H. D.) বলা হয় এবং ইহাকে $f'_+(a)$ (বা $Rf'(a)$) দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ $f'_+(a) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

[If $\lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ exists then it is called the right derivative (R. H. D.) of f(x) at x = a and denoted it by

$$R'(a) \text{ or } Rf'(a) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.]$$

সংজ্ঞা ঃ $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের যদি L. H. D. = R. H. D. হয়, অর্থাৎ অথবা যদি $Lf'(a) = Rf'(a)$ হয় তবে $f(x)$ কে $x = a$ বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্য ফাংশন বলা হয়। [The function f(x) is said to be differentiable x = a if L. H. D. = R. H. D. that is, $Lf'(a) = Rf'(a)$.]

2.C.4. ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য ফাংশন (Differentiable function in an intervals) : যদি (a, b) ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ এর ডেরিভেটিভ বিদ্যমান থাকে তবে ঐ ব্যবধিতে $f(x)$ কে অন্তরীকরণ যোগ্য ফাংশন বলা হয়।

সংজ্ঞা ঃ [a, b] ব্যবধিতে ফাংশন $f(x)$ কে অন্তরীকরণ যোগ্য বলা হইবে যদি ব্যবধি (a, b) এ $f(x)$ অন্তরীকরণযোগ্য হয় এবং আরো যদি $f'_+(a)$ এবং $f'_-(b)$ এর উভয়ে বিদ্যমান থাকে।

উপপাদ্য–1. যদি $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণ যোগ্য হয় তবে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হইবে। [If the function f(x) is differentiable at x = a then the function is continuous at the point.] **[NUH–1997, NU(Nas)–2002, DUHT–1951, 1985, 1988]**

প্রমাণ ঃ যেহেতু $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণ যোগ্য। [Since f(x) is differentiable at x = a.]

সুতরাং $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ একটি সসীম রাশি।

এখন $\lim_{h\to 0} [f(a+h)-f(a)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times h$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times \lim_{h\to 0} h = f'(a) \times 0 = 0$

$\therefore \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ [$\because f(a) =$ একটি সসীম রাশি]

অতএব $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন। [Therefore f(x) is continuous at x = a]

মন্তব্য ঃ $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইলে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য হইতে পারে নাও হইতে পারে। দুইটি উদাহরণের সাহায্যে উহার সত্যতা যাচাই করা হইল।

উদাহরণ–1. $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = x^2 + 2$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরীকরণ যোগ্য।

সমাধান ঃ (প্রথমত) $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা

$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} (x^2+2) = 1+2 = 3$$

$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} (x^2+2) = 1+2 = 3$$

এবং $f(1) = 1^2 + 2 = 3$

$\therefore \lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_-} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয়ত) $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অন্তরীকরণ যোগ্যতা আলোচনা।

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{(1+h)^2+2-3}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0_+} (h+2)$$

$$= (0+2) = 2$$

$$\text{এবং } Lf'(1) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{(1+h)^2+2-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0_-} (2+h) = 2+0 = 2$$

যেহেতু $Rf'(1) = Lf'(1) = 2$. সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য। অর্থাৎ $f'(1)$ বিদ্যমান আছে এবং $f'(1) = 2$.

বিঃ দ্রঃ উপরে উল্লেখিত উদাহরণটিতে লক্ষ্য করিলে দেখা যায় $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন এবং ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য।

উদাহরণ–2. যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 1-x & \text{যখন } 1/2 \le x < 1 \end{cases}$ তবে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিন্তু ঐ বিন্দুতে f(x) ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।

[If $f(x) = \begin{cases} x & \text{when } 0 \le x < 1/2 \\ 1-x & \text{when } 1/2 \le x < 1 \end{cases}$ then f(x) is continuous at $x = \frac{1}{2}$ but f(x) is not differentiable at that point.]

[NUH–1997, NUH(NM)–2006, DUH–1998]

সমাধান ঃ অবিচ্ছিন্নতার জন্য [For continuity] :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} (1-x) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}-} x = \frac{1}{2}$$

যখন $x = \frac{1}{2}$ তখন $f(x) = 1-x$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \therefore \lim_{x\to\frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

সুতরাং $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। [So the function f(x) is continuous at $x = \frac{1}{2}$.]

অন্তরীকরণ যোগ্যতার জন্য [For differentiability] :

$$Rf'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1-\left(\frac{1}{2}+h\right)-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{(-h)}{h} = \lim_{h\to 0+} (-1) = -1$$

$$\text{এবং } Lf'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to 0-} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\left(\frac{1}{2}+h\right)-\frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0-} 1 = 1$$

যেহেতু $Rf'\left(\frac{1}{2}\right) \neq Lf'\left(\frac{1}{2}\right)$.

সুতরাং $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য নয়। [So the function f(x) is not differentiable at $x = \frac{1}{2}$.]

বিঃ দ্রঃ উপরের উদাহরণটি লক্ষ্য করিলে দেখা যায় $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিন্তু উক্ত বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।

উদাহরণ–3. যদি $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x \le 1 \\ x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$ তবে $x = 1$ বিন্দুতে f(x) এর অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণ যোগ্যতা যাচাই কর। **[NUH(NM)–2009, DUH–82, CUH–82]**

সমাধান ঃ (প্রথমত) $x = 1$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} x = 1$

এবং $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} 1 = 1$

যখন $x = 1$ তখন $f(1) = 1$ যেহেতু $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয়ত) $x = 1$ বিন্দুতে f(x) এর অন্তরীকরণ যোগ্যতা

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1+h-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0+} (1) = 1$$

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{0}{h} = 0$$

যেহেতু $Rf'(1) \neq Lf'(1)$. সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।

উদাহরণ–4. যদি $f(x) = |x-1|$ হয়, তবে $x = 1$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণ যোগ্যতা পরীক্ষা কর।

সমাধান ঃ (প্রথমত) $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা করি

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} |x-1| = 0$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} |x-1| = 0 \text{ এবং } f(1) = 0$$

যেহেতু $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1)$

সুতরাং f(x) ফাংশন $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয়ত) $x = 1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্যতা পরীক্ষা করি

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{|1+h-1|-0}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h}{h} = 1$$

$$Lf'(1) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{-h-0}{h} = -1$$

যেহেতু $Rf'(1) \neq Lf'(1)$. সুতরাং প্রদত্ত ফাংশন $x = 1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।

উদাহরণ-5. $x = 0$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে নিম্নলিখিত ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণ যোগ্যতা আলোচনা কর [Discuss the continuity and differentiability at $x = 0$ and $x = \frac{\pi}{2}$ of the function]

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 + \sin x & \text{যখন } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + (x - (\pi/2))^2 & \text{যখন } x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

[NUH-02, 04, 2010, NUH(NM)-2010, BSc(Pass)-08, 2010, DUH-84, CUH-84, 89, 95]

সমাধান ঃ (প্রথমত) $x = 0$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা করি

ডানসীমা $= \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} (1 + \sin x) = 1$

বামসীমা $= \lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} 1 = 1$

এবং $f(0) = 1 + \sin 0 = 1$

এখানে ডানসীমা = বামসীমা = $f(0)$, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয়ত) $x = 0$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনের অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা করি

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{1+\sinh-(1+\sin 0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{\sinh}{h} = 1$$

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-} \frac{1-(1+\sin 0)}{h} = 0$$

যেহেতু $Rf'(0) \neq Lf'(0)$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।

(তৃতীয়ত) $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা করি

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} \left\{2 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right\} = 2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} (1 + \sin x) = 1 + \sin\frac{\pi}{2} = 2$$

এবং $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 2$

যেহেতু $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

সুতরাং $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন। [So $f(x)$ is continuous at $x = \frac{\pi}{2}$.]

(চতুর্থত) $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণ যোগ্যতা পরীক্ষা করি

$$Rf'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{2 + \left(\frac{\pi}{2} + h - \frac{\pi}{2}\right)^2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0_+} h = 0$$

$$Lf'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-} \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{\cos h - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-} \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h} = -\lim_{h\to 0_-}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2\cdot\frac{h}{2} = 0$$

যেহেতু $Rf'\left(\frac{\pi}{2}\right) = Lf'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. সুতরাং $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণ যোগ্য।

উদাহরণ–6. যদি $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরীকরণ যোগ্য কিন্তু $x = 0$ বিন্দুতে $f'(x)$ অবিচ্ছিন্ন নয়।

[If $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{when } x \neq 0 \\ 0 & \text{when } x = 0 \end{cases}$ then show that at $x = 0$ $f(x)$ is differentiable but $f'(x)$ is not continuous.] **[BSc(Pass)–2007]**

সমাধান ঃ যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

এখন $Rf'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

$$\therefore Rf'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0 \times (-1 \text{ এবং } 1 \text{ এর মধ্যবর্তী যে কোন সংখ্যা})$$

$$= 0$$

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{+h^2\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0_-} h\sin\frac{1}{h} = 0$$

যেহেতু $Rf'(0) = Lf'(0) = 0$, কাজেই $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরীকরণ যোগ্য।

আবার $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ যখন $x \neq 0$

$= 0$ যখন $x = 0$

ডানপক্ষ সীমা $= \lim_{x\to 0_+} f'(x) = \lim_{x\to 0_+}\left\{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right\}$

$$= 2\lim_{x\to 0_+} x\sin\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0_+}\cos\frac{1}{x}$$

$= 0 - \lim_{x\to 0_+}\cos\frac{1}{x}$ ইহার মান বিদ্যমান নাই।

কাজেই $x = 0$ বিন্দুতে $f'(x)$ অবিচ্ছিন্ন নয়।

উদাহরণ–7. যদি $f(x) = \begin{cases} x + x^{4/3}\sin\frac{1}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ **[DUH–1980]**

তবে $f'(0)$ নির্ণয় কর যদি বিদ্যমান থাকে।

সমাধান ঃ যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h + h^{4/3}\sin\frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} 1 + h^{1/3}\sin\frac{1}{h} = 1 + 0 = 1 \quad \left[\because \left|\sin\frac{1}{h}\right| \leq 1\right]$$

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{h + h^{4/3}\sin\frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-}\left(1 + h^{1/3}\sin\frac{1}{h}\right) = 1 + 0 = 1$$

যেহেতু $Rf'(0) = Lf'(0) = 1$ সুতরাং $f'(0) = 1$.

উদাহরণ–8. যদি $f(x) = |x-1| + |x+3|$ হয় তবে $x = -3$ ও $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণ যোগ্যতা আলোচনা কর। [If $f(x) = |x-1| + |x+3|$ then discuss the continuity and differentiability of the function at $x = -3$ and $x = 1$.] **[NUH–2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = |x-1| + |x+3|$

$$= \begin{cases} x - 1 + x + 3 & \text{যখন } x \geq 1 \\ -(x-1) + x + 3 & \text{যখন } -3 \leq x < 1 \\ -(x-1) - (x+3) & \text{যখন } x < -3 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 2 & \text{যখন } x \geq 1 \\ 4 & \text{যখন } -3 \leq x < 1 \\ -2x - 2 & \text{যখন } x < -3 \end{cases}$$

$x = -3$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা ঃ

ডানসীমা $= \lim_{x\to -3_+} f(x) = \lim_{x\to -3_+} 4 = 4$

বামসীমা $= \lim_{x\to -3_-} f(x) = \lim_{x\to -3_-} (-2x - 2) = 6 - 2 = 4$

এবং $f(-3) = 4$

যেহেতু $x = -3$ বিন্দুতে ডানসীমা = বামসীমা = $f(-3)$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশন $x = -3$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

$x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা ঃ

ডানসীমা $= \lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} (2x + 2) = 4$

বামসীমা $= \lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} 4 = 4$ এবং $f(1) = 2+2 = 4$

যেহেতু $x = 1$ বিন্দুতে ডানসীমা = বামসীমা = $f(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

$x = -3$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা ঃ

$$Rf'(-3) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{4-4}{h} = 0$$

এবং $Lf'(-3) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0_-} \frac{-2(-3+h)-2-4}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{-2h}{h} = -2$$

যেহেতু $Rf'(-3) \neq Lf'(-3)$

সুতরাং $x = -3$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

$x = 1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্যতা পরীক্ষা ঃ

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{2(1+h)+2-(2+2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{2h}{h} = 2$$

এবং $Lf'(1) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{4-(2+2)}{h} = 0$

যেহেতু $Rf'(1) \neq Lf'(1)$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

উদাহরণ–9. $f(x) = \begin{cases} 5x-4 & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ 4x^2-3x & \text{যখন } 1 < x < 2 \\ 3x+4 & \text{যখন } x \ge 2 \end{cases}$

ফাংশনটি $x = 1$ এবং 2 বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য কি-না পরীক্ষা কর।

[NUH–2007, 2010(Old)]

সমাধান ঃ $x = 1$ বিন্দুতে

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{4(1+h)^2-3(1+h)-(5-4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{4(2h+h^2)-3h}{h} = \lim_{h\to 0_+} (5+4h) = 5$$

এবং $Lf'(1) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0_-} \frac{5(1+h)-4-(5-4)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{5h}{h} = 5$$

যেহেতু $Rf'(1) = Lf'(1)$, সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য।

আবার, $x = 2$ বিন্দুতে

$$Rf'(2) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{3(2+h)+4-(3.2+4)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{3h}{h} = 3$$

এবং $Lf'(2) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0_-} \frac{4(2+h)^2-3(2+h)-(6+4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-} \frac{4(4h+h^2)-3h}{h} = 13$$

যেহেতু $Rf'(2) \neq Lf'(2)$, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি $x = 2$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

উদাহরণ–10. যদি $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{যখন } x \le 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 1/x & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$ হয়,

তবে $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর।

[NUH–2003, NUH(NM)–2009]

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুতে,

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{h-(0^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \left(1-\frac{1}{h}\right) = -\infty$$

যেহেতু $Rf'(0)$ বিদ্যমান নয়, সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

আবার, $x = 1$ বিন্দুতে,

$$Rf'(1) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{1-1-h}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0_+} \frac{-1}{1+h} = -1$$

আবার, $Lf'(1) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0_-} \frac{1+h-1}{h} = 1$

যেহেতু $Rf'(1) \neq Lf'(1)$, সুতরাং ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

উদাহরণ–11. যদি $f(x) = \begin{cases} 3+2x \text{ যখন } -3/2 < x \le 0 \\ 3-2x \text{ যখন } 0 < x < 3/2 \\ -3-2x \text{ যখন } x \ge 3/2 \end{cases}$ হয়,

তবে $x = 0$ এবং $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনটির অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর।

[NUH–2009, NUH(NM)–2007]

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুতে,

$Rf'(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{3-2h-(3+0)}{h} = -2$

এবং $Lf'(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{3+2h-(3+0)}{h} = 2$

যেহেতু $Rf'(0) \neq Lf'(0)$, সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

আবার, $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে,

$Rf'\left(\frac{3}{2}\right) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f\left(\frac{3}{2}+h\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{h}$

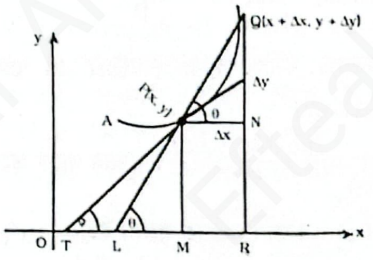
$= \lim_{h\to 0_+} \frac{-3-2\left(\frac{3}{2}+h\right)-(3-3)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{-2h}{h} = -2$

এবং $Lf'\left(\frac{3}{2}\right) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f\left(\frac{3}{2}+h\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{h}$

$= \lim_{h\to 0_-} \frac{3-2\left(\frac{3}{2}+h\right)-(-3-3)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{-2h+6}{h} = -\infty$

যেহেতু $Rf'\left(\frac{3}{2}\right) \neq Lf'\left(\frac{3}{2}\right)$, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

2.C.5. কোন বিন্দুতে ফাংশনের ডেরিভেটিভের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা (Geometrical interpretation of derivatives of functions at a point) : ধরি $y = f(x)$ ফাংশনটি APQ রেখা নির্দেশ করে এবং P বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সহিত ϕ কোণ উৎপন্ন করে।



P(x, y) এবং Q(x + Δx, y + Δy) এর সংযোগ রেখার ঢাল ঃ

$\frac{QN}{PN} = \tan QPN \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta$, যেখানে QP রেখা L বিন্দুতে x অক্ষের সহিত θ কোণ করে।

এখন যদি $\Delta x \to 0$ হয় তবে P বিন্দুতে QPL রেখা স্পর্শক TPT′ তে পরিণত হবে এবং তখন $\theta \to \phi$। সুতরাং $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\theta\to\phi} \tan\theta \Rightarrow f'(x) = \tan\phi$

$\Rightarrow$ P বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশনের ডেরিভেটিভ স্পর্শকের উক্ত বিন্দুতে ঢাল নির্দেশ করে।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

2.C.1. কোন বিন্দুতে ফাংশনের অন্তরজ এর সংজ্ঞা দাও। (Define derivative of a function at a point.)

Ans : ধরি $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত। তাহা হইলে $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ... (1) কে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরজ বলা হইবে যদি (1) এর লিমিট বিদ্যমান থাকে।

2.C.2. অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন কি? (What is the differentiable function?)

Ans : ফাংশন $f(x)$ কে $x = a$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য বলা হইবে যদি ইহার ঐ বিন্দুতে অন্তরজ বিদ্যমান থাকে।

2.C.3. বাম অন্তরজ কাকে বলে? (What is called left hand derivative?)

[NUH(NM)–2010]

Ans : যদি $\lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ বিদ্যমান থাকে তবে ইহাকে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ এর বাম অন্তরজ বলে। ইহাকে $Lf'(a)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ $Lf'(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2.C.4. ডান অন্তরজ কাকে বলে? (What is called right hand derivative?) **[NUH(NM)-2010]**

Ans : যদি $\lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ বিদ্যমান থাকে তবে ইহাকে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশন $f(x)$ এর ডান অন্তরজ বলে। ইহাকে $Rf'(a)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ $Rf'(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2.C.5. এক পার্শ্ব অন্তরজ কি? (What is the one sided derivatives?)

Ans : ডান অন্তরজ বা বাম অন্তরজকে এক পার্শ্ব অন্তরজ বলে।

2.C.6. $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য হওয়ায় শর্তসমূহ লিখ। (Write the conditions for differentiability of $f(x)$ at $x = a$.) **[NUH(NM)-2010]**

Ans : $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য হওয়ার শর্তসমূহ নিম্নে দেওয়া হইল ঃ

(i) $Lf'(a)$ বিদ্যমান এবং সসীম হইবে।

(ii) $Rf'(a)$ বিদ্যমান এবং সসীম হইবে।

(iii) $Lf'(a) = Rf'(a)$ হইবে।

2.C.7. খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্যতা কি? (What is the differentiability in an open interval?)

Ans : যদি (a, b) খোলা ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অন্তরজ বিদ্যমান থাকে তবে ঐ ব্যবধিতে $f(x)$ কে অন্তরীকরণযোগ্য বলা হয়।

2.C.8. বদ্ধ ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্যতা কি? (What is the differentiability in a closed interval?)

Ans : যদি (a, b) ব্যবধির প্রত্যেক বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অন্তরজ বিদ্যমান থাকে এবং আরো $Lf'(b)$ ও $Rf'(a)$ উভয়ে বিদ্যমান থাকে তবে $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $f(x)$ কে অন্তরীকরণযোগ্য বলা হয়।

2.C.9. অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতার মধ্যে সম্পর্ক কি? (What is the relation between continuity and differentiability?)

Ans : $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরীকরণযোগ্য হইলে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হইবে।

2.C.10. ধরি $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন। ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি কি অন্তরীকরণযোগ্য? (Let $f(x)$ is continuous at $x = a$. Is the function differentiable at that point?)

Ans : $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইলে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযেগ্য হইতে পারে আবার নাও হইতে পারে।

2.C.11. ধরি $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন। ঐ বিন্দুতে ফাংশনটির অন্তরীকরণযোগ্যতা কি হইবে? (Let $f(x)$ is discontinuous at $x = a$. What is the differentiability of the functions at that point?)

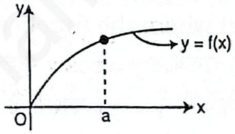
Ans : $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন বিচ্ছিন্ন হইলে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য হইবে না।

2.C.12. ধরি $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য নয়। ঐ বিন্দুতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা কি হইবে? (Let $f(x)$ is non-differerentiable at $x = a$. What is the continuity of the function at that point?)

Ans : $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরীকরণযোগ্য না হইলে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হইতে পারে আবার নাও হইতে পারে।

2.C.13. $y = f(x)$ এর নমুনা লেখচিত্র আঁক যেন ইহা $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরীকরণযোগ্য হয়। (Draw a sample graph of $f(x)$ such that it is continuous and differentiable at $x = a$.)

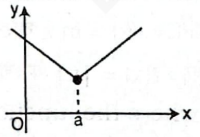
Ans :



চিত্রে উল্লেখিত $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরীকরণযোগ্য হইবে।

2.C.14. $y = f(x)$ এর নমুনা লেখচিত্র আঁক যেন ইহা $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয় কিন্তু অন্তীকরণযোগ্য না হয়। (Draw a sample graph of $y = f(x)$ such that it is continuous but non-differentiable at $x = a$.)

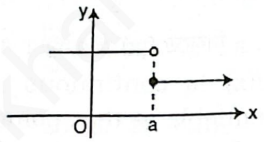
Ans :



চিত্রে উল্লেখিত $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিন্তু অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

2.C.15. y = f(x) এর নমুনা লেখচিত্র আঁক যেন ইহা x = a বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন ও অন্তরীকরণযোগ্য না হয়। (Draw a sample graph of y = f(x) such that it is not continuous and differentiable.)

Ans :



চিত্রে উল্লেখিত x = a বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

2.C.16. কোন্ কোন্ বিন্দুতে $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ বাহুপদী ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য? (Which are the points where the polynomial function $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ is differentiable?)

Ans : y = f(x) বাহুপদী ফাংশন x এর সমস্ত বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি (– ∞, ∞) ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য।

2.C.17. কোন ব্যবাধিতে y = sin x ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য? (Which is the interval where the function y = sin x is differentiable?)

Ans : x এর সমস্ত মানের জন্য অর্থাৎ (– ∞, ∞) ব্যবধিতে y = sin x ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য।

2.C.18. কোন্ ব্যবধিতে y = cos x ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য? (Which is the interval where the function y = cos x is differentiable?)

Ans : (– ∞, ∞) ব্যবধিতে y = cos x ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য।

2.C.19. কোন ব্যবধিতে $y = e^x$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য? (Which is the interval where the function $y = e^x$ is differentiable?)

Ans : (– ∞, ∞) ব্যবধিতে $y = e^x$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য।

2.C.20. কোন ব্যবধিতে f(x) = *ln* x ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য? (Which is the interval where the functions f(x) = *ln* x is differentiable?)

Ans : (0, ∞) ব্যবধিতে f(x) = *ln* x ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য।

2.C.21. কোন ব্যবধিতে f(x) = |x| ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য? (Which is the interval where the function f(x) = |x| is differentiable?)

Ans : x = 0 বিন্দু ব্যতীত x এর সমস্ত মানের জন্য অর্থাৎ (– ∞, 0) ও (0, ∞) ব্যবধিতে f(x) = |x| ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য।

2.C.22. কোন ব্যবধিতে f(x) = |x – 1| + |x – 2| ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য (Which is the interval where the function f(x) = |x – 1| + |x – 2| is differentiable?)

Ans : x = 1 এবং x = 2 বিন্দু ব্যতীত x এর সমস্ত মানের জন্য অর্থাৎ (– ∞, 1), (1, 2) ও (2, ∞) ব্যবধিতে f(x) = |x – 1| + |x – 2| ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য।

2.C.23. কোন বিন্দুতে f(x) = |x + 1| + |x| + |x – 1| ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়? (Which are the points where the function f(x) = |x + 1| + |x| + |x – 1| is not differentiable?)

Ans : x = – 1, x = 0 এবং x = 1 বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

EXERCISE–2(C)

1. দেখাও যে f(x) = |x| ফাংশনটি x = 0 বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু ঐ বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।
2. দেখাও যে f(x) = |x – 2| ফাংশনটি x = 2 বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু ঐ বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্য নয়। **[NUH–2006, DUH–1986]**
3. দেখাও যে f(x) = |x + 3| ফাংশনটি x = – 3 বিন্দু ব্যতিত সর্বত্র অন্তরীকরণযোগ্য।
4. দেখাও যে f(x) = sin 2x ফাংশনটি সর্বত্র অন্তরীকরণ যোগ্য।
5. দেখাও যে $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ ফাংশনটি x = 0 বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু ঐ বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্য নয়। **[NUH(NM) 2003, DUHT–1985, DUMScP–1988]**
6. ধরি f(x) = x|x|. দেখাও যে Rf′(0) = 0 এবং Lf′(0) = 0.
7. ধরি $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ দেখাও যে x = 0 বিন্দুতে f(x) অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরীকরণ যোগ্য।
8. দেখাও যে f(x) = [x] ফাংশনটি x = 1 বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।
9. দেখাও যে $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ ফাংশনটি x = 0 বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন। আরো দেখাও যে x = 0 বিন্দুতে f′(x) অবিচ্ছিন্ন নয়। **[DUH–2002]**
10. দেখাও যে [0, 3] ব্যবধিতে f(x) = x^2 ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য।
11. দেখাও যে f(x) = |x| + |x – 1| ফাংশনটি x = 0 এবং x = 1 বিন্দু ব্যতিত সর্বত্র অন্তরীকরণ যোগ্য। **[NUH–1996, 2005, DUH–1982, 1985]**
12. দেখাও যে f(x) = |x – 1| + |x – 2| ফাংশনটি x = 1 এবং x = 2 বিন্দু ব্যতিত সর্বত্র অন্তরীকরণ যোগ্য।

13. দেখাও যে নিম্নের প্রত্যেকটি ফাংশন যেকোন বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্য

(i) $f(x) = 2x + 5$ (ii) $f(x) = x^2 + 3$

(iii) $f(x) = \cos x$ (iv) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $(x \neq 1)$

(v) $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$ $(x \neq 2, x \neq 3)$

14. দেখাও যে $f(x) = \tan x$ ফাংশনটি $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য।

15. দেখাও যে $f(x) = |x+3|$ ফাংশনটি $[-5, 5]$ ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।

16. দেখাও যে $f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$ ফাংশনটি $x = 0, x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।

17. একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত হইল

$f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{যখন } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ দেখাও যে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু উক্ত বিন্দুতে $f'(x)$ বিদ্যমান নয়। **[NUH(NM)-2008, DUH-1976]**

18. একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হইল

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{যখন } x \leq 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{যখন } 1 \leq x \leq 2 \\ 2x - x^2 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$$

[NUH(NM)-05, DUH-82, CUH-82]

তবে দেখাও যে $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু এই বিন্দুগুলিতে $f'(x)$ বিদ্যমান নয়।

19. যদি $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{যখন } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$ তবে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরীকরণ যোগ্যতা যাচাই কর। **[DUH-1981]**

20(i). যদি $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{3} x \sin(\ln x^2) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইবে কিন্তু $f'(x)$ বিদ্যমান নয়।

(ii). বিদ্যমান থাকিলে $f'(1)$ নির্ণয় কর যেখানে $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{যখন } x \neq 1 \\ 2 & \text{যখন } x = 1 \end{cases}$

উত্তর ঃ 1 **[NUH(NM)-2002]**

———x———

Chapter-3(A)
অন্তরীকরণ
DIFFERENTIATION

3.A.1. অন্তরক সহগ (Differential Coefficient) ঃ $y = f(x)$ ফাংশনের স্বাধীন চলরাশি (independent variable) x এর মানে ক্ষুদ্র বৃদ্ধি সাপেক্ষে অধীন চলরাশি (dependent variable) y এর মানে যে বৃদ্ধি ঘটে; ইহাদের অনুপাতের সীমাস্থ মানই হলো x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরক সহগ (Differential Coefficient).

x এর মান δx পরিমানে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হওয়ায় $y = f(x)$ এর মান $f(x + \delta x)$ হলে, y এর বৃদ্ধিপ্রাপ্ত মান $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$ হবে। এক্ষেত্রে x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরক সহগ (Differential Coefficient) $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$.

$y = f(x)$ ফাংশনের অন্তরক সহগ (Differential Coefficient) এর প্রতীক চিহ্ন

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D_x f(x) = D_x y.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

যেখানে $h = \delta x$.

3.A.2. অন্তরীকরণ (Differentiation) ঃ $y = f(x)$ ফাংশনের অন্তরক সহগ (Differential Coefficient) নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে অন্তরীকরণ (Differentiation) বলে।

3.A.3. প্রমাণ কর

(i) $\frac{d}{dx}(c) = 0$ (ii) $\frac{d}{dx}(mx + b) = m$

(iii) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (iv) $\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx} f((x))$.

প্রমাণ ঃ (i) ধরি $f(x) = c$ $\therefore f(x + h) = c$

অন্তরক সহগ এর সংজ্ঞা হইতে পাই $\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

বা $\frac{d}{dx}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$

(ii) ধরি $f(x) = mx + b$ $\therefore f(x + h) = m(x + h) + b$

অন্তরক সহগ এর সংজ্ঞা হইতে পাই $\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{m(x + h) + b - mx - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m$$

Find From 1st principles of the derivatives of

(iii) ধরি $f(x) = x^n \quad \therefore f(x+h) = (x+h)^n$

অন্তরক সহগ এর সংজ্ঞা হইতে পাই $\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = x^n \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - 1\right\}$$

$$= x^n \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\left\{1 + n\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{x^2} + \cdots + \frac{h^n}{x^n}\right\} - 1\right]$$

$$= x^n \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{nh}{x} + \frac{n(n-1)h^2}{2!\,x^2} + \cdots + \frac{h^n}{x^n}\right\}$$

$$= x^n \lim_{h\to 0} \left\{\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)h}{2!\,x^2} + \cdots + \frac{h^{n-1}}{x^n}\right\} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

(iv) অন্তরক সহগ এর সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{d}{dx}(c\,f(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{c\,f(x+h) - c\,f(x)}{h}$$

$$= c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\frac{d}{dx}(f(x)).$$

3.A.4. প্রমাণ কর (i) $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$

(ii) $\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) - \frac{d}{dx}(g(x))$.

প্রমাণ ঃ (i) অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x)).$$

(ii) $\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))-(g(x+h)-g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}(f(x)) - \frac{d}{dx}(g(x)).$$

3.A.5. প্রমাণ কর $\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}(g(x)) + g(x)\frac{d}{dx}(f(x))$

প্রমাণ ঃ অন্তরক সহগ এর সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,(g(x+h)-g(x)) + g(x)\,(f(x+h)-f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h).\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\frac{d}{dx}(g(x)) + g(x)\frac{d}{dx}(f(x)).$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)h(x)) = f(x)\,g(x)\frac{d}{dx}(h(x))$

$$+ g(x)\,h(x)\frac{d}{dx}(f(x)) + h(x)\,f(x)\frac{d}{dx}(g(x)).$$

3.A.6. প্রমাণ কর ঃ $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$

প্রমাণ ঃ অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\,f(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{hg(x)\,g(x+h)}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\,f(x+h) - g(x)\,f(x) + g(x)\,f(x) - f(x)\,g(x+h)}{hg(x)\,g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\,(f(x+h)-f(x)) - f(x)\,(g(x+h)-g(x))}{hg(x)\,g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x)\,g(x+h)}$$

$$= \frac{g(x)\frac{d}{dx}(f(x)) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}.$$

3.A.7. প্রমাণ কর

(i) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(iii) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

(v) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ (vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$.

প্রমাণ ঃ (i) অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x \left\{\because \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right\}$$

(ii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

H.W

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x-h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$

(iii) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin(x+h)-\sin x\cos(x+h)}{h\cos x.\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h-x)}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos x.\cos(x+h)}\cdot\left(\frac{\sinh}{h}\right) = \frac{1}{\cos x.\cos x} = \sec^2 x.$$

(iv) $\frac{d}{dx}(\cot x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h)-\cot(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)}-\frac{\cos x}{\sin x}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos(x+h)-\cos x\sin(x+h)}{h\sin x\sin(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x-x-h)}{h\sin x\sin(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(-h)}{h\sin x.\sin(x+h)}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sinh}{h}\right)\cdot\frac{1}{\sin x.\sin(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{\sin x.\sin x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

(v) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}$ H.W

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(x+h)}-\frac{1}{\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x-\cos(x+h)}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h\cos x\cos(x+h)} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\cos x.\cos(x+h)}$$

$$= 1.\frac{\sin x}{\cos x.\cos x} = \sec x\tan x.$$

(vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{cosec}(x+h)-\operatorname{cosec} x}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sin(x+h)}-\frac{1}{\sin x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x-\sin(x+h)}{h\sin x.\sin(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x-h}{2}\right)}{h\sin x\sin(x+h)}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}\sin x\sin(x+h)} = -\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\cdot\frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\sin x.\sin(x+h)}$$

$$= -1.\frac{\cos x}{\sin x.\sin x} = -\operatorname{cosec} x\cot x.$$

3.A.8. প্রমাণ কর

(i) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ (ii) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ (iii) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$.

প্রমাণ ঃ **(i)** অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(e^h - 1)$$

$$= e^x \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots\right) - 1\right\} = e^x \lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots\right) = e^x$$

(ii) $\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(a^h - 1)$

$$= a^x \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\left\{1 + \frac{h}{1!}(\ln a) + \frac{h^2}{2!}(\ln a)^2 + \cdots\right\} - 1\right]$$

$$= a^x \lim_{h\to 0}\left[\ln a + \frac{h}{2!}(\ln a)^2 + \frac{h^2}{3!}(\ln a)^3 + \cdots\right]$$

$$= a^x \ln a.$$

(iii) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{x^3} - \cdots\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{x} + \frac{1}{3}\frac{h^2}{x^3}\cdots\right) = \frac{1}{x}.$$

3.A.9. প্রমাণ কর ঃ

(i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$

(v) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

প্রমাণ ঃ অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

(i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^{-1}(x+h) - \sin^{-1}x}{h}$ ..... (1)

ধরি $\sin^{-1}x = y$ এবং $\sin^{-1}(x+h) = y + k$

$\therefore k = (y+k) - y = \sin^{-1}(x+h) - \sin^{-1}x$ $\therefore h \to 0$ হলে $k \to 0$

আবার $x = \sin y$ এবং $x + h = \sin(y+k)$

$\therefore h = (x+h) - x = \sin(y+k) - \sin y$

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \lim_{k\to 0}\frac{k}{\sin(y+k) - \sin y}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k}{2\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)\sin\left(\frac{k}{2}\right)} = \lim_{k\to 0}\left(\frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right)\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{\cos y}\left[\because \lim_{k\to 0}\left(\frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right) = 1\right] = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(ii) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos^{-1}(x+h) - \cos^{-1}x}{h}$ ..... (1)

ধরি $\cos^{-1}x = y$ এবং $\cos^{-1}(x+h) = y + k$

$\therefore k = \cos^{-1}(x+h) - \cos^{-1}x$ যখন $h \to 0$ তখন $k \to 0$

আবার $x = \cos y$ এবং $x + h = \cos(y+k)$

$\therefore h = \cos(y+k) - \cos y$

$$(1) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \lim_{k\to 0}\frac{k}{\cos(y+k) - \cos y}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k}{2\sin\left(\frac{2y+k}{2}\right)\sin\left(-\frac{k}{2}\right)}$$

$$= -\lim_{k\to 0}\left(\frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{2y+k}{2}\right)} = -\frac{1}{\sin y}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(iii) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1}x}{h}$

ধরি $\tan^{-1}x = y$ এবং $\tan^{-1}(x+h) = y + k$

$\therefore k = \tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1}x$ যখন $h \to 0$ তখন $k \to 0$

আবার $x = \tan y$ এবং $x + h = \tan(y+k)$

$\therefore h = \tan(y+k) - \tan y$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \lim_{k\to 0}\frac{k}{\tan(y+k)-\tan y} = \lim_{k\to 0}\frac{k}{\frac{\sin(y+k)}{\cos(y+k)}-\frac{\sin y}{\cos y}}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k\cos y.\cos(y+k)}{\sin(y+k)\cos y - \cos(y+k)\sin y}$$

$$= \lim_{k\to 0}\left(\frac{k}{\sin k}\right)\cos y.\cos(y+k) = \cos^2 y$$

$$= \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(iv) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cot^{-1}(x+h)-\cot x}{h}$

ধরি $\cot^{-1}x = y$ এবং $\cot^{-1}(x+h) = y+k$

$\therefore k = \cot^{-1}(x+h) - \cot^{-1}x$ $\therefore h\to 0$ হইলে $k\to 0$ হবে।

আবার $x = \cot y$ এবং $x+h = \cot(y+k)$

$\therefore h = \cot(y+k) - \cot y$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \lim_{k\to 0}\frac{k}{\cot(y+k)-\cot y}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k\sin(y+k)\sin y}{\cos(y+k)\sin y - \sin(y+k)\cos y}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k}{\sin(-k)}.\sin(y+k)\sin y$$

$$= -\lim_{k\to 0}\left(\frac{k}{\sin k}\right)\sin(y+k)\sin y = -\sin^2 y$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

(v) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sec^{-1}(x+h)-\sec^{-1}x}{h}$

ধরি $\sec^{-1}x = y$ এবং $\sec^{-1}(x+h) = y+k$

$\therefore k = \sec^{-1}(x+h) - \sec^{-1}x$, যখন $h\to 0$ তখন $k\to 0$

আবার $x = \sec y$ এবং $x+h = \sec(y+k)$

$\therefore h = \sec(y+k) - \sec y$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \lim_{k\to 0}\frac{k}{\sec(y+k)-\sec y}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k\cos y\cos(y+k)}{\cos y - \cos(y+k)} = \lim_{k\to 0}\frac{k\cos y\cos(y+k)}{2\sin\left(\frac{2y+k}{2}\right)\sin\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$= \lim_{k\to 0}\left(\frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right).\frac{\cos y.\cos(y+k)}{\sin\left(\frac{2y+k}{2}\right)} = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{1}{\sec y\tan y}$$

$$= \frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

(vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{cosec}^{-1}(x+h)-\operatorname{cosec}^{-1}x}{h}$

ধরি $\operatorname{cosec}^{-1}x = y$ এবং $\operatorname{cosec}^{-1}(x+h) = y+k$

$\therefore k = \operatorname{cosec}^{-1}(x+h) - \operatorname{cosec}^{-1}x$ যখন $h\to 0$ তখন $k\to 0$

আবার $x = \operatorname{cosec} y$ এবং $x+h = \operatorname{cosec}(y+k)$

$\therefore h = \operatorname{cosec}(y+k) - \operatorname{cosec} y$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = \lim_{k\to 0}\frac{k}{\operatorname{cosec}(y+k)-\operatorname{cosec} y}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k}{\frac{1}{\sin(y+k)}-\frac{1}{\sin y}} = \lim_{k\to 0}\frac{k\sin(y+k).\sin y}{\sin y - \sin(y+k)}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k\sin(y+k)\sin y}{2\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)\sin\left(-\frac{k}{2}\right)}$$

$$= -\lim_{k\to 0}\left(\frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right).\frac{\sin(y+k)\sin y}{\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)}$$

$$= -\lim_{k\to 0}\left(\frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right).\frac{\sin(y+k)\sin y}{\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)}$$

$$= -\lim_{k\to 0}\left(\frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right).\lim_{k\to 0}\frac{\sin(y+k)\sin y}{\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)}$$

$$= -1.\frac{\sin^2 y}{\cos y} = -\frac{1}{\operatorname{cosec} y\cot y}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{cosec} y\sqrt{\operatorname{cosec}^2 y - 1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

3.A.10. $y = f(u)$, যখন $u = g(x)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হইতে পাই

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

ধরি $g(x) = y$ এবং $g(x+h) = y + k$

$\therefore k = g(x+h) - g(x)$ $\quad \therefore h \to 0$ হইলে $k \to 0$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{f(g(x))\} = \lim_{k\to 0}\frac{f(y+k)-f(y)}{k}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dy}\{f(y)\}\cdot\frac{d}{dx}\{g(x)\} = \frac{d}{du}\{f(u)\}\frac{d}{dx}(u) \quad [\because y = g(x) = u]$$

$$= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad [\because y = f(u)]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{f(u)\} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},\ u = g(x) \text{ বা } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

ইহাকে অন্তরক সহগের 'চেইন রুল' (Chain Rule) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $y = f(u)$, $u = f(v)$, $v = f(x)$ হইলে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$ হবে।

উদাহরণ–1. সংজ্ঞার সাহায্যে $x^2 + 2x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[DUH-80]**

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(x^2+2x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - x^2 - 2x}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2) + (2x+2h) - x^2 - 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{2xh+h^2+2h}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(2x+2+h) = 2x+2.$$

উদাহরণ–2. সংজ্ঞার সাহায্যে $\sqrt{x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[DUH-1965]**

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{(x+h)}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

উদাহরণ–3. সংজ্ঞার সাহায্যে $\sin(ax+b)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[DUH-1955]**

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}\{\sin(ax+b)\} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a(x+h)+b) - \sin(ax+b)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2ax+ah+2b}{2}\right)\sin\left(\frac{ah}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}}\right).\cos\left(\frac{2ax+ah+2b}{2}\right)$$

$$= 1.\cos\left(\frac{2ax+2b}{2}\right) = \cos(ax+b).$$

উদাহরণ–4. সংজ্ঞার সাহায্যে $\tan ax$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(\tan ax) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan a(x+h) - \tan ax}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin a(x+h)}{\cos a(x+h)} - \frac{\sin ax}{\cos ax}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin a(x+h)\cos ax - \cos a(x+h)\sin ax}{h\cos ax\cos a(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(ax+ah-ax)}{h\cos ax\cos a(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin ah}{ah}\right).\frac{a}{\cos ax.\cos a(x+h)} = \frac{a}{\cos^2 ax} = a\sec^2 ax.$$

উদাহরণ–5. সংজ্ঞার সাহায্যে $\sin x^2$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[DUH-1964]**

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(\sin x^2) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)^2 - \sin x^2}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{(x+h)^2-x^2}{2}\cos\frac{(x+h)^2+x^2}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2xh+h^2}{2}\cos\left(\frac{2x^2+2xh+h^2}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin\frac{(2x+h)h}{2}}{\frac{(2x+h)h}{2}}\right\}.(2x+h).\cos\left(\frac{2x^2+2xh+h^2}{2}\right)$$

$$= 1.2x.\cos\frac{2x^2}{2} = 2x\cos x^2.$$

উদাহরণ–6. সংজ্ঞার সাহায্যে e^{5x+a} এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[RUH-1966]**

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(e^{5x+a}) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{5(x+h)+a} - e^{5x+a}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{5x+a}\frac{e^{5h}-1}{h}$

$$= e^{5x+a} \lim_{h\to 0} \frac{\left\{1 + 5h + \frac{5^2h^2}{2!} + \frac{5^3h^3}{3!} + \cdots\right\} - 1}{h}$$

$$= e^{5x+a} \lim_{h\to 0} \left(5 + \frac{5^2h}{2!} + \frac{5^3h^2}{3!} + \cdots\right) = 5e^{5x+a}$$

উদাহরণ–7. সংজ্ঞার সাহায্যে $\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = \lim_{h\to 0} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{x+h}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}{h}$

ধরি $\tan^{-1}\frac{x}{a} = y$ এবং $\tan^{-1}\left(\frac{x+h}{a}\right) = y + k$

$\therefore k = \tan^{-1}\left(\frac{x+h}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ যখন $h \to 0$ তখন $k \to 0$

আবার $\frac{x}{a} = \tan y$ এবং $\frac{x}{a} + \frac{h}{a} = \tan(y + k)$

$\therefore \frac{h}{a} = \tan(y + k) - \tan y \Rightarrow h = \{\tan(y + k) - \tan y\}.\ a$

$\therefore \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{a\{\tan(y + k) - \tan y\}}$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k \cos y \cos(y + k)}{a\{\sin(y + k)\cos y - \cos(y + k)\sin y\}}$$

$$= \lim_{k\to 0} \left(\frac{k}{\sin k}\right) \cdot \frac{\cos y \cos(y + k)}{a} = \frac{1}{a \sec^2 y} = \frac{1}{a(1 + \tan^2 y)}$$

$$= \frac{1}{a\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{a}{x^2 + a^2}.$$

উদাহরণ–8. সংজ্ঞার সাহায্যে $e^{\tan x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(e^{\tan x}) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\tan(x+h)} - e^{\tan x}}{h}$

ধরি $\tan x = y$ এবং $\tan(x + h) = y + k$

$\therefore k = \tan(x + h) - \tan x$ যদি $h \to 0$ হয় তবে $k \to 0$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^{\tan x}) = \lim_{k\to 0} \frac{e^{y+k} - e^y}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x + h) - \tan x}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} e^y \cdot \left(\frac{e^k - 1}{k}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x + h)\cos x - \cos(x + h)\sin x}{h \cos x \cdot \cos(x + h)}$$

$$= \lim_{k\to 0} e^y \left(1 + \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{3!} + \cdots\right) \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sinh}{h}\right) \cdot \frac{1}{\cos x \cos(x + h)}$$

$$= e^y \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = e^y \sec^2 x = e^{\tan x} \sec^2 x.$$

উদাহরণ–9. সংজ্ঞার সাহায্যে $e^{\sqrt{\tan x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{\tan x}}) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\sqrt{\tan(x+h)}} - e^{\sqrt{\tan x}}}{h}$

ধরি $\sqrt{\tan x} = y$ এবং $\sqrt{\tan(x + h)} = y + k$

$\therefore k = \sqrt{\tan(x + h)} - \sqrt{\tan x}$ যদি $h \to 0$ হয় তবে $k \to 0$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{\tan x}}) = \lim_{k\to 0} \frac{e^{y+k} - e^y}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\tan(x + h)} - \sqrt{\tan x}}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{e^y(e^k - 1)}{k} \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x + h) - \tan x}{h(\sqrt{\tan(x + h)} + \sqrt{\tan x})}$$

$$= \lim_{k\to 0} e^y \left(1 + \frac{k}{2!} + \frac{k^2}{3!} + \cdots\right) \times$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sinh}{h} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos(x + h)\,(\sqrt{\tan(x + h)} + \sqrt{\tan x})}$$

$$= e^y \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x \cdot 2\sqrt{\tan x}} = e^{\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$$

উদাহরণ–10. সংজ্ঞার সাহায্যে $e^{\sin^{-1}x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(e^{\sin^{-1}x}) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\sin^{-1}(x+h)} - e^{\sin^{-1}x}}{h}$

ধরি $\sin^{-1}x = y$ এবং $\sin^{-1}(x + h) = y + k$

$\therefore k = \sin^{-1}(x + h) - \sin^{-1}x$ $\therefore h \to 0$ হইলে $k \to 0$ হবে।

আবার $x = \sin y$ এবং $x + h = \sin(y + k)$

$\therefore h = \sin(y + k) - \sin y$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^{\sin^{-1}x}) = \lim_{k\to 0}\frac{e^{y+k}-e^{y}}{k}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\sin(y+k)-\sin y}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{e^{y}(e^{k}-1)}{k}\lim_{k\to 0}\frac{k}{2\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)\sin\frac{k}{2}}$$

$$= \lim_{k\to 0} e^{y}\left(1+\frac{k}{2!}+\frac{k^2}{3!}+\cdots\right)\lim_{k\to 0}\left(\frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right)\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)}$$

$$= e^{y}.1.\frac{1}{\cos y} = e^{y}.\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

উদাহরণ–11. সংজ্ঞার সাহায্যে $ln\ \cos x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

[NUH(NM)–2005, DUH–1981, CUH–1982]

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(ln\ \cos x) = \lim_{h\to 0}\frac{ln\ \cos(x+h) - ln\ \cos x}{h}$

ধরি $\cos x = y$ এবং $\cos(x+h) = y+k$

$\therefore k = \cos(x+h) - \cos x$ যদি $h \to 0$ হয় তবে $k \to 0$ হবে।

$$\therefore \frac{d}{dx}(ln\ \cos x) = \lim_{k\to 0}\frac{ln\ (y+k) - ln\ y}{k}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}ln\left(1+\frac{k}{y}\right)\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left(\frac{k}{y}-\frac{k^2}{2y^2}+\frac{k^3}{3y^3}\cdots\right)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{y}\sin x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

উদাহরণ–12. সংজ্ঞার সাহায্যে $\log_{10}\sin^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

[CUH–1986]

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}\{\log_{10}\sin^{-1}x\} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_{10}\sin^{-1}(x+h) - \log_{10}\sin^{-1}x}{h}$

ধরি $\sin^{-1}x = y$ এবং $\sin^{-1}(x+h) = y+k$

$\therefore k = \sin^{-1}(x+h) - \sin^{-1}x$, $h \to 0$ হইলে $k \to 0$ হবে।

এখন $x = \sin y$, $x+h = \sin(y+k)$

$\therefore h = \sin(y+k) - \sin y$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{\log_{10}\sin^{-1}x\} = \lim_{k\to 0}\frac{\log_{10}(y+k)-\log_{10}y}{k}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\sin(y+k)-\sin y}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\log_{10}\left(1+\frac{k}{y}\right)\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{2\sin\frac{k}{2}\cos\frac{2y+k}{2}}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left(\frac{k}{y}-\frac{k^2}{2y^2}+\frac{k^3}{3y^3}-\cdots\right)\log_{10}e \times \lim_{k\to 0}\left(\frac{\frac{k}{2}}{\sin\frac{k}{2}}\right)\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{y}.\log_{10}e\cdot\frac{1}{\cos y} = \frac{\log_{10}e}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{\log_{10}e}{\sin^{-1}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

উদাহরণ–13. সংজ্ঞার সাহায্যে $x\ ln\ x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

[NUH(NM)–2003, RUH–1990]

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(x\ ln\ x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\ ln\ (x+h) - x\ ln\ x}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\{ln\ (x+h) - ln\ x\} + ln\ x\{(x+h)-x\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h}{h}ln\left(1+\frac{h}{x}\right) + \lim_{h\to 0} ln\ (x).\frac{(x+h)-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h}{h}\left(\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\cdots\right) + ln\ x$$

$$= \lim_{h\to 0}(x+h)\left(\frac{1}{x}-\frac{h}{2x^2}+\frac{h^2}{3x^3}-\cdots\right) + ln\ x$$

$$= x.\frac{1}{x} + ln\ x = 1 + ln\ x.$$

উদাহরণ–14. সংজ্ঞার সাহায্যে $x^n \sin ax$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

[CUH-1987]

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(x^n \sin ax) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n \sin a(x+h) - x^n \sin ax}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n\{\sin a(x+h) - \sin ax\} + \sin ax\{(x+h)^n - x^n\}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} (x+h)^n . \frac{\sin a(x+h) - \sin ax}{h} + \sin ax \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$= \lim_{h\to 0} (x+h)^n . \frac{2\sin\frac{ah}{2}\cos\left(\frac{2ax+ah}{2}\right)}{h}$

$+ \sin ax \lim_{h\to 0} \frac{x^n}{h}\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - 1\right\}$

$= \lim_{h\to 0} (x+h)^n . \left(\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}}\right) . a\cos\left(\frac{2ax+ah}{2}\right) + x^n \sin ax$

$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{nh}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{x^2} + \cdots + \frac{h^n}{x^n}\right\}$

$= x^n . a\cos ax + x^n \sin ax \lim_{h\to 0}\left\{\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{h}{x} + \cdots + \frac{h^{n-1}}{x^n}\right\}$

$= ax^n \cos ax + x^n . \sin ax . \frac{n}{x} = ax^n \cos ax + nx^{n-1}\sin ax.$

উদাহরণ–15. সংজ্ঞার সাহায্যে $x\tan^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(x\tan^{-1}x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\tan^{-1}(x+h) - x\tan^{-1}x}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\{\tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1}x\} + \tan^{-1}x\{(x+h) - x\}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} (x+h) . \frac{\tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1}x}{h} + \tan^{-1}x$

ধরি $\tan^{-1}x = y$ এবং $\tan^{-1}(x+h) = y + k$

$\therefore k = \tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1}x$, $h \to 0$ হইলে $k \to 0$ হবে।

এখন $x = \tan y$, $x + h = \tan(y+k)$

$\therefore h = \tan(y+k) - \tan y$

$\therefore \frac{d}{dx}(x\tan^{-1}x) = \tan^{-1}x + \lim_{h\to 0}(x+h) . \lim_{k\to 0} \frac{k}{\tan(y+k) - \tan y}$

$= \tan^{-1}x + x \lim_{k\to 0} \frac{k\cos y\cos(y+k)}{\sin k}$

$= \tan^{-1}x + x \lim_{k\to 0}\left(\frac{k}{\sin k}\right) . \cos y . \cos(y+k)$

$= \tan^{-1}x + x.\cos^2 y = \tan^{-1}x + \frac{x}{\sec^2 y}$

$= \tan^{-1}x + \frac{x}{1+\tan^2 y} = \tan^{-1}x + \frac{x}{1+x^2}.$

উদাহরণ–16. সংজ্ঞার সাহায্যে $xe^x \sin x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(xe^x \sin x)$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\,e^{x+h}\sin(x+h) - xe^x \sin x}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}\sin(x+h)\{(x+h)-x\} + x\sin(x+h)\{e^{x+h} - e^x\} + xe^x\{\sin(x+h) - \sin x\}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} e^{x+h}\sin(x+h) + x \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)}{h}(e^{x+h} - e^x)$

$+ xe^x \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

$= e^x \sin x + xe^x \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)}{h}(e^h - 1)$

$+ xe^x \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\frac{2x+h}{2}}{h}$

$= e^x \sin x + xe^x \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)}{h}\left(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\right)$

$+ xe^x \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) . \cos\frac{2x+h}{2}$

$= e^x \sin x + xe^x \sin x + xe^x \cos x.$

উদাহরণ–17. সংজ্ঞার সাহায্যে $\frac{\cos x}{xe^x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{xe^x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos(x+h)}{(x+h)e^{x+h}} - \frac{\cos x}{xe^x}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{xe^x\cos(x+h) - (x+h)e^{x+h}.\cos x}{hx(x+h)\,e^x.\,e^{x+h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{xe^x\{\cos(x+h) - \cos x\} - \cos x\{(x+h)e^{x+h} - xe^x\}}{hx(x+h)\,e^x.e^{x+h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)e^{x+h}} \cdot \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} - \frac{\cos x}{xe^x} \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)e^{x+h} - xe^x}{h(x+h)e^{x+h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)e^{x+h}} \cdot \frac{2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$- \frac{\cos x}{xe^x} \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}\{(x+h) - x\} + x\{e^{x+h} - e^x\}}{h(x+h)\,e^{x+h}}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)e^{x+h}} \cdot \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

$$- \frac{\cos x}{xe^x} \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(x+h)} - \frac{\cos x}{xe^x} \lim_{h\to 0} \frac{x\{e^{x+h} - e^x\}}{h(x+h)e^{x+h}}.$$

$$= -\frac{1}{xe^x}.\sin x - \frac{\cos x}{xe^x}.\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{e^x} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h(x+h)e^h}$$

$$= -\frac{\sin x}{xe^x} - \frac{\cos x}{x^2e^x} - \frac{\cos x}{e^x} \lim_{h\to 0} \frac{1}{he^h(x+h)}\left(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + ..\right)$$

$$= -\frac{\sin x}{xe^x} - \frac{\cos x}{x^2e^x} - \frac{\cos x}{e^x} \lim_{h\to 0} \frac{1}{e^h.(x+h)}\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots\right)$$

$$= -\frac{\sin x}{xe^x} - \frac{\cos x}{x^2e^x} - \frac{\cos x}{xe^x}.$$

উদাহরণ–18. সংজ্ঞার সাহায্যে x^x এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[DUH–1987]**

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(x^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln x}) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)\ln(x+h)} - e^{x\ln x}}{h}$

ধরি $x\ln x = z$ এবং $(x+h)\ln(x+h) = z + k$

$\therefore k = (x+h)\ln(x+h) - x\ln x$, যখন $h \to 0$ তখন $k \to 0$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^x) = \lim_{k\to 0} \frac{e^{z+k} - e^z}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\ln(x+h) - x\ln x}{h}$$

$$= e^z \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\{\ln(x+h) - \ln x\} + \ln x\{(x+h) - x\}}{h}$$

$$= e^z\left[\lim_{h\to 0} \frac{x+h}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) + \ln x\right]$$

$$= e^{x\ln x}\left[\lim_{h\to 0} \frac{x+h}{h}\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \cdots\right) + \ln x\right]$$

$$= x^x[1 + \ln x]$$

উদাহরণ–19. মূল নিয়মে $x^{\sin x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [Find from the first principle the differential coefficient of $x^{\sin x}$. **[NUH–2010(Old)]**

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(x^{\sin x}) = \frac{d}{dx}(e^{\sin x\ln x})$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[e^{\sin(x+h)\ln(x+h)} - e^{\sin x\ln x}]$$

ধরি $\sin x\ln x = z$ এবং $\sin(x+h)\ln(x+h) = z + k$

$\therefore k = \sin(x+h)\ln(x+h) - \sin x\ln x$

যখন $h \to 0$ তখন $k \to 0$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^{\sin x}) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{z+k} - e^z}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{e^{z+k} - e^z}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{k}{h}$$

$$= e^z \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\ln(x+h) - \sin x\ln x}{h}$$

$$= e^z \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\{\ln(x+h) - \ln x|\} + \ln x\{\sin(x+h) - \sin x\}}{h}$$

$$= e^{\sin x\ln x}\left[\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\{\ln(x+h) - \ln x\}}{h}\right.$$

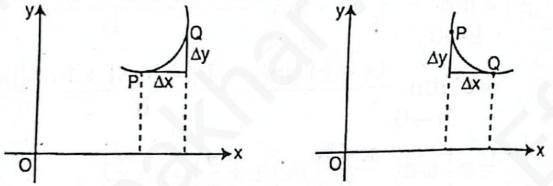
$$\left. + \ln x \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x\ln x\right].$$ **(Ans)**

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

3.A.1. পরিবর্তন হার কি? (What is the rate of change?)

Ans :



মনে করি $y = f(x)$ বক্ররেখার উপর $P(x, y)$ এবং $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ নিকটবর্তী দুইটি বিন্দু। এখানে x এর ক্ষুদ্র পরিবর্তন Δx এর জন্য y এর ক্ষুদ্র পরিবর্তন Δy হইয়াছে। এইক্ষেত্রে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ কে (x, y) বিন্দুতে x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তন হার বলা হয়।

3.A.2. অন্তরজ বা অন্তরক সহগ কাকে বলে? (What is called derivative or differential coefficient?)

Ans : $y = f(x)$ রেখার (x, y) বিন্দুতে x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তন হার $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ এর সীমাস্থ মান $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ কে x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরজ বা অন্তরক সহগ বলে। ইহাকে $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

3.A.3. $y = f(x)$ ফাংশনের জন্য $\frac{dy}{dx}$ এর মূল আকার লিখ। (Write the original form of $\frac{dy}{dx}$ for the function $y = f(x)$.)

Ans : $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\Big|$ $\Delta y = (y + \Delta y) - y$
$= f(x + \Delta x) - f(x)$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

3.A.4. অন্তরীকরণ কি? (What is differentiation?)

Ans : যে পদ্ধতিতে অন্তরজ বা অন্তরক সহগ নির্ণয় করা হয় তাহাকে অন্তরীকরণ বলা হয়।

3.A.5. জ্যামিতিকভাবে $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is $\frac{dy}{dx}$ in geometrically?) **[NUH–2010, NUH(NM)–2010]**

Ans : জ্যামিতিকভাবে $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা $y = f(x)$ রেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্দেশিত হয়।

3.A.6. কোন শর্তে (x, y) বিন্দুতে $y = f(x)$ এর স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল বা y অক্ষের লম্ব হইবে? (Which is the condition where the tangent line of $y = f(x)$ at (x, y) is parallel to x-axis or perpendicular to y-axis?)

Ans : $\frac{dy}{dx} = 0$ হইলে (x, y) বিন্দুতে $y = f(x)$ রেখার স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল বা y অক্ষের লম্ব হইবে।

3.A.7. কোন বিন্দুতে $y = x^2$ এর স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হইবে? (Which is the point where the tangent line of $y = x^2$ is parallel to x-axis?)

Ans : এখানে $y = x^2$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 2x$

যেহেতু $x = 0$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$, সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $y = x^2$ এর স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হইবে।

3.A.8. কোন শর্তে (x, y) বিন্দুতে $y = f(x)$ এর স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল বা x অক্ষের লম্ব হইবে? (Which is the condition where the tangent line of $y = f(x)$ at (x, y) is parallel to y-axis or perpendicular to x-axis?)

Ans : $\frac{dy}{dx} = \infty$ বা $\frac{dx}{dy} = 0$ হইলে (x, y) বিন্দুতে $y = f(x)$ রেখার স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল বা x অক্ষের লম্ব হইবে।

EXERCISE–3(A)

সংজ্ঞার সাহায্যে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

1. x^3 2. $\frac{1}{x^2}$ 3. $x^2 + \frac{1}{x^3}$ 4. $a\sqrt{x}$
5. $\frac{1}{\sqrt{x + a}}$ 6. $\frac{1}{x^2 - 1}$ 7. $\frac{x - 1}{x + 1}$ 8. $\cos 2x$
9. $\sin 4x$ 10. $\cos(ax + b)$ **[RUH–1958]** 11. $\tan x^2$
12. $\tan^2 2x$ 13. $\cos x^2$ 14 e^{ax} 15. e^{10x+7}
16. $e^{\sin x}$ **[CUH–1984]** 17. $e^{\sec x}$ 18. $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$
19. $\cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ 20. $e^{\cos^{-1}x}$ 21. $e^{\tan^{-1}x}$ **[CUH–1978]**
22. $\sqrt{\sin x}$ **[NUH–09]** 23. $\sqrt{\cot x}$ 24. $e^{\sqrt{\cot x}}$

25. $ln \sin x$ **[NUH(NM)–2010]**

26. $ln \cos\frac{x}{a}$ 27. $\log_{10} \cos^{-1}x$

28. $ln \tan^{-1}x$ 29. $\cos(ln\, x)$ **[Agr. U–1983]**

30. $\tan(ln\, x)$ 31. $x^3 ln\, x$ 32. $x \sin x$

33. $x^2 \cos bx$ 34. $x^2 \cot^{-1}x$ 35. $x^2 e^x \cos x$

36. $\frac{\sin x}{x}$ 37. $\frac{e^x}{\tan x}$ 38. $\frac{\cot x}{xe^x}$

39. $x^{\cos x}$ 40. $(x^x)^x$.

ANSWER–3(A)

1. $3x^2$ 2. $-\frac{2}{x^3}$ 3. $2x - \frac{3}{x^4}$

4. $\frac{a}{2\sqrt{x}}$ 5. $-\frac{1}{2(x+a)^{3/2}}$ 6. $-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$

7. $\frac{2}{(x+1)^2}$ 8. $-2 \sin 2x$ 9. $4 \cos 4x$

10. $-a \sin(ax+b)$ 11. $2x \sec^2 x^2$ 12. $4 \tan 2x \sec^2 2x$

13. $-2x \sin x^2$ 14. ae^{ax} 15. $10e^{10x+7}$

16. $e^{\sin x} \cos x$ 17. $e^{\sec x} \sec x \tan x$ 18. $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

19. $-\frac{a}{a^2+x^2}$ 20. $-\frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$ 21. $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$

22. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ 23. $-\frac{\text{csoec}^2 x}{2\sqrt{\cot x}}$ 24. $-\frac{e^{\sqrt{\cot x}} \text{cosce}^2 x}{2\sqrt{\cot x}}$

25. $\cot x$ 26. $-\frac{1}{a}\tan\frac{x}{a}$ 27. $-\frac{\log_{10} e}{(\cos^{-1}x)\sqrt{1-x^2}}$

28. $\frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$ 29. $-\frac{\sin(ln\, x)}{x}$ 30. $\frac{\sec^2(ln\, x)}{x}$

31. $x^2 + 3x^2 ln\, x$ 32. $\sin x + x \cos x$

33. $2x \cos bx - bx^2 \sin bx$ 34. $2x \cot^{-1}x - \frac{x^2}{1+x^2}$

35. $2x e^x \cos x + x^2 e^x \cos x - x^2 e^x \sin x$

36. $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ 37. $\frac{e^x \tan x - e^x \sec^2 x}{(\tan x)^2}$

38. $-\frac{x \text{ cosec}^2 x + \cot x + x \cot x}{x^2 e^x}$

39. $x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x\, ln\, x\right)$ 40. $(x^x)^x (2x\, ln\, x + x)$.

———×———

Chapter–3(B)

বিভিন্ন ফাংশনের অন্তরক সহগ

DIFFERENTIATIAL COEFFICIENTS OF VARIOUS TYPES OF FUNCTIONS

3.B.1. অন্তরক সহগ নির্ণয়ের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী (Some important formulas to find differential coefficients) :

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}(c) = 0$

$\frac{d}{dx}(ln\, x) = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\, ln\, a$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \cot x.$

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + vw\frac{du}{dx} + uw\frac{dv}{dx}$

$\frac{d}{dx}(u^v) = u^v \frac{d}{dx}(v\, ln\, u)$

3.B.2. অন্তরক সহগের চেইন রুল (Chain rule of differential coefficients) :

$y = f(u)$ এবং $u = g(x)$ হইলে অন্তরক সহগের চেইন রুল $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

অনুরূপে, $y = f(u)$, $u = g(v)$ এবং $v = h(x)$ হইলে অন্তরক সহগের চেইন রুল হইবে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$.

3.B.3. লগারিদম পদ্ধতিতে অন্তরীকরণ (logarithmic Differentiation) ঃ u, v ও x সম্পর্কিত রাশি হইলে u^v এর অন্তরক সহগ লগরিদমের সাহায্যে করা হয়।

ধরি $y = u^v$ $\therefore \ln y = v \ln u$ (উভয় পক্ষে $\ln$ নিয়ে)

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি $\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(v \ln u)$

বা $\frac{d}{dy}(\ln y).\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(v \ln u)$ বা $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(v \ln u)$

বা $\frac{dy}{dx} = y\frac{d}{dx}(v \ln u)$ বা $\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\frac{d}{dx}(v \ln u)$.

ইহাই লগারিদম পদ্ধতিতে অন্তরীকরণ সূত্র।

3.B.4. অব্যক্ত সম্পর্কের (Implicit relation) অন্তরীকরণ ঃ

$f(x, y) = 0$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ (Differentiation) করা হইল সম্পর্কটি হইবে $\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$। এই সম্পর্ককে সরল করিয়া x, y এর মাধ্যমে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করা হয়।

3.B.5. পরামিতিক সমীকরণ (Parametric equation) এর অন্তরক সহগ ঃ ধরি $x = f(t), y = g(t)$ পরামিতিক সমীকরণ।

x এর সাপেক্ষে ইহার অন্তরক সহগ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$.

3.B.6. প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (Method of Substitution) এর সাহায্যে অন্তরক সহগ ঃ যদি কোন ত্রিকোণমিতিক রাশির অন্তরীকরণ জটিল হয়, তবে নির্দিষ্ট প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে উহাকে সহজ রাশিতে প্রকাশ করিয়া অন্তরীকরণ করা হয়।

3.B.7. g(x) এর সাপেক্ষে f(x) এর অন্তরীকরণ (Differentiation of f(x) with respect to g(x)) : $y = f(x)$ এবং $z = g(x)$

$\therefore$ g(x) এর সাপেক্ষে f(x) এর অন্তরক সহগ $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz} = \frac{dy}{dx} \div \frac{dz}{dx}$.

3.B.8. হাইপারবোলিক ফাংশনের অন্তরীকরণ (Differentiation of hyperbolic functions) :

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \quad \left[\because \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)$$

$$= \frac{\cosh x\frac{d}{dx}(\sinh x) - \sinh x\frac{d}{dx}(\cosh x)}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)$$

$$= \frac{\sinh x\frac{d}{dx}(\cosh x) - \cosh x\frac{d}{dx}(\sinh x)}{\sinh^2 x}$$

$$= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosech} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sinh x}\right) = -\frac{1}{\sinh^2 x}\cdot\cosh x = -\coth x.\operatorname{cosech} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cosh x}\right) = -\frac{1}{\cosh^2 x}\cdot\sinh x = -\tanh x \operatorname{sech} x.$$

3.B.9. বিপরীত হাইপারবোলিক ফাংশনের অন্তরীকরণ (Differentiation of inverse hyperbolic functions) :

ধরি $y = \sinh^{-1}x$ $\therefore x = \sinh y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \cosh y = \sqrt{(1 + \sinh^2 y)} = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ অর্থাৎ } \frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

অনুরূপে $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$

$\frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = -\frac{1}{x^2 - 1}$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$

$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

হাইপারবেলিক ফাংশনের ত্রিকোণোমিতিক প্রয়োজনীয় সূত্র ঃ

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$\coth^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x$ $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

$\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1 = 2\cosh^2 x - 1$

$\sinh 2x = \frac{2\tanh x}{1 - \tanh^2 x}$ $\cosh 2x = \frac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}$

$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$ $\sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

$\cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$

$\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$ $\operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$

$\operatorname{cosech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)$.

Find the DC of y = with respect to x.

উদাহরণ–1. x এর সাপেক্ষে $(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [DUH–1978]

সমাধান ঃ ধরি $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$

$= z^{3/2}$ ..... (1) যেখানে $z = a^{2/3} - x^{2/3}$ ..... (2)

(1) কে z এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি $\frac{dy}{dz} = \frac{3}{2} z^{1/2} = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}$

(2) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি $\frac{dz}{dx} = 0 - \frac{2}{3} x^{-1/3} = -\frac{2}{3x^{1/3}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{1}{3x^{1/3}}\right) = -\frac{(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}$.

উদাহরণ–2. x এর সাপেক্ষে $\tan(ln\ \sin e^{\sqrt{x}})$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [DUH–1979]

সমাধান ঃ ধরি $y = \tan(ln\ \sin e^{\sqrt{x}})$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan(ln\ \sin e^{\sqrt{x}})$

$= \sec^2(ln\ \sin e^{\sqrt{x}}) \frac{d}{dx} ln\ \sin e^{\sqrt{x}}$

$= \sec^2(ln\ \sin e^{\sqrt{x}}) . \frac{1}{\sin e^{\sqrt{x}}} \frac{d}{dx}(\sin e^{\sqrt{x}})$

$= \sec^2(ln\ \sin e^{\sqrt{x}}) . \frac{1}{\sin e^{\sqrt{x}}} . \cos e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}})$

$= \sec^2(ln\ \sin e^{\sqrt{x}}) . \cot(e^{\sqrt{x}})\, e^{\sqrt{x}} . \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \sec^2(ln\ \sin e^{\sqrt{x}}) . \cot(e^{\sqrt{x}}) . e^{\sqrt{x}} . \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

উদাহরণ–3. x এর সাপেক্ষে $(x^2 + 1)\sin^{-1}x + e^{\sqrt{1+x^2}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [DUH–1984]

সমাধান ঃ ধরি $y = (x^2 + 1)\sin^{-1}x + e^{\sqrt{1+x^2}}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [differentiating w. r. to x we get]

$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)\frac{d}{dx}\sin^{-1}x + \sin^{-1}x \frac{d}{dx}(x^2 + 1) + \frac{d}{dx} e^{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{x^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} + 2x \sin^{-1}x + e^{\sqrt{1+x^2}} \frac{d}{dx}(\sqrt{1 + x^2})$

$= \frac{x^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} + 2x \sin^{-1}x + e^{\sqrt{1+x^2}} . \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \frac{d}{dx}(1 + x^2)$

$= \frac{x^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} + 2x \sin^{-1}x + \frac{xe^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + x^2}}$

উদাহরণ–4. $\sqrt{x}\, e^x \sec x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [RUH–1979]

সমাধান ঃ ধরি $y = \sqrt{x}\, e^x \sec x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [differentiating w. r. to x we get]

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\frac{d}{dx}(e^x \sec x) + e^x \sec x \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \sqrt{x}\left\{e^x \frac{d}{dx}(\sec x) + \sec x \frac{d}{dx}(e^x)\right\} + e^x \sec x . \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \sqrt{x}(e^x . \sec x . \tan x + \sec x . e^x) + \frac{e^x \sec x}{2\sqrt{x}}$

$= e^x \sec x\left(\sqrt{x}\tan x + \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= \frac{e^x \sec x(2x \tan x + 2x + 1)}{2\sqrt{x}}$.

উদাহরণ–5. x এর সাপেক্ষে $ln\{\sqrt{(1 + ln\ x)} - \sin x\}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [DUH–1979]

সমাধান ঃ ধরি $y = ln\{\sqrt{(1 + ln\ x)} - \sin x\}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [differentiating w. r. to x we get]

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1 + ln\ x)} - \sin x}\frac{d}{dx}\{(\sqrt{(1 + ln\ x)} - \sin x\}$

$= \frac{1}{\sqrt{(1 + ln\ x)} - \sin x}\left[\frac{1}{2\sqrt{(1 + ln\ x)}}\frac{d}{dx}(1 + ln\ x) - \cos x\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{(1 + ln\ x)} - \sin x}\left[\frac{1}{2x\sqrt{(1 + ln\ x)}} - \cos x\right]$

উদাহরণ–6. $y = \sin^{-1}\left(\frac{a + b\cos x}{b + a\cos x}\right)$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [NUH–1998, DUH–1986]

সমাধান ঃ $y = \sin^{-1}\left(\frac{a + b\cos x}{b + a\cos x}\right)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a + b\cos x}{b + a\cos x}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{a + b\cos x}{b + a\cos x}\right)$

$= \frac{b + a\cos x}{\sqrt{(b + a\cos x)^2 - (a + b\cos x)^2}}$

$\times \frac{(b + a\cos x)\frac{d}{dx}(a + b\cos x) - (a + b\cos x)\frac{d}{dx}(b + a\cos x)}{(b + a\cos x)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2) - (b^2 - a^2)\cos^2 x}} \times \frac{(b + a\cos x)(-b\sin x) - (a + b\cos x)(-a\sin x)}{b + a\cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)}\cdot \sin x} \cdot \frac{-(b^2 - a^2)\sin x}{b + a\cos x} = -\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b + a\cos x}.$$

উদাহরণ–7. $y = e^{\sin x}\sin(a^x)$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। **[DUH–1965]**

সমাধান ঃ $y = e^{\sin x}\sin(a^x)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [differentiating w. r. to x we get]

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin a^x) + \sin a^x \frac{d}{dx}(e^{\sin x})$$

$$= e^{\sin x}\cos(a^x)\frac{d}{dx}(a^x) + \sin(a^x).\, e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= e^{\sin x}\cos(a^x)\, a^x \ln a + \sin(a^x)\, e^{\sin x}\cos x$$

$$= e^{\sin x}[a^x \ln a.\cos(a^x) + \cos x.\sin(a^x)]$$

উদাহরণ–8. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(i) $y = \tan(\ln x^2)$ **[CUH–1985]**

(ii) $y = \tan^{-1}\left(\frac{a + x}{1 - ax}\right)$ **[DUH–1969, RUH–1959]**

(iii) $y = \tan^{-1}\left(\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right)$ **[NUH–1993]**

(iv) $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$ **[NUH(NM)–09, DUH–05, 06, RUH–83]**

(v) $y = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{1/4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x^2$ **[DUH–1980]**

(vi) $y = e^{\operatorname{cosec}^2\sqrt{x^2 + 3}}$ **[NUH(NM)–2007]**

সমাধান ঃ (i) $y = \tan(\ln x^2)$, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\tan(\ln x^2)\} = \sec^2(\ln x^2)\frac{d}{dx}(\ln x^2)$$

$$= \sec^2(\ln x^2).\frac{2}{x} = \frac{2\sec^2(\ln x^2)}{x}.$$

(ii) $y = \tan^{-1}\left(\frac{a + x}{1 - ax}\right) = \tan^{-1}a + \tan^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}a + \tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(iii) $y = \tan^{-1}\left(\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right) = \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(\tan x) = \frac{\pi}{4} + x$

x এর সম্পর্কে অন্তরীকরণ করি $\frac{dy}{dx} = 1$.

(iv) $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\right\}$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$.

(v) $y = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{1/4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x^2$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x^2$$

$$= \frac{1}{4}\ln(1 + x) - \frac{1}{4}\ln(1 - x) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x^2$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1 + x^4}\cdot 2x$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1 - x^2} - \frac{x}{1 + x^4} = \frac{1}{2(1 - x^2)} - \frac{x}{1 + x^4}.$$

(vi) $y = e^{\operatorname{cosec}^2\sqrt{x^2 + 3}}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই,

$$\frac{dy}{dx} = e^{\operatorname{cosec}^2\sqrt{x^2 + 3}}\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^2\sqrt{x^2 + 3})$$

$$= e^{\operatorname{cosec}^2\sqrt{x^2 + 3}}\cdot(-2\operatorname{cosec}\sqrt{x^2 + 3}\cdot\operatorname{cosec}\sqrt{x^2 + 3}\cdot\cot\sqrt{x^2 + 3})\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2 + 3})$$

$$= -2e^{\operatorname{cosec}^2\sqrt{x^2 + 3}}\operatorname{cosec}^2\sqrt{x^2 + 3}\cdot\cot\sqrt{x^2 + 3}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

উদাহরণ–9. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + x^{1/x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [NUH–1997]

সমাধান ঃ ধরি $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x + x^{1/x}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + \frac{d}{dx}x^{1/x}$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \frac{d}{dx}\left\{x\ ln\ \left(1+\frac{1}{x}\right)\right\} + x^{1/x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\ ln\ x\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left\{x\frac{d}{dx}\ ln\ \left(1+\frac{1}{x}\right) + ln\ \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}(x)\right\}$$

$$+ x^{1/x}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(ln\ x) + ln\ x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left\{x.\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{x}\right) + ln\ \left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$+ x^{1/x}\left\{\frac{1}{x}.\frac{1}{x} + ln\ x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right\}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left\{\frac{x^2}{x+1}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) + ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\} + x^{1/x}\left\{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ ln\ x\right\}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left\{-\frac{1}{x+1} + ln\ \left(1+\frac{1}{x}\right)\right\} + x^{1/x}\left(\frac{1-ln\ x}{x^2}\right).$$

উদাহরণ–10. x এর সাপেক্ষে $(\sin x)^{ln\,x} + \sin^2(\cos^{-1}x)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [NUH–2007, NUH(NM)–2009, DUH–1981, RUH–1982]

সমাধান ঃ ধরি $y = (\sin x)^{ln\,x} + \sin^2(\cos^{-1}x)$

$= (\sin x)^{ln\,x} + 1 - \cos^2(\cos^{-1}x) = (\sin x)^{ln\,x} + 1 - x^2.$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{ln\,x}\frac{d}{dx}\{ln\,x.\ ln\,(\sin x)\} - 2x$$

$$= (\sin x)^{ln\,x}\left\{\frac{1}{x}\ ln\ (\sin x) + \cot x\ ln\ x\right\} - 2x.$$

উদাহরণ–11. $(\cos x)^y + (\sin y)^x = 0$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর [DUH–1987, 1989, RUH–1991, CUH–1985]

সমাধান ঃ $(\cos x)^y + (\sin y)^x = 0$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{d}{dx}(\cos x)^y + \frac{d}{dx}(\sin y)^x = 0$

$$\text{or } (\cos x)^y \frac{d}{dx}\{y\ ln\ (\cos x)\} + (\sin y)^x \frac{d}{dx}\{x\ ln\ (\sin y)\} = 0$$

$$\text{or } (\cos x)^y \left\{\frac{dy}{dx}\ ln\ \cos x + y.\frac{-\sin x}{\cos x}\right\}$$

$$+ (\sin y)^x \left\{ln\ \sin y + x.\frac{\cos y}{\sin y}.\frac{dy}{dx}\right\} = 0$$

$$\text{or } \frac{dy}{dx}[(\cos x)^y\ ln\ \cos x + (\sin y)^x.\ x\cot y]$$

$$= (\cos x)^y.\ y\tan x - (\sin y)^x.\ ln\ \sin y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)^y y\tan x - (\sin y)^x.\ ln\ \sin y}{(\cos x)^y.\ ln\ \cos x + (\sin y)^x.x\cot y}.$$

উদাহরণ–12. $y = (\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^{\tan x}$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [DUH–1980, RUH–1995]

সমাধান ঃ $y = (\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^{\tan x}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{dy}{dx} = (\tan x)^{\cot x}\frac{d}{dx}\{\cot x\ ln\ \tan x\} + (\cot x)^{\tan x}\frac{d}{dx}\{\tan x\ ln\ \cot x\}$$

$$= (\tan x)^{\cot x}\left\{-\text{cosec}^2x.\ ln\ \tan x + \cot x.\frac{\sec^2x}{\tan x}\right\}$$

$$+ (\cot x)^{\tan x}\left\{\sec^2x.\ ln\ \cot x + \tan x.\frac{-\text{cosec}^2x}{\cot x}\right\}$$

$$= (\tan x)^{\cot x}(1 - ln\ \tan x)\ \text{cosec}^2x + (\cot x)^{\tan x}(ln\ \cot x - 1)\sec^2x.$$

উদাহরণ–13. x এর সাপেক্ষে $(x^2+1)^{\sin^{-1}x} + e^{\sqrt{1+x^2}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [DUH–1983]

সমাধান ঃ ধরি $y = (x^2+1)^{\sin^{-1}x} + e^{\sqrt{1+x^2}}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)^{\sin^{-1}x}\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}x.\ ln\ (x^2+1)\} + e^{\sqrt{1+x^2}}\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})$$

$$= (x^2+1)^{\sin^{-1}x}\left\{\sin^{-1}x.\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\ ln\ (x^2+1)\right\}$$

$$+ e^{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}.2x$$

$$= (x^2+1)^{\sin^{-1}x}\left\{\frac{2x\sin^{-1}x}{x^2+1} + \frac{ln\ (x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}\right\} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.e^{\sqrt{1+x^2}}.$$

উদাহরণ–14. $y = \left(\frac{n}{x}\right)^{nx}\left(1 + ln\ \frac{x}{n}\right)$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

[NUH–2007, DUH–1992, RUH–1989, CUH–1992]

সমাধান ঃ $y = \left(\frac{n}{x}\right)^{nx}\left(1 + ln\ \frac{x}{n}\right)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{n}{x}\right)^{nx}\frac{d}{dx}\left(1 + ln\ \frac{x}{n}\right) + \left(1 + ln\ \frac{x}{n}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{n}{x}\right)^{nx}$$

$$= \left(\frac{n}{x}\right)^{nx}\frac{d}{dx}(1 + ln\ x - ln\ n) + \left(1 + ln\ \frac{x}{n}\right)\left(\frac{n}{x}\right)^{nx}\frac{d}{dx}\left\{nx\ ln\ \left(\frac{n}{x}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{n}{x}\right)^{nx}\cdot\frac{1}{x} + \left(1 + ln\ \frac{x}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{x}\right)^{nx}$$

$$\left\{n\ ln\ \left(\frac{n}{x}\right) + nx\frac{d}{dx}(ln\ n - ln\ x)\right\}$$

$$= \left(\frac{n}{x}\right)^{nx}\frac{1}{x} + \left(1 + ln\ \frac{x}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{x}\right)^{nx}\left\{n\ ln\ \left(\frac{n}{x}\right) + nx.\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{n}{x}\right)^{nx} + \left(1 + ln\ \frac{x}{n}\right)\left(\frac{n}{x}\right)^{nx}.\ n\left\{ln\ \left(\frac{n}{x}\right) - 1\right\}.$$

উদাহরণ–15. $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ হইলে দেখাও যে

$$f'(0) = \left(2\ ln\ \frac{a}{b} + \frac{b^2 - a^2}{ab}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$$ **[NUH–1996, RUH–1987]**

প্রমাণ ঃ $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$

x এর সম্পর্কে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$f'(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}\cdot\frac{d}{dx}\left\{(a + b + 2x)\ ln\ \left(\frac{a+x}{b+x}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}\cdot\left\{2\ ln\ \frac{a+x}{b+x} + (a + b + 2x)\frac{d}{dx}\ ln\ \left(\frac{a+x}{b+x}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$$

$$\times\left[2\ ln\ \frac{a+x}{b+x} + (a + b + 2x)\frac{d}{dx}\{ln\ (a + x) - ln\ (b + x)\}\right]$$

$$= \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}\left[2\ ln\ \frac{a+x}{b+x} + (a + b + 2x)\left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}\left[2\ ln\ \frac{a+x}{b+x} + (a + b + 2x).\ \frac{b-a}{(a+x)(b+x)}\right]$$

$x = 0$ বসাই $f'(0) = \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}\left[2\ ln\ \frac{a}{b} + (a + b).\ \frac{b-a}{ab}\right]$

$$= \left(2\ ln\ \frac{a}{b} + \frac{b^2 - a^2}{ab}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}.$$

উদাহরণ–16. যদি $x^p y^q = (x + y)^{p+q}$ হয়, তবে প্রমাণ কর $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

[RUH–1969, 1988]

প্রমাণ ঃ $x^p y^q = (x + y)^{p+q}$। উভয় পক্ষে ln নিয়ে পাই $p\ ln\ x + q\ ln\ y = (p + q)\ ln\ (x + y)$, x এর সম্পর্কে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) \text{ or } \left[\frac{q}{y} - \frac{p+q}{x+y}\right]\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y} - \frac{p}{x}$$

$$\text{or } (qx + qy - py - qy)\frac{dy}{dx} = px + qx - px - py$$

$$\text{or } x(qx - py)\frac{dy}{dx} = y(qx - py) \text{ or } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

উদাহরণ–17. x এর সাপেক্ষে $x^y + y^x = a^b$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

[NUH–07, 2010(Old), NUH(NM)–09, DUH–94, RUH–83]

সমাধান ঃ $x^y + y^x = a^b$, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি

$$x^y\frac{d}{dx}(y\ ln\ x) + y^x\frac{d}{dx}(x\ ln\ y) = 0$$

$$\text{or } x^y\left(\frac{y}{x} + \frac{dy}{dx}.\ ln\ x\right) + y^x\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx} + ln\ y\right) = 0$$

$$\text{or } (yx^{y-1} + y^x\ ln\ y) + (x^y\ ln\ x + xy^{x-1})\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{yx^{y-1} + y^x\ ln\ y}{x^y\ ln\ x + xy^{x-1}}.$$

উদাহরণ–18. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(i) $y = (\sin x)^{\tan x}$ (ii) $y = x^{\sin^{-1}x}$ **[RUH–1974]**

[BSc(Pass)–2010, DUH–1974]

(iii) $y = (1 + x)^x$ **[RUH–1976]**

(iv) $(\cos y)^x = (\sin x)^y$ **[RUH–1979]**

(v) $y = x^{(x)^x}$ [DUH–1980]

(vi) $y = x^{(x)^{(x)^{\cdots\infty}}}$ [DUH–1986]

(vii) $y = (x \ln x)^{\ln(\ln x)}$

(viii) $x^y y^x = 1$ [NUH–2009]

(ix) $y = (x^2+1)^{\sqrt{1-x^2}} + (\sin^{-1}x)^2$ [DUH–1984]

(x) $y = \dfrac{e^{x^2}\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}$ [DUH–1983]

(xi) $y = \dfrac{1-x}{(1-x^3)^{1/2}}$ [DUH–1965, 1966]

(xii) $y = x^{x^{\cos x}}$ [BSc(Pass)–2007]

(xiii) $y = \dfrac{7\sqrt{2x^3+1}\sin 5x}{(2x+3)(x-1)}$ [NUH(NM)–2006]

(xiv) $y = x^{\ln x} + x^{\cos^{-1}x}$ [NUH(NM)–2010]

সমাধান ঃ (i) $y = (\sin x)^{\tan x}$

উভয় পক্ষে $\ln$ নিয়ে পাই $\ln y = \tan x \ln \sin x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \tan x.\frac{\cos x}{\sin x} + \sec^2 x \ln \sin x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y[1 + \sec^2 x \ln \sin x] = (\sin x)^{\tan x}[1 + \sec^2 x \ln \sin x].$$

(ii) $y = x^{\sin^{-1}x}$, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin^{-1}x}.\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}x \ln x\} = x^{\sin^{-1}x}\left\{\frac{\sin^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right\}.$$

(iii) $y = (1+x)^x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)^x\frac{d}{dx}\{x\ln(1+x)\} = (1+x)^x\left[x.\frac{1}{1+x} + \ln(1+x)\right].$$

(iv) $(\cos y)^x = (\sin x)^y$ বা $x \ln \cos y = y \ln \sin x$ [$\ln$ নিয়ে]

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$x\frac{d}{dx}\{\ln \cos y\} + \ln \cos y.\frac{d}{dx}(x) = y\frac{d}{dx}(\ln \sin x) + \ln \sin x.\frac{d}{dx}(y)$$

$$\text{বা } x.\left(\frac{-\sin y}{\cos y}\right)\frac{dy}{dx} + \ln \cos y = y.\frac{\cos x}{\sin x} + \ln \sin x.\frac{dy}{dx}$$

$$\text{বা}\left(\ln \sin x + \frac{x\sin y}{\cos y}\right)\frac{dy}{dx} = \ln \cos y - y.\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\ln \cos y - y\cot x}{\ln \sin x + x\tan y}.$$

(v) $y = x^{(x)^x}$, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{dy}{dx} = x^{(x)^x}\frac{d}{dx}\{x^x \ln x\} = x^{(x)^x}\left\{x^x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x.\frac{d}{dx}(x^x)\right\}$$

$$= x^{(x)^x}\left\{x^x.\frac{1}{x} + \ln x.\, x^x\frac{d}{dx}(x\ln x)\right\}$$

$$= x^x.\, x^{(x)^x}\left\{\frac{1}{x} + \ln x\left(x.\frac{1}{x} + \ln x\right)\right\} = x^x.\, x^{(x)^x}\left\{\frac{1}{x} + \ln x(1+\ln x)\right\}.$$

(vi) $y = x^{(x)^{(x)^{\cdots\infty}}} = x^y$, উভয় পক্ষে $\ln$ নিয়ে পাই $\ln y = y \ln x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \ln x.\frac{dy}{dx}$

$$\text{বা}\left(\frac{1}{y} - \ln x\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \text{ বা } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1-y\ln x)}.$$

(vii) $y = (x \ln x)^{\ln(\ln x)}$, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{dy}{dx} = (x\ln x)^{\ln(\ln x)}\frac{d}{dx}\{\ln(\ln x)\ln(x\ln x)\}$$

$$= (x\ln x)^{\ln(\ln x)}\frac{d}{dx}\{\ln(\ln x).\ln x + \ln(\ln x).\ln(\ln x)\}$$

$$= (x\ln x)^{\ln(\ln x)} \times\left[\frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{\ln x}{(\ln x).x} + 2\ln(\ln x).\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$= (x\ln x)^{\ln(\ln x)}\left[\frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{2\ln(\ln x)}{x\ln x}\right].$$

(viii) $x^y y^x = 1$ [NUH–2009]

উভয়পক্ষে $\ln$ নিয়ে পাই, $y \ln x + x \ln y = 0$

এখন, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া,

$$\frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} + \ln y + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow\left(\ln x + \frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = -\left(\ln y + \frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{y}(y\ln x + x)\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}(x\ln y + y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y(x\ln y + y)}{x(y\ln x + x)}.$$

(ix) $y = (x^2+1)^{\sqrt{1-x^2}} + (\sin^{-1}x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)^{\sqrt{1-x^2}}\frac{d}{dx}\{\sqrt{1-x^2}\ln(x^2+1)\} + \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^2$$

$$= (x^2+1)^{\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln(x^2+1)\right\}$$

$$+ 2(\sin^{-1}x).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(x) $y = \dfrac{e^{x^2}\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}$

উভয় পক্ষে $\ln$ নিয়ে পাই $\ln y = x^2 + \ln(\tan^{-1}x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{\tan^{-1}x}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[2x + \frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x} - \frac{x}{1+x^2}\right], \; y = \frac{e^{x^2}\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(xi) $y = \dfrac{1-x}{(1-x^3)^{1/2}}$, $\ln y = \ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1-x^3)$ [$\ln$ নিয়ে]

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot 3x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{3x^2}{2(1-x^3)} - \frac{1}{1-x}\right] = \frac{1-x}{(1-x^3)^{1/2}}\left[\frac{3x^2}{2(1-x^3)} - \frac{1}{1-x}\right].$$

(xii) $y = x^{x^{\cos x}}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই,

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^{\cos x}}\frac{d}{dx}(x^{\cos x}\ln x)$$

$$= x^{x^{\cos x}}\left\{x^{\cos x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x^{\cos x})\right\}$$

$$= x^{x^{\cos x}}\left\{\frac{1}{x}\cdot x^{\cos x} + \ln x\cdot x^{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x\cdot\ln x)\right\}$$

$$= x^{x^{\cos x}}\left\{\frac{x^{\cos x}}{x} + x^{\cos x}\ln x\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x\cdot\ln x\right)\right\}$$

(xiii) $y = \dfrac{7\sqrt{2x^3+1}\sin 5x}{(2x+3)(x-1)}$

উভয়পক্ষে $\ln$ নিয়ে পাই,

$$\ln y = \ln 7 + \frac{1}{2}\ln(2x^3+1) + \ln\sin 5x - \ln(2x+3) - \ln(x-1)$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2x^3+1} + 5\cot 5x - \frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{7\sqrt{2x^3+1}\sin 5x}{(2x+3)(x-1)}\left[\frac{3x^2}{2x^3+1} + 5\cot 5x - \frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x-1}\right]$$

(xiv) $y = x^{\ln x} + x^{\cos^{-1}x}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই,

$$\frac{dy}{dx} = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x\cdot\ln x) + x^{\cos^{-1}x}\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x\cdot\ln x)$$

$$= x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x} + x^{\cos^{-1}x}\left(\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

উদাহরণ-19. $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{ax}{y}\right)$ হতে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। **[DUH-1989]**

সমাধান ঃ $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{ax}{y}\right)$ বা $\dfrac{ax}{y} = \sin y$ বা $ax = y\sin y$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $a = \sin y\frac{dy}{dx} + y\cos y.\frac{dy}{dx}$

বা $(\sin y + y\cos y)\frac{dy}{dx} = a$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sin y + y\cos y}$.

উদাহরণ-20. $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(i) $\ln(x+y) = xy$ **[DUH-1991]**

(ii) $e^{xy} - 4xy = 1$ **[DUH-1985]**

(iii) $x^n + y^n = a^n$ **[DUH-1973]**

(iv) $x^2 + y^2 - 3a\,xy = 0$ **[DUH-1974]**

(v) $y = x\ln y$ **[CUH-1980]**

(vi) $\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)} = 1$ **[NUH(NM)-10, DUH-1962, 1973, 1986, RUH-1978]**

(vii) $x^2y + y^2x + \sqrt{xy} = 1$ **[DUH-1987]**

(viii) $\sin y = x\sin(a+y)$ **[NUH-09, 10, DUH-88, CUH-87]**

(ix) $y = \sin^n\left(\dfrac{ax}{y}\right)$ **[NUH-1994]**

(x) $y^n = \dfrac{x+y}{x-y}$ **[CUH-1968]**

সমাধান ঃ (i) $\ln(x+y) = xy$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{1}{x+y}\left(\frac{dy}{dx}+1\right) = x\frac{dy}{dx} + y$

বা $\left(\frac{1}{x+y} - x\right)\frac{dy}{dx} = y - \frac{1}{x+y}$ বা $(1 - x^2 - xy)\frac{dy}{dx} = xy + y^2 - 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 - 1}{1 - x^2 - xy}$.

(ii) $e^{xy} - 4xy = 1$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $e^{xy}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) - 4x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

বা $(xe^{xy} - 4x)\frac{dy}{dx} = 4y - ye^{xy}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4y - ye^{xy}}{xe^{xy} - 4x}$.

(iii) $x^n + y^n = a^n$, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$nx^{n-1} + ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = 0$ $\therefore \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$.

(iv) $x^2 + y^2 - 3a\,xy = 0$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 3ay - 3ax\frac{dy}{dx} = 0$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3ay - 2x}{2y - 3ax}$.

(v) $y = x\,ln\,y$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + ln\,y$

$\therefore \frac{dy}{dx}(y - x) = y\,ln\,y$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y\,ln\,y}{y - x}$.

(vi) $\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)} = 1$ বা $y + x = \sqrt{xy}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$\frac{dy}{dx} + 1 = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow (2\sqrt{xy} - x)\frac{dy}{dx} = y - 2\sqrt{xy}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy} - x}$.

(vii) $x^2y + y^2x + \sqrt{xy} = 1$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0$

বা $(2x^2\sqrt{xy} + 4xy\sqrt{xy} + x)\frac{dy}{dx} = -(4xy\sqrt{xy} + 2y^2\sqrt{xy} + y)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{4xy\sqrt{xy} + 2y^2\sqrt{xy} + y}{2x^2\sqrt{xy} + 4xy\sqrt{xy} + x}$.

(viii) $\sin y = x\sin(a + y)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$\cos y\frac{dy}{dx} = x\cos(a + y)\frac{dy}{dx} + \sin(a + y)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(a + y)}{\cos y - x\cos(a + y)}$.

(ix) $y = \cos^n\left(\frac{ax}{y}\right)$, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$\frac{dy}{dx} = -n\cos^{n-1}\left(\frac{ax}{y}\right).\left(\frac{ay - ax\frac{dy}{dx}}{y^2}\right).\sin\left(\frac{ax}{y}\right)$

$\Rightarrow \left\{y^2 - nax\cos^{n-1}\frac{ax}{y}\sin\frac{ax}{y}\right\}\frac{dy}{dx} = -ayn\cos^{n-1}\left(\frac{ax}{y}\right)\sin\left(\frac{ax}{y}\right)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{nay\cos^{n-1}\left(\frac{ax}{y}\right)\sin\left(\frac{ax}{y}\right)}{y^2 - nax\cos^{n-1}\frac{ax}{y}\sin\frac{ax}{y}}$.

(x) $y^n = \frac{x + y}{x - y}$ বা $x + y = xy^n - y^{n+1}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$1 + \frac{dy}{dx} = y^n - nxy^{n-1}\frac{dy}{dx} - (n + 1)y^n\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y^n - 1}{(n + 1)y^n + nxy^{n-1} + 1}$.

উদাহরণ–21. x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[DUH–1982]**

সমাধান ঃ ধরি $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$

বা $y = \tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}\right)}$ যেখানে $x = \cos\theta$ $\therefore \theta = \cos^{-1}x$

$= \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

উদাহরণ–22. x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[B.Sc(Pass)–2010, DUH–1986, RUH–1987]**

সমাধান ঃ ধরি $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

বা $y = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}-1}{\tan\theta}\right\}$ যেখানে $x = \tan\theta$

$\therefore \theta = \tan^{-1}x$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta - 1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$

উদাহরণ–23. x এর সাপেক্ষে $\sin^{-1}(2ax\sqrt{1-a^2x^2})$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[RUH–1980]**

সমাধান ঃ ধরি $y = \sin^{-1}(2ax\sqrt{1-a^2x^2})$

বা $y = \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)$ যেখানে $ax = \sin\theta$

$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$ $\therefore \theta = \sin^{-1}(ax)$

$= 2\theta = 2\sin^{-1}(ax)$

x এর সম্পর্কে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2x^2}}.a = \frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$.

উদাহরণ–24. x এর সাপেক্ষে $y = \sin^{-1}\left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[RUH–1982]**

সমাধান ঃ $y = \sin^{-1}\left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sin^{-1}\left(\frac{\sin\theta+\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{2}}\right)$ যেখানে $x = \sin\theta$

$\therefore \theta = \sin^{-1}x$

$= \sin^{-1}\left(\sin\theta\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\theta.\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = \frac{\pi}{4}+\theta = \frac{\pi}{4} + \sin^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

উদাহরণ–25. x এর সাপেক্ষে $y = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[BSc(Pass)–2008, RUH–1984, 1994]**

সমাধান ঃ $y = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right)$ ধরি $x = \cos\theta$

$= \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right) = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}}\right)$

$= \sin\left(2\tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(2.\frac{\theta}{2}\right) = \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

উদাহরণ–26. x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\left(\frac{x-\sqrt{a^2-x^2}}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\right)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $y = \tan^{-1}\left(\frac{x-\sqrt{a^2-x^2}}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{a\sin\theta - \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}{a\sin\theta+\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}\right)$ যেখানে $x = a\sin\theta$

$= \tan^{-1}\left(\frac{a\sin\theta - a\cos\theta}{a\sin\theta+a\cos\theta}\right)$ $\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{\tan\theta.\tan\frac{\pi}{4}+1}\right) = \tan^{-1}\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \theta-\frac{\pi}{4}$

$= \sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\pi}{4}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

উদাহরণ–27. x এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[DUH–1965]**

সমাধান ঃ ধরি $y = \cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

$= \cos^{-1}(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta})$ যেখানে $x = \sin\theta$

$= \cos^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \cos^{-1}(\sin 2\theta)$

$= \cos^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right) = \frac{\pi}{2}-2\theta = \frac{\pi}{2}-2\sin^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

উদাহরণ–28. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

(i) $y = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (ii) $y = \sin^{-1}(-2x\sqrt{1-x^2})$

[DUH–1964] **[DUH–1982]**

(iii) $y = \cos^{-1}(1-2x^2)$ (iv) $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ **[DUH–1986]**

(v) $y = \text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$

সমাধান ঃ (i) $y = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

বা $y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2\theta-1}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\cot\theta}\right)$ যেখানে $x = \text{cosec}\,\theta$

$= \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta = \text{cosce}^{-1}x$ $\therefore \theta = \text{cosec}^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(ii) $y = \sin^{-1}(-2x\sqrt{1-x^2})$

$= \sin^{-1}(-2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta})$ যেখানে $x = \sin\theta$

$= \sin^{-1}(-2\sin\theta\cos\theta)$ $\therefore \theta = \sin^{-1}x$

$= \sin^{-1}(-\sin 2\theta) = \sin^{-1}(\sin(\pi+2\theta)) = \pi + 2\theta$

$= \pi + 2\sin^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

(iii) $y = \cos^{-1}(1-2x^2)$

$= \cos^{-1}(1-2\sin^2\theta)$ যেখানে $x = \sin\theta$

$= \cos^{-1}(\cos 2\theta)$ $\therefore \theta = \sin^{-1}x$

$= 2\theta = 2\sin^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

(iv) $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$= \sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$ যেখানে $x = \tan\theta$

$\therefore \theta = \tan^{-1}x$

$= \sin^{-1}\left(\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\cos 2\theta)$

$= \sin^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right) = \frac{\pi}{2}-2\theta = \frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$.

(v) $y = \text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$

$= \text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta-1}\right)$ যেখানে $x = \cos\theta$

$\therefore \theta = \cos^{-1}x$

$= \text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right) = \text{cosec}^{-1}(\sec 2\theta) = \text{cosec}^{-1}\left\{\text{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$

$= \frac{\pi}{2}-2\theta = \frac{\pi}{2}-2\cos^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

উদাহরণ–29. $x = a(\theta+\sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ হইতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। **[DUH–1986, RUH–1989, CUH–1981, 1987]**

সমাধান ঃ $x = a(\theta+\sin\theta)$

$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta)$ এবং $y = a(1-\cos\theta)$ $\therefore \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$

এখন $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$.

উদাহরণ–30. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর ঃ $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ **[DUH–1989, DUH–1981]**

সমাধান ঃ $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ বা $y = \tan^{-1}\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)$

$= 2\tan^{-1}t \quad \therefore \frac{dy}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ এবং $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

বা $x = \sin^{-1}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) = 2\tan^{-1}t$

$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 1$ ।

উদাহরণ–31. $\sqrt{x}$ এর সাপেক্ষে e^x এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $y = \sqrt{x}$ এবং $z = e^x$, $\therefore \frac{dz}{dy}$ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন $y = \sqrt{x} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ এবং $z = e^x \quad \therefore \frac{dz}{dx} = e^x$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x}.\, e^x.$$

উদাহরণ–32(i). $\cos 3x$ সাপেক্ষে $e^{\sin^{-1}x}$ অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[NUH–94]**

সমাধান ঃ ধরি $y = \cos 3x$ এবং $z = e^{\sin^{-1}x}$

$\therefore \frac{dz}{dy}$ নির্ণয় করিতে হইবে। এখন $y = \cos 3x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -3\sin 3x$ এবং $z = e^{\sin^{-1}x} \quad \therefore \frac{dz}{dx} = e^{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = -\frac{e^{\sin^{-1}x}}{3\sin 3x.\sqrt{1-x^2}}.$$

(ii) $\cos 3x$ এর সাপেক্ষে $e^{a\sin^{-1}x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [Differentiate $e^{a\sin^{-1}x}$ w. r. to $\cos 3x$.] **[NUH–2010(Old)]**

সমাধান ঃ মনেকরি $y = e^{a\sin^{-1}x}$, $u = a\sin^{-1}x$ এবং $z = \cos 3x$

$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$ এবং $\frac{dz}{dx} = -3\sin 3x.$

$\therefore y = e^u \Rightarrow \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dz}$

$$\Rightarrow \frac{d}{d(\cos 3x)}(e^{a\sin^{-1}x}) = e^u \cdot \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{-1}{3\sin 3x}$$

$$= \frac{-ae^{a\sin^{-1}x}}{3\sqrt{1-x^2}\sin 3x}. \quad \textbf{(Ans)}$$

উদাহরণ–33. $\sin^{-1}x$ এর সাপেক্ষে $x^{\sin^{-1}x}$ এর অন্তরক নির্ণয় কর। **[RUH–88]**

সমাধান ঃ ধরি $y = \sin^{-1}x$ এবং $z = x^{\sin^{-1}x}$

$\therefore \frac{dz}{dy}$ নির্ণয় করিতে হইবে। এখন $y = \sin^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ এবং $z = x^{\sin^{-1}x}$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = x^{\sin^{-1}x}\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x.\, ln\ x) = x^{\sin^{-1}x}\left(\frac{ln\ x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = \sqrt{1-x^2}.\, x^{\sin^{-1}x}\left(\frac{ln\ x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1}x}{x}\right)$$

$$= s^{\sin^{-1}x}\left(ln\ x + \frac{\sqrt{1-x^2}.\,\sin^{-1}x}{x}\right).$$

উদাহরণ–34. $\sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[NUH–2010, DUH–2003, CUH–1988, KUET–1992]**

সমাধান ঃ ধরি $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$ এবং $z = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore$ প্রশ্নমতে $\frac{dz}{dy}$ নির্ণয় করিতে হইবে। এখানে $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$

$= \sec^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta - 1}\right)$ $\quad x = \cos\theta$, $\therefore \theta = \cos^{-1}x$

$= \sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right) = \sec^{-1}(\sec 2\theta) = 2\theta = 2\cos^{-1}x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

এবং $z = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\right)$, $\quad x = \sin\theta$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta = \sin^{-1}x \quad [\because \theta = \sin^{-1}x]$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \therefore \frac{dz}{dy} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{2}$

উদাহরণ–35. $\tan^{-1}x$ এর সাপেক্ষে (i) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ এবং **[NUH–1996, NUH(NM)–2004, BSc(Pass)–2007, RUH–1981, 1987, 1990, 1995, KUET–1992]**

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [NUH-2009]

সমাধান ঃ (i) ধরি $y = \tan^{-1}x$ এবং $z = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

$\therefore \frac{dz}{dy}$ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে $y = \tan^{-1}x$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

আবার $z = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}-1}{\tan\theta}$, $x = \tan\theta$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}x$ $[\because \theta = \tan^{-1}x]$

$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \frac{dz}{dy} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2(1+x^2)}\cdot\frac{1+x^2}{1} = \frac{1}{2}$.

(ii) ধরি $y = \tan^{-1}x$ এবং $z = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right)$

প্রশ্নমতে $\frac{dz}{dy}$ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে, $y = \tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ ..... (1)

আবার, $z = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}-1}{\sin\theta}\right)$, $x = \sin\theta$ ধরে

$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{-2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(-\tan\frac{\theta}{2}\right) = \tan^{-1}\left\{\tan\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\right\}$

$= \pi - \frac{\theta}{2} = \pi - \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ $[\because x = \sin\theta]$

$\therefore \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ ..... (2)

(1) ও (2) হইতে পাই, $\frac{dz}{dy} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1+x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$.

উদাহরণ-36. $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[NUH-2003, NUH(NM)-2002, 2006, BSc(Pass)-2006, DUH-1984, 1987, CUH-1989]**

সমাধান ঃ ধরি $y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ এবং $z = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

$\therefore \frac{dz}{dy}$ নির্ণয় করিতে হইবে।

$y = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$, $x = \tan\theta$

$= \sin^{-1}\left(\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$ এবং $z = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$, $x = \tan\theta$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\right)$

$= \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$ এখন $\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = 1$.

উদাহরণ-37. $\frac{\sin\sqrt{x}}{x^{3/2}}$ এর সাপেক্ষে $x^n \ln \tan^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[NUH-1997, CUH-1985]**

সমাধান ঃ ধরি $y = \frac{\sin\sqrt{x}}{x^{3/2}}$ এবং $z = x^n \ln \tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dz}{dy}$ নির্ণয় করিতে হইবে। $y = \frac{\sin\sqrt{x}}{x^{3/2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^{3/2}}\cdot\cos\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin\sqrt{x}\cdot\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right)$

$= \frac{\cos\sqrt{x}}{2x^2} - \frac{3\sin\sqrt{x}}{2x^{5/2}} = \frac{\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 3\sin\sqrt{x}}{2x^{5/2}}$

এবং $z = x^n \ln \tan^{-1}x$, $\therefore \frac{dz}{dx} = nx^{n-1} \ln \tan^{-1}x + x^n \cdot \frac{1}{\tan^{-1}x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

$$= \frac{nx^{n-1}(1+x^2)\tan^{-1}x \cdot \ln \tan^{-1}x + x^n}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{nx^{n-1}(1+x^2)\tan^{-1}x \cdot \ln \tan^{-1}x + x^n}{(1+x^2)\tan^{-1}x} \times \frac{2x^{5/2}}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 3\sin\sqrt{x}}$$

$$= 2.\frac{\{n(1+x^2)\tan^{-1}x \ln \tan^{-1}x + x\}x^{n+3/2}}{(1+x^2)\tan^{-1}x(\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 3\sin\sqrt{x})}.$$

উদাহরণ–38. $x^{\sin x}$ এর সাপেক্ষে $(\sin x)^x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[RUH–1991]**

সমাধান ঃ ধরি $y = x^{\sin x}$ এবং $z = (\sin x)^x$

এইক্ষেত্রে $\frac{dz}{dy}$ নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x \cdot \ln x) = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right)$$

এবং $\frac{dz}{dx} = (\sin x)^x \frac{d}{dx}(x \ln \sin x) = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \cot x)$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = \frac{(\sin x)^x(\ln \sin x + x\cot x)}{x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right)}.$$

উদাহরণ–39. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}$ এবং $\frac{1}{f'(x)} = 0$ হইলে x এর মান কত হইবে? **[RUH–1993]**

সমাধান ঃ $f(x) = \ln(\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}) - \ln(\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx})$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}\left(\frac{b}{2\sqrt{a+bx}} + \frac{b}{2\sqrt{a-bx}}\right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}\left(\frac{b}{2\sqrt{a+bx}} - \frac{b}{2\sqrt{a-bx}}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx})^2 + (\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx})^2}{2\sqrt{(a+bx)(a-bx)}(\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx})(\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx})}$$

$$= \frac{4a}{2\sqrt{(a^2 - b^2x^2)}(a+bx-a+bx)} = \frac{a}{bx\sqrt{a^2-b^2x^2}}$$

$$\therefore \frac{1}{f'(x)} = 0 \text{ হইলে } \frac{bx\sqrt{a^2-b^2x^2}}{a} = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ বা } x = \pm\frac{a}{b}.$$

উদাহরণ–40. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর, যেখানে $y = x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x \cdots \infty}}}$

সমাধান ঃ $y = x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x \cdots \infty}}} = x + \frac{1}{y} \Rightarrow y^2 = xy + 1$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $2y\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y - x}.$$

উদাহরণ–41. $\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n} = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$ হইলে দেখাও যে

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} - \cot\theta. \quad \textbf{[RUH–1988]}$$

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত শর্ত, $\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n} = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$

$\ln$ নিয়ে, $\ln\cos\frac{\theta}{2} + \ln\cos\frac{\theta}{2^2} + \ln\cos\frac{\theta}{2^3} + \cdots$

$$+ \ln\cos\frac{\theta}{2^n} = \ln\sin\theta - \ln 2^n - \ln\sin\frac{\theta}{2n}$$

θ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$-\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2^2}\frac{\sin\frac{\theta}{2^2}}{\cos\frac{\theta}{2^2}} - \frac{1}{2^3}\frac{\sin\frac{\theta}{2^3}}{\cos\frac{\theta}{2^3}} - \cdots - \frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\cos\frac{\theta}{2^n}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{2^n}\frac{\cos\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

বা $\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2} + \frac{1}{2^3}\tan\frac{\theta}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} - \cot\theta.$

3.B.10. সম্পর্কিত হার সমস্যা (Related rate problems) : **[NUH(NM)–2007]**

এখানে আমরা সময়ের সাপেক্ষে পরিবর্তন হয় এইরূপ কিছু রাশির সম্পর্কিত হার সমস্যা উদাহরণের মাধ্যমে আলোচনা করিব।

(i) বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য এবং উহার ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত হার সমস্যা ঃ

ধরি x দৈর্ঘ্য বাহু বিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল A

$\therefore A = x^2$

বা $\frac{dA}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$

এখানে $\frac{dA}{dt}$ = সময়ের সাপেক্ষে বর্গের ক্ষেত্রফলের পরিবর্তন হার।

এবং $\frac{dx}{dt}$ = সময়ের সাপেক্ষে বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন হার।

উদাহরণ–42. কোন এক নির্দিষ্ট সময়ে একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 3 ফুট লম্বা এবং 2 ফুট / মিনিট হারে বৃদ্ধি পায়। ঐ সময়ে ক্ষেত্রফল কি হারে বৃদ্ধি পাইবে? [At a certain instant the side of a square is 3 ft long and increasing at a rate of 2 ft/minute. How fast is the area increasing at that instant?] **[NUH(NM)–2007]**

সমাধান ঃ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য x ফুট এবং ক্ষেত্রফল A বর্গ ফুট হইলে আমরা জানি [Let x feet be the length of a square and A square feet be its area, then we set]

$$\frac{dA}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \cdots\cdots (1)$$

যখন $x = 3$ তখন $\frac{dx}{dt} = 2$ ফুট / মিনিট। [When $x = 3$ ft then $\frac{dx}{dt} = 2$ ft/minute]

(1) হইতে পাই, $\frac{dA}{dt} = 2.3.2$ (ফুট)^2 / মিনিট

$= 12$ বর্গ ফুট / মিনিট

সুতরাং যখন বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 2 ফুট / মিনিট হারে বৃদ্ধি পায় তখন উহার ক্ষেত্রফল 12 ফুট/মিনিট হারে বৃদ্ধি পায়। [So when the side of the square increases 2 ft/minute then its area increases 12 ft/minute.]

(ii) বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং উহার ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত হার সমস্যা ঃ

ধরি r একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল A বর্গ একক।

$\therefore A = \pi r^2$

বা $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$

উদাহরণ–43. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল সুষম হারে বৃদ্ধি পাইলে দেখাও যে, উহার পরিধির বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধের সহিত ব্যস্ত ভেদে অন্বিত হইবে। [If the area of a circle increases at a uniform rate, then show that the rate of increase of the circumference will vary inversely as the radius]. **[NUH–2007]**

সমাধান ঃ বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r হইলে পাই,

বৃত্তের পরিধি, $s = 2\pi r$ এবং ক্ষেত্রফল, $A = \pi r^2$

দেওয়া আছে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল সুষম হারে বৃদ্ধি পায়।

$\therefore \frac{dA}{dt} = k$ (ধ্রুবক) ..... (1)

এখন, $A = \pi r^2$

$\therefore \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \Rightarrow k = 2\pi r\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{k}{2\pi r}$

আবার, $s = 2\pi r$

$\therefore \frac{ds}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt} = 2\pi \cdot \frac{k}{2\pi r} = k \cdot \frac{1}{r}$

$\Rightarrow \frac{ds}{dt} \propto \frac{1}{r}$

সুতরাং পরিধির বৃদ্ধি হার ব্যাসার্ধের সহিত ব্যস্ত ভেদে অন্বিত হয়।

উদাহরণ–44. কোন নির্দিষ্ট সময়ে একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 25π (ফুট)^2 এবং উহা 20π (ফুট)^2 / মিনিট হারে বৃদ্ধি পায়। ঐ সময়ে উহার ব্যাসার্ধ কি হারে বৃদ্ধি পাইবে? [At a certain instant the area of a circle is 25π (ft)^2 and increasing at a rate of 20π(ft)^2/minute. How fast is the radius increasing at that instant?]

সমাধান ঃ r একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল A বর্গ একক হইলে আমরা জানি

$A = \pi r^2$

বা $r = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}$

$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\pi A}}\frac{dA}{dt}$ ..... (1)

যখন $A = 25\pi$ (ফুট)^2, তখন $\frac{dA}{dt} = 20\pi$ (ফুট)^2 / মিনিট

$\therefore$ (1) $\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{10\pi} \cdot 20\pi$ ফুট / মিনিট

$= 2$ ফুট / মিনিট।

(iii) ঘনকের ধারের দৈর্ঘ্য, আয়তন এবং উহার পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত হার সমস্যা ঃ

ধরি x একক ধার বিশিষ্ট ঘনকের আয়তন V ঘন একক এবং পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল A বর্গ একক। তাহা হইলে,

$V = x^3$ এবং $A = 6x^2$

$\therefore \frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$ এবং $\frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt}$.

উদাহরণ–45. কোন নির্দিষ্ট সময়ে একটি ঘনকের ধার 5 সে. মি. এবং আয়তন 2 (সে. মি)^3 / মি হারে বৃদ্ধি পায়। ঘনকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কি হারে বৃদ্ধি পাইবে? [At a certain instant the edge of a cube is 5 cm and the volume is increasing at a rate of 2(cm)^3/minute. At what rate is the area of surface increasing?]

সমাধান ঃ x সে. মি. ধার বিশিষ্ট ঘনকের আয়তন V (সে. মি)^3 / মি হইলে

আমরা জানি $\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$ ..... (1)

এখানে $x = 5$ সে. মি. হইলে $\frac{dV}{dt} = 2$ (সে. মি)^3 / মিঃ

$\therefore$ (1) $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3x^2} \cdot \frac{dV}{dt}$

$= \frac{1}{75} \cdot 2$ সে. মি / মি.

$= \frac{2}{75}$ সে. মি. / মি.

আবার ঘনকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল A (সে. মি)^2 হইলে পাই,

$$\frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt} \text{ ..... (2)}$$

যখন $x = 5$ সে. মি. তখন $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{75}$ সে. মি. / মি.

$\therefore$ (2) $\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 12.5 \cdot \frac{2}{75}$ (সে. মি.)^2 / মি.

$= \frac{8}{5}$ (সে. মি.)^2 / মি.

সুতরাং ঘনকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $\frac{8}{5}$ (সে. মি.)^2 / মি. হারে বৃদ্ধি পাইবে।

(iv) একটি গোলাকৃতি বেলুন বা পোলকের ব্যাসার্ধ, আয়তন ও পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত হার সমস্যা ঃ

ধরি r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলাকৃতি বেলুন বা গোলকের আয়তন V ঘন একক এবং পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল A বর্গ একক।

তাহা হইলে, $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ এবং $A = 4\pi r^2$

$\therefore \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

এবং $\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$

উদাহরণ–46. একটি গোলাকৃতি বেলুনের আয়তন প্রতি সেকেন্ডে 10 সিসি করিয়া বৃদ্ধি পায়। যে মুহূর্তে এর ব্যাসার্ধ 16 সেমিঃ, সেই মুহূর্তে এর বক্র পৃষ্ঠের পরিবর্তনের হার নির্ণয় কর। [The volume of a spherical balloon is increasing at the rate of 10cc/sec. Find the rate of change of its surface at the instant when its radius is 16 cm.] **[NUH–2008]**

সমাধান ঃ মনে করি t সময়ে একটি গোলাকৃতি বেলুনের ব্যাসার্ধ r, আয়তন V এবং বক্রপৃষ্টের ক্ষেত্রফল A. [Let at time t the radius is r, volume is V and area of the lateral surface of spherical ballon is A]

$\therefore V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ..... (1) এবং $A = 4\pi r^2$ ..... (2)

দেওয়া আছে, $\frac{dV}{dt} = 10$ ..... (3)

এখন $r = 16$ সে. মি হইলে $\frac{dA}{dt}$ নির্ণয় করিতে হইবে। [Now it is require to determine $\frac{dA}{dt}$ when $r = 16$ cm.]

(1) $\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$\Rightarrow 10 = 4\pi (16)^2 \frac{dr}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{5}{512\pi}$

(2) $\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$

$= 8\pi \cdot 16 \cdot \frac{5}{512\pi}$

$= \frac{5}{4} = 1.25$

সুতরাং বক্রপৃষ্ঠের নির্ণেয় পরিবর্তন হার = 1.25 (সেমিঃ)^2/সেঃ। [So the rate of change of surface is 1.25 cm^2/sec]

উদাহরণ–47. একটি গোলাকৃতি বেলুনের আয়তন 1000 সিসি/সেঃ হারে হ্রাস পায়। যে মুহূর্তে এর ব্যাসার্ধ 10 সে. মি., সে মুহূর্তে এর বক্র পৃষ্ঠের পরিবর্তন হার নির্ণয় কর। [The volume of a spherical balloon is decreasing at the rate of 1000 cc/sec. Find the rate of change of its surface at the instant when its radius is 10 cm.]

সমাধান ঃ মনে করি t সময়ে একটি গোলাকৃতি বেলুনের ব্যাসার্ধ r, আয়তন V এবং বক্রপৃষ্ঠ A.

$\therefore V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ..... (1) এবং $A = 4\pi r^2$ ..... (2)

এখানে $\frac{dV}{dt} = 1000$ এবং $r = 10$

(1) $\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$\Rightarrow 1000 = 4\pi \cdot 100 \cdot \frac{dr}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{5}{2\pi}$

(2) $\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} = 8\pi \cdot 10 \cdot \frac{5}{2\pi} = 200$

সুতরাং বক্রপৃষ্ঠের নির্ণেয় পরিবর্তন হার = 200 বর্গ সেমি/সেঃ।

উদাহরণ-48. গোলাকার একটি বেলুনের আয়তন প্রতি সেকেন্ডে 12 cm^3 হারে বাড়িতেছে। যে মুহূর্তে বেলুনটির ব্যাসার্ধ 6 cm সে মুহূর্তে ইহার পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কি হারে বাড়িতেছে তাহা নির্ণয় কর। [The volume of a spherical balloon is increasing at the rate of 12 cm^3/sec. Find the rate of change of its surface at the instant when its radius is 6 cm.] **[NUH(NM)-2008]**

সমাধান ঃ মনে করি t সময়ে একটি গোলাকৃতি বেলুনের ব্যাসার্ধ r, আয়তন V এবং বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল A. [Let at time t, r be the radius, V be the volume and A be the surface of the spherical ballon.]

$\therefore V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ..... (1) এবং $A = 4\pi r^2$ ..... (2)

দেওয়া আছে, $\frac{dV}{dt} = 12$ ..... (3)

এখন r = 6 cm হইলে $\frac{dA}{dt}$ নির্ণয় করিতে হইবে। [Now it is require to determine $\frac{dA}{dt}$ when r = 6 cm.]

$(1) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$\Rightarrow 12 = 4\pi \cdot 36 \cdot \frac{dr}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{12\pi}$

$(2) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$

$= 8\pi \cdot 6 \cdot \frac{1}{12\pi}$

$= 4$

সুতরাং বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 4 cm^2/sec হারে বাড়িতেছে। [So the area of the surface increases at the rate 4 cm^2/sec.]

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

3.B.1. ধ্রুবকের অন্তরজ কত? (What is the derivative of constant?)

Ans : ধ্রুবকের অন্তরজ শূন্য অর্থাৎ $\frac{d}{dx}(c) = 0$

3.B.2. $\frac{d}{dx}(a^x)$ ও $\frac{d}{dx}(x^a)$ কত? (What is $\frac{d}{dx}(a^x)$ and $\frac{d}{dx}(x^a)$?)

Ans : $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ এবং $\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$.

3.B.3. $\frac{d}{dx}(\ln x)$ ও $\frac{d}{dx}(\log_a x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ এবং $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

3.B.4. $\frac{d}{dx}(\sin x)$ ও $\frac{d}{dx}(\sinh x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ এবং $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$.

3.B.5. $\frac{d}{dx}(\cos x)$ ও $\frac{d}{dx}(\cosh x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ এবং $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

3.B.6. $\frac{d}{dx}(\tan x)$ ও $\frac{d}{dx}(\tanh x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ এবং $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \text{sech}^2 x$

3.B.7. $\frac{d}{dx}(\cot x)$ ও $\frac{d}{dx}(\coth x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$ এবং $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\text{cosech}^2 x$

3.B.8. $\frac{d}{dx}(\sec x)$ ও $\frac{d}{dx}(\text{sech} x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ এবং $\frac{d}{dx}(\text{sech} x) = -\text{sech} x \tanh x$

3.B.9. $\frac{d}{dx}(\text{cosec} x)$ ও $\frac{d}{dx}(\text{cosech} x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\text{cosec} x) = -\text{cosec} x \cot x$

এবং $\frac{d}{dx}(\text{cosech} x) = -\text{cosech} x \coth x$

3.B.10. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)$ ও $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ এবং $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

3.B.11. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x)$ ও $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ এবং $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3.B.12. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$ ও $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ এবং $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

3.B.13. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x)$ ও $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$ এবং $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = -\frac{1}{x^2-1}$

3.B.14. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x)$ ও $\frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1} x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ এবং $\frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

3.B.15. $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x)$ ও $\frac{d}{dx}(\text{cosech}^{-1} x)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ এবং $\frac{d}{dx}(\text{cosceh}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$

3.B.16. $\frac{d}{dx}(uv)$ ও $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$ কত?

Ans : $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$

এবং $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

3.B.17. $y = f(u)$ এবং $u = g(x)$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ কত?

Ans : $y = f(u)$ এবং $u = g(x)$ হইলে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

ইহাকে অন্তরক সহগের চেইন রুল বলে।

EXERCISE–3(B)

x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

1. $\sin x^3$
2. $\tan^3 x$
3. $ln\ (\tan x)$
4. $ln\ (ln\ x)$
5. $\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$
6. $ln\ \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$
7. $ln\ (e^{ax}\cos bx)$
8. $ln\ \{(2-x)^{1/2}(x^2-1)^{1/4}\}$
9. $ln\ \frac{\sqrt{(x+1)}-1}{\sqrt{(x+1)}+1}$
10. $\sin^m x \cos^n x$ **[DUH–1980]**
11. $\frac{\tan x}{1+e^x}$ **[CUH–1983]**
12. $\frac{(x^2+1)^3}{(x^3-1)^2}, x\neq 1$ **[DUH–1988]**
13. $\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}$ **[CUH–1993]**
14. $x^2 \sin x$ **[CUH–1983]**

15. $\sin^2(ln\ x^2)$ **[DUH–1977]**
16. 7^{x^2+2x}
17. $10^{ln\ \sin x}$ **[DUH–1963]**
18. $ln\ (\sec x + \tan x)$ **[DUH–1985]**
19. $e^{\sqrt{\cot x}}$
20. $3^{\sqrt{1+x+x^2}}$
21. $(ln\ \sin x)^2$
22. $(\sin^{-1}x)^3$
23. $ln\ (\tan^{-1}x)$
24. $\tan^{-1}\frac{x}{a}$ **[RUH–1982]**
25. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\tan\frac{x}{2}\right)$ **[DUH–1981, 1986]**
26. $e^{\sin^{-1}x^2}$ **[RUH–1961]**
27. $e^{(\sin^{-1}x)^2}$ **[DUH–1980, 1986]**
28. $\tan(\sin^{-1}x)$ **[CUH–1980]**
29. $ln\ (\tan^{-1} ax)$ **[RUH–1980]**
30. $\sin x^\circ$
31. $\log_x a$
32. $\log_x(a+x)$
33(i) $\log_{\sin x} x$
(ii) $y = \log_{\cos x}(\tan^2 x)$ **[NUH–2008, NUH(NM)–2008]**
34. $2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{x-a}{b-x}\right)}$
35. $\sec(\tan^{-1}x)$

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর ঃ

36. $y = ln\ \sec(ax+b)^3$ **[RUH–1967]**
37. $y = ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3/2}\right\}$
38. $y = (a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{1/2}$ **[DUH–1973]**
39. $y = ln\ [x+\sqrt{x^2+a^2}]$ **[RUH–1971]**
40. $y = \sqrt{\{x^2+\sqrt{(x^2-1)}\}}$ **[DUH–1987]**
41. $y = \cos(ln\ x) + ln\ (\tan x)$ **[CUH–1981]**
42. $y = \{ln\ (x^3+1)\}^2$ **[CUH–1982]**
43. $y = \cos(x^2+5x+6)$ **[CUH–1982]**
44. $y = \sin^{-1}x^2 - xe^{x^2}$ **[DUH–1979]**
45. $y = ln\ (1+\sin 2x) + 2\ ln\ \sec\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$
46. $y = \tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}$ **[DUH–1993]**
47. $y = \tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$ **[DUH–1993]**

48. (i) $y = x^x$ **[NUH–2010]** (ii) $y = x^{x^{x^x}}$ **[NUH–2004]**

49. $y = x^{\cos ax}$

50. $y = (\sin x)^{\cos x}$ **[RUH–1985]** 51. $y = x^{\sin x}$ **[CUH–1982]**

52. $y = (\tan^{-1}x)^{\cos x + \sin x}$ **[RUH–1984, 1987]**

53. $y = x^{\cos^{-1}x}$ **[NUH–2008, CUH–84, RUH–80]**

54. $y = (x^2 + 2)^{2-x}$ **[DUH–1979]**

55. $y = \left(\frac{3+x}{5+x}\right)^{8+2x}$ **[DUH–1982]**

56. $y = x^{2\sin x}$ **[RUH–1978]**

57(i). $x^y = y^x$ **[NUH(NM)–2002, BSc(Pass)–2006, 2008, RUH–1984]**

(ii). $x^y + xy = 2$ **[NUH–2008]**

58. $y = (1 + x^2)^{\tan x} + (2 - \sin x)^{\ln x}$ **[DUH–1983, 1993]**

59. $y = (x^2 + 1)^{\tan^{-1}x} \ln(1 + \sin^2 x)$ **[DUH–1980]**

60. $y = x^{\cos^{-1}x} + (\sin x)^{\ln x}$ **[NUH–10(Old), NUH(NM)–05, DUH–84]**

61. $y = (x^2 - 1)^{3/2}(x^2 - 4)^{1/2}$ **[DUH–1987]**

62. $y = x^3\sqrt{\left(\frac{x^2+4}{x^2+3}\right)}$ **[RUH–1967]**

63. $y = \frac{x\cos 2x}{e^{3x}\sqrt{1+x^2}}$ **[NUH–2003, RUH–1993]**

64. $x^y + y^x = a$ **[RUH–1984]**

65(i). $y = x^{\tan^{-1}x} + (\sin x)^{\ln x}$ **[DUH–1992]**

(ii) $y = x^{\cot^{-1}x} + (\cos^{-1}x)^{\tan x}$ **[NUH(NM)–2008]**

(iii) $y = x^{\sin^{-1}x} + (\cos x)^{\ln x}$ **[NUH(NM)–2007]**

66. $ax^2 + 2h\,xy + by^2 = 1$

67. $3x^4 - x^2y + 2y^3 = 0$

68. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ **[DUH–1973]**

69(i) $\ln(xy) = x^2 + y^2$ **[DUH–1981, 1986]**

(ii) $x^2 + y^2 = \sin(xy)$ **[NUH–2003]**

70. $y = \cos^{-1}\left(\frac{ax}{y}\right)$

71. $\sin y = x(2 + y)$ **[DUH–1984, 1988]**

72. $y = \sin(x + y)^2$ **[DUH–1966]**

73. $y = \cos\left\{2\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$ 74. $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right)$

75. $y = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ 76. $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$

77. $y = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$ 78. $y = \tan^{-1}\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

79. $y = \tan^{-1}\left(\frac{a+bx}{b-ax}\right)$ **[DUH–1984]** 80. $y = \sin^{-1}\sqrt{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)}$

81. (i) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$

(ii) $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $x = \frac{3at}{1+t^3}$ **[NUH(NM)–2004]**

82. $x = \frac{a\cos t}{t}$, $y = \frac{a\sin t}{t}$

83. $x = 2a\sin^2 t\cos 2t$, $y = 2a\sin^2 t\sin 2t$.

84. x^2 এর সাপেক্ষে x^5 এর অন্তররক সহগ নির্ণয় কর।

85. $\tan x$ এর সাপেক্ষে $\sec x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

86. x^2 এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

87. $\cos x$ এর সাপেক্ষে $\sin x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[NUH–2004]**

88. $\cos 2x^2$ এর সাপেক্ষে $\ln(2 + x)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[CUH–1984]**

89. যদি $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{n} + x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n} + x\right) \cdots \sin\left(\frac{n-1}{n}\pi + x\right) = \frac{\sin nx}{2^{n-1}}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\cot x + \cot\left(\frac{n}{\pi} + x\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{n} + x\right) \cdots + \cot\left(\frac{n-1}{n}\pi + x\right) = n\cot nx.$$

90. যদি $\Delta(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin x \\ \cos x & -\sin x & \cos x \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix}$ হয়, তবে প্রমাণ কর $\Delta'(x) = 1$

ANSWER–3(B)

1. $3x^2\cos x^3$ 2. $3\tan^2 x\sec^2 x$ 3. $2\,\mathrm{cosec}\,2x$

4. $\frac{1}{x\ln x}$ 5. $\frac{1}{\sqrt{\{(1+x)(1-x)^3}}$ 6. $\sec x$

7. $a - b\tan bx$ 8. $\frac{x}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2(2-x)}$ 9. $\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$

10. $\sin^{m-1}x \cos^{n-1}x\,(m\cos^2x - n\sin^2x)$

11. $\dfrac{(1+e^x)\sec^2x - e^x\tan x}{(1+e^x)^2}$

12. $-\dfrac{6x(x+1)(x^2+1)^2}{(x^3-1)^3}$

13. $\dfrac{4x\sqrt{x}+1}{6\sqrt{x}\,(x^2+\sqrt{x})^{2/3}}$

14. $x^2\cos x + 2x\sin x$

15. $\dfrac{2}{x}\sin 2(\ln x^2)$

16. $2(x+1)\ln 7.7^{x^2+2x}$

17. $10^{\ln\sin x}\ln 10.\cot x$

18. $\sec x$

19. $-\dfrac{e^{\sqrt{\cot x}}}{2\sin^2x\sqrt{\cot x}}$

20. $\dfrac{(1+2x)\ln 3}{2\sqrt{1+x+x^2}}\cdot 3^{\sqrt{1+x+x^2}}$

21. $2\cot x.\ln\sin x$

22. $\dfrac{3(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$

23. $\dfrac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$

24. $\dfrac{a}{a^2+x^2}$

25. $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}$

26. $\dfrac{2x\,e^{\sin^{-1}x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$

27. $\dfrac{2\sin^{-1}x.\,e^{(\sin^{-1}x)^2}}{\sqrt{(1-x^2)}}$

28. $\dfrac{\sec^2(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$

29. $\dfrac{a}{(1+a^2x^2)\tan^{-1}ax}$

30. $\dfrac{\pi}{180}\cos x^\circ$

31. $-\dfrac{\ln a}{x(\ln x)^2}$

32. $\dfrac{x\ln x - (a+x)\ln(a+x)}{x(a+x)(\ln x)^2}$

33(i). $\dfrac{\ln\sin x - x\cot x.\ln x}{x(\ln\sin x)^2}$

(ii) $2\cdot\dfrac{\cot x\{\tan^2x\ln\tan x + \sec^2x\ln\cos x\}}{\{\ln\cos x\}^2}$

34. $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

35. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

36. $3a(ax+b)^2\tan(ax+b)^3$

37. $\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

38. $\dfrac{(b^2-a^2)\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2x + b^2\sin^2x}}$

39. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

40. $\dfrac{x(1+2\sqrt{x^2-1})}{2\sqrt{(x^2-1)}\sqrt{\{x^2+\sqrt{x^2-1}\}}}$

41. $-\dfrac{1}{x}\sin(\ln x) + \dfrac{\sec^2x}{\tan x}$

42. $\dfrac{6x^2\ln(x^3+1)}{x^3+1}$

43. $-(2x+5)\sin(x^2+5x+6)$

44. $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}} - e^{x^2}(1+2x^2)$

45. 0

46. $\dfrac{1}{2}$

47. $\dfrac{2}{\sqrt{x}\,(1+4x)}$

48(i). $x^x(\ln x + 1)$ (ii) $x^{x^x}\cdot x^{x+x}\cdot\dfrac{1}{x}[1 + x^x\ln x\{1 + x\ln x + x(\ln x)^2\}]$

49. $x^{\cos ax}\left\{\dfrac{\cos ax - ax.\sin ax.\ln x}{x}\right\}$

50. $(\sin x)^{\cos x}[\cos^2x.\operatorname{cosec} x - \sin x\ln\sin x]$

51. $x^{\sin x}\left[\dfrac{\sin x}{x} + \cos x.\ln x\right]$

52. $(\tan^{-1}x)^{\cos x+\sin x}\left[\dfrac{\cos x+\sin x}{(1+x^2)\tan^{-1}x} + (\cos x - \sin x)\ln\tan^{-1}x\right]$

53. $x^{\cos^{-1}x}\left[\dfrac{\cos^{-1}x}{x} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

54. $(x^2+2)^{2-x}.\left[\dfrac{2x(2-x)}{x^2+2} - \ln(x^2+2)\right]$

55. $2\left(\dfrac{3+x}{5+x}\right)^{8+2x}\left[\dfrac{2(4+x)}{(3+x)(5+x)} + \ln\dfrac{3+x}{5+x}\right]$

56. $2x^{2\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x\ln x\right)$

57(i). $\dfrac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$ (ii) $-\dfrac{yx^{y-1}+y}{x^y\ln x + x}$

58. $(1+x^2)^{\tan x}\left\{\dfrac{2x\tan x}{1+x^2} + \sec^2x.\ln(1+x^2)\right\}$
$+ (2-\sin x)^{\ln x}\left\{\dfrac{\ln(2-\sin x)}{x} - \dfrac{\cos x.\ln x}{2-\sin x}\right\}$

59. $y\left[\dfrac{2x\tan^{-1}x}{1+x^2} + \dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \dfrac{\sin 2x}{(1+\sin^2x)\ln(1+\sin^2x)}\right]$

60. $x^{\cos^{-1}x}\left[\dfrac{\cos^{-1}x}{x} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right] + (\sin x)^{\ln x}\left[\ln x\cot x + \dfrac{\ln(\sin x)}{x}\right]$

61. $\dfrac{x(4x^2-13)(x^2-1)^{1/2}}{(x^2-4)^{1/2}}$

62. $x^3\sqrt{\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+3}\right)}\left[\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{(x^2+4)(x^2+3)}\right]$

63. $y\left[\frac{1}{x} - 2\tan 2x - 3 - \frac{x}{1+x^2}\right]$

64. $-\frac{yx^{y-1} + y^x \ln y}{x^y \ln x + xy^{x-1}}$

65(i). $x^{\tan^{-1}x}\left[\frac{\tan^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right] + (\sin x)^{\ln x}\left[\ln x.\ \cot x + \frac{\ln \sin x}{x}\right]$

(ii) $x^{\cot^{-1}}\left(\frac{\cot^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{1+x^2}\right) + (\cos^{-1}x)^{\tan x}\left(\sec^2 x \ln \cos^{-1}x - \frac{\tan x}{\cos^{-1}x \cdot \sqrt{1-x^2}}\right)$

(iii) $x^{\sin^{-1}x}\left(\frac{\sin^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + (\cos x)^{\ln x}\left(\frac{\ln \cos x}{x} - \tan x \ln x\right)$

66. $-\frac{ax+hy}{hx+by}$ 67. $\frac{2xy - 12x^3}{6y^2 - x^2}$ 68. $-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$

69(i) $\frac{\frac{1}{x} - 2x}{2y - \frac{1}{y}}$ (ii) $\frac{y\cos(xy) - 2x}{2y - x\cos(xy)}$

70. $\frac{a}{\cos y - y \sin y}$ 71. $\frac{2+y}{\cos y - x}$

72. $\frac{2(x+y)\cos(x+y)^2}{1 - 2(x+y)\cos(x+y)^2}$ 73. -1

74. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ 75. $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ 76. $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

77. $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ 78. $\frac{3}{1+x^2}$ 79. $\frac{1}{1+x^2}$

80. $\frac{1}{1+x^2}$ 81(i). $\frac{t^2-1}{2t}$ 81(ii). $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$

82. $\frac{\sin t - t\cos t}{\cos t + t \sin t}$ 83. $\tan 3t$ 84. $\frac{5}{2}x^3$

85. $\sin x$ 86. $\frac{1}{2x(1+x^2)}$ 87. $-\cot x$

88. $-\frac{\operatorname{cosec} 2x^2}{4x(2+x)}$.

—×—

Chapter–4(A)
পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ
SUCCESSIVE DIFFERENTIATION

4.A.1. পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ এবং ইহার প্রতীক সমূহ (Successive differentiation and its notations) :

প্রথম ক্রমের অন্তরক সহগ ঃ যদি $y = f(x)$ একটি অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন হয় তবে ইহার অন্তরক সহগ ও একটি x এর সম্পর্ক হইবে এবং ইহাকে নিম্নলিখিত যে কোন একটি প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

$\frac{dy}{dx}$, y_1, y', $y^{(1)}$, Dy, $\frac{df(x)}{dx}$, $f'(x)$, $f^{(1)}(x)$, $f'_x(x)$, $f^{(1)}_x(x)$, $Df(x)$, $D_x f(x)$ ইহাদের প্রত্যেকটিকে প্রথম ক্রমের অন্তরক সহগ বলে।

দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরক সহগ ঃ যদি $\frac{dy}{dx}$ একটি অন্তরীকরণ যোগ্য ফাংশন হয় তবে ইহার অন্তরক সহগও একটি x এর ফাংশন এবং ইহাকে নিম্নলিখিত যে কোন একটি প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় ঃ $\frac{d^2y}{dx^2}$, y_2, y'', $y^{(2)}$, D^2y, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f''_x(x)$, $f^{(2)}_x(x)$, $D^2f(x)$, $D^2_x f(x)$. ইহাদের প্রত্যেকটিকে দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরক সহগ বলে।

তৃতীয়, চতুর্থ, ... , n তম ক্রমের অন্তরক সহগ ঃ উপরের মত $y = f(x)$ সম্পর্কের তৃতীয় ক্রমের অন্তরক সহগকে সাধারণত $\frac{d^3y}{dx^3}$ বা y_3 বা $f'''(x)$ বা D^3y দ্বারা, চতুর্থ ক্রমের অন্তরক সহগকে $\frac{d^4y}{dx^4}$ বা y_4 বা $f^{iv}(x)$ বা D^4y দ্বারা ... , n তম ক্রমের অন্তরক সহগকে $\frac{d^ny}{dx^n}$ বা y_n বা $f^n(x)$ বা $f^{(n)}(x)$ বা D^ny দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উপপাদ্য–1. যদি $y = x^n$ হয় যেখানে $n \in \mathbb{N}$, তবে দেখাও যে $y_n = n!$.

প্রমাণ ঃ $y = x^n \Rightarrow y_1 = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} = n(n-1)x^{n-2} \Rightarrow y_3 = \frac{dy_2}{dx} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

... ...

$$y_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1\, x^{n-n}$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1 = n!.$$

উপপাদ্য–2. যদি $y = x^m$ এবং $m \in \mathbb{N}$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $y_n = 0$ যখন $n > m$ (ii) $y_n = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$ যখন $n \le m$

প্রমাণ ঃ (i) যেহেতু $y = x^m$, সুতরাং $y_m = m!$ [উপপাদ্য –1]

সুতরাং $y_n = 0$ যখন $n > m$.

(ii) $y = x^m \Rightarrow y_1 = mx^{m-1}$

$y_2 = m(m-1)x^{m-2} \Rightarrow y_3 = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$

... ...

$y_n = m(m-1)(m-2)\cdots\{m-(n-1)\}x^{m-n}$ যখন $m \geq n$

$= m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$

$= \dfrac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)!}{(m-n)!}x^{m-n}$

$= \dfrac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)\cdots 3.2.1}{(m-n)!}x^{m-n}$

$= \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$ যখন $m \geq n$.

উপপাদ্য–3. যদি $y = (ax+b)^n$ এবং $n \in \mathbb{N}$ হয় তবে দেখাও যে $y_n = n!\,a^n$.

প্রমাণ ঃ $y = (ax+b)^n \Rightarrow y_1 = n(ax+b)^{n-1}.a$

$y_2 = n(n-1)(ax+b)^{n-2}a^2 \Rightarrow y_3 = n(n-1)(n-2)(ax+b)^{n-3}a^3$

... ...

$y_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1(ax+b)^{n-n}a^n$

$= n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1.\,a^n = n!\,a^n$.

উপপাদ্য–4. $y = a^{bx+c}$ হইলে দেখাও $y_n = a^{bx+c}(ln\ a)^n b^n$.

প্রমাণ ঃ $y = a^{bx+c} \Rightarrow y_1 = a^{bx+c}\ ln\ a.b$

$y_2 = a^{bx+c}(ln\ a)^2 b^2 \Rightarrow y_3 = e^{bx+c}(ln\ a)^3 b^3$

... ...

$y_n = a^{bx+c}(ln\ a)^n b^n$.

উপপাদ্য–5. যদি $y = ln\,(ax+b)$ হয় তবে দেখাও যে

$$y_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(ax+b)^{-n}a^n$$

প্রমাণ ঃ $y = ln\,(ax+b) \Rightarrow y_1 = (ax+b)^{-1}a$

$y_2 = (-1)(ax+b)^{-2}a^2 \Rightarrow y_3 = (-1)(-2)(ax+b)^{-3}a^3$

... ...

$y_n = (-1)(-2)\cdots(-n+1)(ax+b)^{-n}a^n$

$= (-1)^{n-1}(n-1)!\,(ax+b)^{-n}a^n$.

উপপাদ্য–6. যদি $y = \sin(ax+b)$ হয় তবে দেখাও যে

$$y_n = a^n \sin\left(n\frac{\pi}{2} + ax + b\right). \qquad \textbf{[CUH–1983]}$$

প্রমাণ ঃ $y = \sin(ax+b)$

$$y_1 = a\cos(ax+b) = a\sin\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$y_2 = a^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right) = a^2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$= a^2\sin\left(2\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$y_3 = a^3\cos\left(2\frac{\pi}{2} + ax + b\right) = a^3\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$= a^3\sin\left(3\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

... ...

$$y_n = a^n\sin\left(n\frac{\pi}{2} + ax + b\right).$$

উপপাদ্য–7. যদি $y = \cos(ax+b)$ হয়, তবে দেখাও যে

$$y_n = a^n\cos\left(n\frac{\pi}{2} + ax + b\right). \qquad \textbf{[DUH–1982]}$$

প্রমাণ ঃ $y = \cos(ax+b) \Rightarrow y_1 = -a\sin(ax+b) = a\cos\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$

$$y_2 = -a^2\sin\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right) = a^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$= a^2\cos\left(2\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$y_3 = -a^3\sin\left(2\frac{\pi}{2} + ax + b\right) = a^3\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$= a^3\cos\left(3\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

... ...

$$y_n = a^n\cos\left(n\frac{\pi}{2} + ax + b\right).$$

উপপাদ্য–8. যদি $y = e^{ax}\sin(bx+c)$ হয় তবে দেখাও যে

$$y_n = (a^2+b^2)^{n/2}e^{ax}\sin\left(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right).$$

প্রমাণ ঃ $y = e^{ax}\sin(bx+c)$

$y_1 = ae^{ax}\sin(bx+c) + be^{ax}\cos(bx+c)$

$= e^{ax}\{a\sin(bx+c) + b\cos(bx+c)\}$ ..... (1)

ধরি $a = r\cos\theta$ এবং $b = r\sin\theta$

তাহা হইলে $a^2 + b^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$

$\Rightarrow r = (a^2 + b^2)^{1/2}$ এবং $\frac{b}{a} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

সুতরাং (1) $\Rightarrow y_1 = re^{ax}\{\cos\theta\sin(bx + c) + \sin\theta\cos(bx + c)\}$

$= re^{ax}\sin(bx + c + \theta)$

একইভাবে অগ্রসর হইয়া আমরা পাই

$y_2 = r^2e^{ax}\sin(bx + c + 2\theta)$

একইভাবে n পদক্ষেপের পর পাই $y_n = r^ne^{ax}\sin(bx + c + n\theta)$

$= (a^2 + b^2)^{n/2}e^{ax}\sin\left(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$.

উপপাদ্য–9. যদি $y = e^{ax}\cos(bx + c)$ হয় তবে দেখাও যে

$$y_n = (a^2 + b^2)^{n/2}e^{ax}\cos\left(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right).$$

প্রমাণ ঃ $y = e^{ax}\cos(bx + c)$

$y_1 = ae^{ax}\cos(bx + c) - be^{ax}\sin(bx + c)$

$= e^{ax}\{a\cos(bx + c) - b\sin(bx + c)\}$ ..... (1)

ধরি $a = r\cos\theta$ এবং $b = r\sin\theta$

তাহা হইলে $a^2 + b^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \Rightarrow r = (a^2 + b^2)^{1/2}$

এবং $\frac{b}{a} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

সুতরাং (1) $\Rightarrow y_1 = re^{ax}\{\cos\theta\cos(bx + c) - \sin\theta\sin(bx + c)\}$

$= re^{ax}\cos(bx + c + \theta)$

একইভাবে অগ্রসর হইয়া পাই $y_2 = r^2e^{ax}\cos(bx + c + 2\theta)$

একইভাবে n পদক্ষেপের পর পাই $y_n = r^ne^{ax}\cos(bx + c + n\theta)$

$= (a^2 + b^2)^{n/2}e^{ax}\cos\left(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$.

উদাহরণ–2. যদি $y = x^{2n}$ হয় তবে দেখাও যে

$y_n = 2^n\{1.3.5 \cdots (2n - 1)\}x^n$ যেখানে $n \in \mathbb{N}$. **[NUH–04, RUH–87]**

সমাধান ঃ $y = x^{2n} \Rightarrow y_1 = 2n\,x^{2n-1}$

$y_2 = 2n(2n - 1)x^{2n-2} \Rightarrow y_3 = 2n(2n - 1)(2n - 2)x^{2n-3}$

... ...

$y_n = 2n(2n - 1)(2n - 2) \cdots (2n - n + 1)x^{2n-n}$

$= 2n(2n - 1)(2n - 2) \cdots (n + 1)x^n = \frac{(2n)!}{n!}x^n$

কিন্তু $(2n)! = 2n(2n - 1)(2n - 2) \cdots n$

$= \{2n.(2n - 2) \cdots 6.4.2\}\{(2n - 1)(2n - 3) \cdots 5.3.1\}$

$= 2^n\{n.(n - 1) \cdots 3.2.1\}\{(2n - 1)(2n - 3) \cdots 5.3.1\}$

$= 2^n\,n!\{1.3.5 \cdots (2n - 1)\} \Rightarrow \frac{(2n)!}{n!} = 2^n\{1.3.5 \cdots (2n - 1)\}$

সুতরাং $y_n = 2^n\{1.3.5 \cdots (2n - 1)\}x^n$.

উদাহরণ–2. যদি $y = \sin nx + \cos nx$ হয় তবে দেখাও যে

$y_r = n^r[1 + (-1)^r\sin 2nx]^{1/2}$ **[NUH(NM)–2005, DUH–1972, CUH–1970, RUH–1990, RUS–1984]**

সমাধান ঃ $y = \sin nx + \cos nx$

$y_1 = n\cos nx - n\sin nx$

$= n\sin\left(\frac{\pi}{2} + nx\right) + n\cos\left(\frac{\pi}{2} + nx\right)$

একইভাবে $y_2 = n^2\sin\left(2\frac{\pi}{2} + nx\right) + n^2\cos\left(2\frac{\pi}{2} + nx\right)$

এবং r তম পদক্ষেপের পর পাই [After r-th step we set]

$y_r = n^r\sin\left(\frac{r\pi}{2} + nx\right) + n^r\cos\left(\frac{r\pi}{2} + nx\right)$

$= n^r\left[\left\{\sin\left(\frac{rx}{2} + nx\right) + \cos\left(\frac{r\pi}{2} + nx\right)\right\}^2\right]^{1/2}$

$= n^r\left[\sin^2\left(\frac{r\pi}{2} + nx\right) + \cos^2\left(\frac{r\pi}{2} + nx\right)\right.$

$\left. + 2\sin\left(\frac{r\pi}{2} + nx\right)\cos\left(\frac{r\pi}{2} + nx\right)\right]^{1/2}$

$= n^r\left[1 + \sin 2\left(\frac{r\pi}{2} + nx\right)\right]^{1/2}$ [$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$]

$= n^r[1 + \sin(r\pi + 2nx)]^{1/2} = n^r[1 + (-1)^r\sin 2nx]^{1/2}$.

4.A.2. $\cos^px$ অথবা $\sin^qx$ অথবা $\sin^px\cos^qx$ তম আকারের সম্পর্কের n তম অন্তরক সহগ যেখানে p, q $\in \mathbb{N}$ (The n-th Differential coefficient of the Function of the form $\cos^px$ or $\sin^qx$ or $\sin^px\cos^qx$ যেখানে p, q $\in \mathbb{N}$) ঃ ধরি $z = \cos x + i\sin x$

তাহা হইলে $z^{-1} = \cos x - i \sin x$. এখন আমরা পাই

$$z + z^{-1} = 2\cos x,\ z - z^{-1} = 2i \sin x$$

$$z^r + z^{-r} = \cos rx + i \sin rx + \cos rx - i \sin rx = 2 \cos rx \ldots\ldots (1)$$

এবং $z^r - z^{-r} = \cos rx + i \sin rx - \cos rx + i \sin rx = 2i \sin rx \ldots\ldots (2)$

(i) ধরি $y = \cos^p x$. তাহা হইলে $2^p y = (2 \cos x)^p$

$= (z + z^{-1})^p = (z^p + z^{-p}) + {}^pC_1[z^{p-2} + z^{-(p-2)}] + {}^pC_2\,[z^{p-4} + z^{-(p-4)}] + \ldots$

এর বিস্তার হইতে (1) ব্যবহার করিয়া প্রাপ্ত y এর সম্পর্ক হইতে সহজেই y_n নির্ণয় করা যায়।

(ii) ধরি $y = \sin^q x$. তাহা হইলে $(2i)^q y = (2i \sin x)^q = (z - z^{-1})^q = (z^q - z^{-q}) - {}^qC_1[z^{q-2} - z^{-(q-2)}] + {}^qC_2[z^{q-4} - z^{-(q-4)}] - \ldots$

এর বিস্তার হইতে (2) ব্যবহার করিয়া প্রাপ্ত y হইতে y_n সহজেই নির্ণয় করা যায়।

(iii) ধরি $y = \sin^p x \cos^q x$. তাহা হইলে $(2i)^p\, 2^p y = (2i \sin x)^p\, (2 \cos x)^q$

$= (z - z^{-1})^p\, (z + z^{-1})^q$ এর বিস্তার হইতে (1) এবং (2) ব্যবহার করিয়া প্রাপ্ত y হইতে y_n সহজেই নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ–3. $y = \sin^3 x$ হইলে y_n বাহির কর। **[DUH–1954]**

সমাধান ঃ $y = \sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$

$$y_1 = \frac{1}{4}[3 \cos x - 3 \cos 3x] = \frac{1}{4}\left[3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)\right]$$

$$y_2 = \frac{1}{4}\left[3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3 \sin\left(2\frac{\pi}{2} + x\right) - 3^2 \sin\left(2\frac{\pi}{2} + 3x\right)\right]$$

একইভাবে অগ্রসর হইয়া আমরা পাই [Proceding in the same way]

$$y_n = \frac{1}{4}\left[3 \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right) - 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)\right].$$

উদাহরণ–4. যদি $y = \cos^5 x$ হয় তবে y_n নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $z = \cos x + i \sin x$. তাহা হইলে

$$z^{-1} = \cos x - i \sin x \text{ এবং } z + z^{-1} = 2 \cos x$$

আবার $z^r = \cos rx + i \sin rx$

$$z^{-r} = \cos rx - i \sin rx \text{ এবং } z^r + z^{-r} = 2 \cos rx.$$

এখন আমরা পাই $2^5 y = (2 \cos x)^5 = (z + z^{-1})^5$

$$= (z^5 + z^{-5}) + {}^5C_1(z^3 + z^{-3}) + {}^5C_2(z + z^{-1})$$

$$= (z^5 + z^{-5}) + 5(z^3 + z^{-3}) + 10(z + z^{-1})$$

$$= 2 \cos 5x + 10 \cos 3x + 20 \cos x$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)$$

$$\therefore y_n = \frac{1}{16}\left[5^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 5x\right) + 5.3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right) + 10 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right]$$

উদাহরণ–5. যদি $y = \sin^4 x \cos^3 x$ হয় তবে y_n নির্ণয় কর।

[DUH–1975, CUH–1989]

সমাধান ঃ ধরি $z = \cos x + i \sin x$, তাহা হইলে $z^{-1} = \cos x - i \sin x$

সুতরা $z + z^{-1} = 2 \cos x$ এবং $z - z^{-1} = 2i \sin x$

আবার $z^r = \cos rx + i \sin rx \Rightarrow z^{-r} = \cos rx - i \sin rx$

$r + z^{-r} = 2 \cos rx$ এবং $r - z^{-r} = 2i \sin rx$

এখন আমরা পাই $(2i)^4\, 2^3 y = (2i \sin x)^4\, (2 \cos x)^3$

$$\Rightarrow 128y = (z - z^{-1})^4\, (z + z^{-1})^3 = \{(z - z^{-1})\,(z + z^{-1})\}^3\, (z - z^{-1})$$

$$= (z^2 - z^{-2})^3\, (z - z^{-1}) = \{(z^6 - z^{-6}) - 3z^2z^{-2}(z^2 - z^{-2})\}\, (z - z^{-1})$$

$$= \{(z^6 - z^{-6}) - 3(z^2 - z^{-2})\}\, (z - z^{-1})$$

$$= (z^7 + z^{-7}) - (z^5 + z^{-5}) - 3(z^3 + z^{-3}) + 3(z + z^{-1})$$

$$= 2 \cos 7x - 2 \cos 5x - 6 \cos 3x + 6 \cos x$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{64}(\cos 7x - \cos 5x - 3 \cos 3x + 3 \cos x)$$

$$\text{সুতরাং } y_n = \frac{1}{64}\left[7^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 7x\right) - 5^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 5x\right) - 3^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right) + 3 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right].$$

4.A.3. মূলদীয় বীজগণিতীয় ফাংশনের n তম অন্তরক সহগ (The n-th Differential Coefficient of a Rational Algebraic Function) ঃ

ধরি $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ..... (1) একটি মূলদীয় বীজগণিতীয় সম্পর্ক। (1) আকারের ফাংশনের n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় করিতে হলে প্রথমে $\frac{f(x)}{g(x)}$ কে আদর্শ আকারের আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া n সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করিলে y_n নির্ণয় করা যায়।

g(x) এর রৈখিক উৎপাদক সমূহ দুই শ্রেণীর হইতে পারে

(i) g(x) এর উৎপাদক সমূহ যখন সবগুলি বাস্তব রৈখিক উৎপাদক।

(ii) g(x) এর উৎপাদক সমূহের যখন কিছু সংখ্যক বা সবগুলো কাল্পনিক বা অবাস্তব রৈখিক উৎপাদক।

(i) g(x) এর উৎপাদক সমূহ যখন সবগুলো বাস্তব রৈখিক উৎপাদক ঃ

g(x) এর রৈখিক উৎপাদক সমূহ যখন সবগুলো বাস্তব তখন (1) এর আদর্শ আংশিক ভগ্নাংশকে n সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করিয়া পূর্বে আলোচিত উপপাদ্য সমূহের সাহায্যে অথবা তাদের মত অগ্রসর হইয়া আমরা y_n নির্ণয় করতে পারি।

উদাহরণ–6. যদি $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ হয় তবে y_n নির্ণয় কর। **[CUH–1978]**

সমাধান ঃ $y = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{2}[(x + 1)^{-1} + (x - 1)^{-1}]$

$$y_1 = \frac{1}{2}[(-1)(x + 1)^{-2} + (-1)(x - 1)^{-2}]$$

$$y_2 = \frac{1}{2}[(-1)(-2)(x + 1)^{-3} + (-1)(-2)(x - 1)^{-3}]$$

একইভাবে অগ্রসর হইয়া পাই [Proceding in the same way]

$$y_n = \frac{1}{2}[(-1)(-2)\cdots(-n)(x + 1)^{-n-1} + (-1)(-2)\cdots(-n)(x - 1)^{-n-1}]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2}[(x + 1)^{-n-1} + (x - 1)^{-n-1}].$$

উদাহরণ–7. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ হয় তবে y_n নির্ণয় কর। **[DUH–1974]**

সমাধান ঃ $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x - 2)(x - 1)}$

$$\Rightarrow y = (x - 2)^{-1} - (x - 1)^{-1}$$

$$y_1 = (-1)(x - 2)^{-2} - (-1)(x - 1)^{-2}$$

$$y_2 = (-1)(-2)(x - 2)^{-3} - (-1)(-2)(x - 1)^{-3}$$

একইভাবে অগ্রসর হইয়া আমরা পাই [Proceding in the same way we get]

$$y_n = (-1)(-2)\cdots(-n)(x - 2)^{-n-1} - (-1)(-2)\cdots(-n)(x - 1)^{-n-1}$$

$$= (-1)^n n![(x - 2)^{-n-1} - (x - 1)^{-n-1}].$$

(ii) g(x) এর উৎপাদক সমূহের যখন কিছু সংখ্যক বা সবগুলি কাল্পনিক বা অবাস্তব রৈখিক উৎপাদক ঃ g(x) এর রৈখিক উৎপাদক সমূহের কিছু বা সবগুলি কাল্পনিক আকারের হয় তখন (1) এর আদর্শ আংশিক ভগ্নাংশকে n সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করিয়া পূর্বে আলোচিত উপপাদ্য সমূহের সাহায্যে অথবা তাহাদের মত অগ্রসর হইয়া y_n নির্ণয় করিতে হয়। তারপর y_n এর কাল্পনিক উৎপাদক সমূহে $r(\cos\theta + i\cos\theta)$ বা $re^{i\theta}$ আকারে পরিণত করিয়া ডিময়ভরের উপপাদ্য প্রয়োগ করিতে হয়। নিম্নের উদাহরণ-এর মাধ্যমে ইহা দেখানো হইল।

উপপাদ্য–10. যদি $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$ হয় তবে y_n নির্ণয় কর।

[DUH–1969, CUH–1986, RUH–1969]

প্রমাণ ঃ $y = \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{(x + ai)(x - ai)} = \frac{1}{2ai}\left[\frac{1}{x - ai} - \frac{1}{x + ai}\right]$

$$= \frac{1}{2ai}[(x - ai)^{-1} - (x + ai)^{-1}]$$

$$y_1 = \frac{1}{2ai}[(-1)(x - ai)^{-2} - (-1)(x + ai)^{-2}]$$

$$y_2 = \frac{1}{2ai}[(-1)(-2)(x - ai)^{-3} - (-1)(-2)(x + ai)^{-3}]$$

$$y_3 = \frac{1}{2ai}[(-1)(-2)(-3)(x - ai)^{-4} - (-1)(-2)(-3)(x + ai)^{-4}]$$

... ...

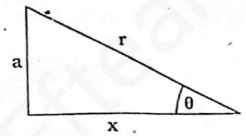
$$y_n = \frac{1}{2ai}[(-1)(-2)\cdots(-n)(x - ai)^{-n-1} - (-1)(-2)\cdots(-n)(x + ai)^{-n-1}]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2ai}[(x - ai)^{-n-1} - (x + ai)^{-n-1}] \cdots (1)$$

ধরি $x + ai = re^{i\theta}$. তাহা হইলে $x - ai = re^{-i\theta}$

এখন $x + ai = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow x = r\cos\theta$, $a = r\sin\theta \Rightarrow r = \frac{a}{\sin\theta}$



$\theta = \cot^{-1}\frac{x}{a}$

তাহা হইলে (1) $\Rightarrow y_n = \frac{(-1)^n n!}{2ai}[(re^{-i\theta})^{-n-1} - (re^{i\theta})^{-n-1}]$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2ai\, r^{n+1}}[e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2ai\, r^{n+1}} 2i\sin(n + 1)\theta = \frac{(-1)^n n!}{a\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^{n+1}}\sin(n + 1)\theta$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{a^{n+2}}\sin^{n+1}\theta\sin(n + 1)\theta \text{ যেখানে } \theta = \cot^{-1}\frac{x}{a}.$$

উদাহরণ–8. যদি $y = \tan^{-1}\frac{x}{a}$ হয় তবে y_n নির্ণয় কর। **[RUH–1969, 1982]**

সমাধান ঃ $y = \tan^{-1}\frac{x}{a}$

$$y_1 = \frac{1}{a}\frac{1}{1 + (x/a)^2} = \frac{a}{x^2 + a^2} = \frac{a}{(x + ai)(x - ai)}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x - ai} - \frac{1}{x + ai}\right] = \frac{1}{2i}[(x - ai)^{-1} - (x + ai)^{-1}]$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}[(-1)(x - ai)^{-2} - (-1)(x + ai)^{-2}]$$

$$y_3 = \frac{1}{2i}[(-1)(-2)(x-ai)^{-3} - (-1)(-2)(x+ai)^{-3}]$$

... ...

$$y_n = \frac{1}{2i}[(-1)(-2)\cdots(-n+1)(x-ai)^{-n} - (-1)(-2)\cdots(-n+1)(x+ai)^{-n}]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}[(x-ai)^{-n} - (x+ai)^{-n}] \cdots\cdots (1)$$

ধরি $x + ai = re^{i\theta}$. তাহা হইলে $x - ai = re^{-i\theta}$

এখন $x + ai = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow x = r\cos\theta$

$$a = r\sin\theta \Rightarrow r = \frac{a}{\sin\theta} \text{ এবং } \theta = \cot^{-1}\cot\theta$$

$$= \cot^{-1}\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} = \cot^{-1}\frac{x}{a}.$$

তাহা হইলে (1) $\Rightarrow y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}[(re^{-i\theta})^{-n} - (re^{i\theta})^{-n}]$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2ir^n}[e^{in\theta} - e^{-in\theta}]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i\,r^n}\,2i\sin n\theta = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^n}\sin n\theta$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{a^n}\sin^n\theta\sin n\theta \text{ যেখানে } \theta = \cot^{-1}\frac{x}{a}.$$

উদাহরণ–9. $x = (A + Bt)e^{-nt}$ হয় তবে দেখাও যে

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + n^2x = 0. \qquad \textbf{[DUH–1962]}$$

সমাধান ঃ $x = (A + Bt)e^{-nt}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[(A+Bt)e^{-nt}]$$

$$= Be^{-nt} - n(A+Bt)e^{-nt} = Be^{-nt} - nx \cdots\cdots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(Be^{-nt} - nx) = -Bne^{-nt} - n\frac{dx}{dt}$$

$$= -n\left(\frac{dx}{dt} + nx\right) - n\frac{dx}{dt} \quad [(1) \text{ এর সাহায্যে}]$$

$$= -2n\frac{dx}{dt} - n^2x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + n^2x = 0.$$

উদাহরণ–10. যদি $y = \sin(\sin x)$ হয় তবে দেখাও যে

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0. \qquad \textbf{[DUH–1954]}$$

সমাধান ঃ $y = \sin(\sin x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(\sin x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(\sin x)\cos x \cdots\cdots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx} = \frac{d}{dx}[\cos(\sin x)\cos x]$$

$$= -\sin(\sin x)\cos^2 x - \cos(\sin x)\sin x$$

$$= -y\cos^2 x - \frac{dy}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$

$$= -y\cos^2 x - \tan x\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \tan x\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0.$$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

4.A.1. $y = x^n$ এর x এর সাপেক্ষে n তম অন্তরজ কত? (What is the n-th derivative of $y = x^n$ with respect to x?) **[NUH–2010, NUH(NM)–2010]**

Ans : $y = x^n$ এর n তম অন্তরজ $y_n = n!$

4.A.2. $y = x^m$ এর x এর সাপেক্ষে $n(n > m)$ তম অন্তরজ কত? (What is the n-th derivative of $y = x^m$ $(n > m)$ with respect to x?)

Ans : $n > m$ হইলে $y = x^m$ এর n তম অন্তরজ $y_n = 0$

4.A.3. $y = x^m$ এর x এর সাপেক্ষে $n(n < m)$ তম অন্তরজ কত? (What is the nth derivative of $y = x^m$ $(n < m)$ with respect to x?)

Ans : $n < m$ হইলে $y = x^m$ এর n তম অন্তরজ,

$$y_n = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$$

4.A.4. $y = \ln x$ এর n তম অন্তরজ কত? (What is the nth derivative of $y = \ln x$?)

Ans : $y = \ln x$ এর n তম অন্তরজ, $y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

4.A.5. $y = \sin(ax + b)$ হইলে y_n কত? (If $y = \sin(ax + b)$, then what is y_n?)

Ans : $y = \sin(ax + b)$ হইলে $y_n = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

4.A.6. $y = \cos(ax + b)$ হইলে y_n কত?

Ans : $y = \cos(ax + b)$ হইলে $y_n = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

4.A.7. $y = e^{ax} \sin(bx + c)$ হইলে y_n কত?

Ans : $y = e^{ax} \sin(bx + c)$ হইলে

$$y_n = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{ax} \sin\left(bx + c + n \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)$$

4.A.8. $y = e^{ax} \cos(bx + c)$ হইলে y_n কত?

Ans : $y = e^{ax} \cos(bx + c)$ হইলে

$$y_n = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{ax} \cos\left(bx + c + n \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)$$

4.A.9. $y = \frac{1}{ax + b}$ হইলে y_n কত?

Ans : $y = \frac{1}{ax + b}$ হইলে $y_n = \frac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax + b)^{n+1}}$.

4.A.10. $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$ হইলে y_n কত?

Ans : $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$ হইলে $y_n = \frac{(-1)^n\, n!}{a^{n+2}} \sin^{n+1}\theta \sin(n + 1)\theta$

যেখানে $\theta = \cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

4.A.11. $y = \frac{x}{x^2 + a^2}$ হইলে y_n কত?

Ans : $y_n = \frac{(-1)^n\, n!}{a^{n+1}} \sin^{n+1}\theta \cos(n + 1)\,\theta$ যেখানে $\theta = \cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

4.A.12. $y = e^{ax}$ ও $y = a^x$ হইলে y_n কত?

Ans : $y = e^{ax}$ হইলে $y_n = e^{ax} \cdot a^n$ এবং $y = a^x$ হইলে $y_n = a^x \cdot (\ln a)^n$.

EXERCISE–4(A)

1. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর প্রত্যেকটির y_n নির্ণয় কর।

(i) $y = (5x + 7)^n$ উত্তর : $[y_n = 5^n\, n!]$

(ii) $y = (ax + b)^{2n}$ উত্তর : $\left[y_n = a^n \frac{(2n)!}{n!} (ax + b)^n\right]$

(iii) $y = (ax + b)^m$ $(m \in \mathbb{N}, m < n)$ উত্তর $[y_n = 0]$

(iv) $y = \ln(ax + b)$ উত্তর : $\left[y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n - 1)!a^n}{(ax + b)^n}\right]$

(v) $y = (5x + 8)^{-1}$ উত্তর $\left[y_n = \frac{(-1)^n\, 5^n\, n!}{(5x + 8)^{n+1}}\right]$

(vi) $y = (3x - 4)^{-m}$ $(m \in \mathbb{N})$

উত্তর : $\left[y_n = (-1)^n \frac{(m + n - 1)!}{(m - 1)!} (3x - 4)^{-m-n} 3^n\right]$

(vii) $y = (-ax + b)^{-1}$ উত্তর : $\left[y_n = \frac{a^n\, n!}{(-ax + b)^{n+1}}\right]$

(viii) $y = 2\cos^2 x$ উত্তর : $\left[y_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)\right]$

(ix) $y = 4\cos^3 x$

উত্তর : $\left[y_n = 3\cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) + 3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)\right]$

(x) $y = 4\sin^3 x$

উত্তর : $\left[y_n = 3\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) - 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)\right]$

(xi) $y = 8\cos^4 x$

উত্তর : $\left[y_n = 4^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 4x\right) + 2^{n+2} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)\right]$

(xii) $y = e^{2x} \sin x$ উত্তর : $\left[y_n = 5^{n/2} e^{2x} \sin\left(x + n \tan^{-1} \frac{1}{2}\right)\right]$

(xiii) $y = 8\sin^2 x \cos^2 x$ উত্তর : $\left[y_n = -4^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 4x\right)\right]$

(xiv) $y = e^{3x} \cos(4x + 5)$

উত্তর : $\left[y_n = 5^n e^{3x} \cos\left(4x + 5 + n \tan^{-1} \frac{4}{3}\right)\right]$

(xv) $y = e^x \sin^2 x$ উত্তর : $\left[y_n = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} 5^{n/2} e^x \cos(2x + n \tan^{-1} 2)\right]$

(xvi) $y = e^{3x} \cos^2 x$

উত্তর : $\left[y_n = \frac{3^n}{2} e^{3x} + \frac{13^{n/2}}{2} e^{3x} \cos\left(2x + n \tan^{-1} \frac{2}{3}\right)\right]$

(xvii) $y = \sin^4 x$

উত্তর : $\left[y_n = \frac{1}{8}\left\{4^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 4x\right) - 4.2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)\right\}\right]$

(xviii) $y = 16\cos^2 x$

উত্তর ঃ $\left[y_n = 5^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 5x\right) + 5.3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right) + 10\cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right]$

(xix) $y = \sin^3 x$ উত্তর ঃ $\left[y_n = \frac{1}{16}\left\{5^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 5x\right) - 5.3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right) + 10\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right\}\right]$

(xx) $y = \sin^6 x$ উত্তর ঃ $y_n = \frac{1}{2^5}\left[-6^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 6x\right) + 6.4^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 4x\right) - 15.2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)\right]$

(xxi) $y = \cos x \cos 2x$

উত্তর ঃ $\left[y_n = \frac{1}{2}\left\{3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right\}\right]$

(xxii) $y = 4 \sin x \sin 2x \sin 3x$

উত্তর ঃ $\left[y_n = 4^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 4x\right) + 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right) - 6^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 6x\right)\right]$

(xxiii) $y = 2e^x \sin x \sin 2x$ উত্তর ঃ $[y_n = e^x\left\{2^{n/2} \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) - 10^{n/2} \cos(3x + n \tan^{-1}3)\right\}]$

2. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর প্রত্যেকটির y_n নির্ণয় কর।

(i) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ উত্তর ঃ $\left[y_n = \frac{(-1)^n n!}{4}\{(x-2)^{-n-1} - (x+2)^{-n-1}\}\right]$

(ii) $y = \frac{2x}{x^2 - a^2}$ উত্তর ঃ $[y_n = (-1)^n n!\{(x-a)^{-n-1} + (x+a)^{-n-1}\}]$

(iii) $y = \frac{1}{x^2 + 9}$

উত্তর ঃ $\left[y_n = \frac{(-1)^n n! \sin^{n+1}\theta \sin(n+1)\theta}{3^{n+2}}$ যেখানে $\theta = \cot^{-1}\frac{x}{3}\right]$

(iv) $y = \frac{x}{x^2 + a^2}$ উত্তর ঃ $\left[y_n = \frac{(-1)^n n! \sin^{n+1}\theta \cos(n+1)\theta}{a^{n+1}}$ যেখানে $\theta = \cot^{-1}\frac{x}{a}\right]$

(v) $y = \frac{1}{(x+a)^2 + b^2}$ উত্তর ঃ $\left[y_n = \frac{(-1)^n n! \sin^{n+1}\theta \sin(n+1)\theta}{b^{n+2}}$ যেখানে $\theta = \cot^{-1}\frac{a+x}{b}\right]$

(vi) $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ উত্তর ঃ $\left[y_n = \frac{(-1)^n 2^{n+2} n! \sin^{n+1}\theta \sin(n+1)\theta}{(\sqrt{3})^{n+2}}$ যেখানে $\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2x+1}\right]$

(vii) $y = \sin^{-1}\frac{2x}{1 + x^2}$

উত্তর ঃ $[y_n = 2(-1)^{n-1}(n-1)! \sin^n\theta \sin n\theta$ যেখানে $\cot\theta = x]$

(viii) $y = \frac{a^2 - b^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$

উত্তর ঃ $\left[y_n = (-1)^n n!\left\{\frac{\sin^{n+1}\theta \sin(n+1)\theta}{b^{n+2}} - \frac{\sin^{n+1}\phi \sin(n+1)\phi}{a^{n+2}}\right\}$ যেখানে $x = b\cot\theta = a\cot\phi\right]$

(ix) $y = \frac{(a-b)x^2}{(x-a)(x-b)}$

উত্তর ঃ $[y_n = (-1)^n n!\{a^2(x-a)^{-n-1} - b^2(x-b)^{-n-1}\}]$

(x) $y = \cot^{-1}\frac{x}{a}$

উত্তর ঃ $\left[y_n = \frac{(-1)(n-1)! \sin^n\theta \sin n\theta}{a^n}$ যেখানে $\theta = \cot^{-1}\frac{x}{a}\right]$

(xi) $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$

উত্তর ঃ $\left[y_n = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n-1)! \sin^n\theta \sin n\theta$ যেখানে $\cot\theta = x\right]$

(xii) $y = \frac{x^4}{(x-1)(x-2)}$

উত্তর ঃ $[y_n = (-1)^n n!\{16(x-2)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1}$ যেখানে $n > 2]$

3. যদি $y = ln(\sin x)$ হয় তবে দেখাও যে $y_3 = 2\cot x \operatorname{cosec}^2 x$
4. যদি $x^3 + y^3 = 3axy$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 = \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3}$
5. যদি $y = e^{-x}\cos x$ হয় তবে দেখাও যে $y_4 + 4y = 0$
6. যদি $y = e^{-x}\sin x$ হয় তবে দেখাও যে $y_4 + 4y = 0$
7. যদি $y = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ হয় তবে দেখাও যে

   $$y_n = (-1)^n n!\left[\frac{1/2}{(x-1)^{n+1}} - \frac{-4}{(x-2)^{n+1}} + \frac{9/2}{(x-3)^{n+1}}\right]$$
8. যদি $y = e^{3x}\sin 4x$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 - 6y_1 + 25y = 0$
9. যদি $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 = m^2y$.
10. যদি $y = e^{ax}\sin bx$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$
11. যদি $y = e^{4x}\cos 3x$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 - 8y_1 + 25y = 0$
12. যদি $y = e^{ax}\cos bx$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$.
13. যদি $y = \sin(\cos x)$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 - y_1\cot x + y\sin^2 x = 0$
14. যদি $y = \sinh(\sinh x)$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 - y_1\tanh x - y\cosh^2 x = 0$
15. যদি $y = \cos(\cos x)$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 - y_1\cot x + y\sin^2 x = 0$
16. যদি $y = \cosh(\sinh x)$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 - y_1\tanh x - y\cosh^2 x = 0$
17. যদি $y = \cos(\sin x)$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 + y_1\tan x + y\cos^2 x = 0$
18. যদি $y = \sinh(\cosh x)$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 - y_1\coth x - y\sinh^2 x = 0$
19. যদি $y = ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ হয় তবে দেখাও যে $(a^2 + x^2)y_2 + xy_1 = 0$
20. যদি $y = a\cos(ln\ x) + b\sin(ln\ x)$ হয় তবে দেখাও যে $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$
21. যদি $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ হয় তবে দেখাও যে $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$
22. দেখাও যে $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{ln\ x}{x}\right) = \frac{2}{x^3}\left(ln\ x - 1 - \frac{1}{2}\right)$
23. যদি $ln\ y = \tan^{-1}x$ হয় তবে দেখাও যে $(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0$
24. যদি $y = e^{\cot^{-1}x}$ হয় তবে দেখাও যে $(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0$
25. যদি $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m$ হয় তবে দেখাও যে $(1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$
26. যদি $y = (\sin^{-1}x)^2$ হয় তবে দেখাও যে $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$
27. যদি $y = (x^2 - 1)^n$ হয় তবে দেখাও যে $(x^2 - 1)y_2 - 2(1 - n)xy_1 - 2ny = 0$
28. যদি $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ হয় তবে দেখাও যে $(x^2 - 1)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$
29. যদি $y = xe^{-x}\cos x$ হয় তবে দেখাও যে

    $x^2y_2 + 2x(x - 1)y_1 + 2(x^2 - x + 1)y = 0$
30. যদি $y = e^{ax}\cos bx$ হয় তবে দেখাও যে $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y =$

31. দেখাও যে $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{x^3}[(2 - x^2)\sin x - 2x\cos x)]$
32. দেখাও যে $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\cos x}{x}\right) = \frac{1}{x^3}[(2 - x^2)\cos x + 2x\sin x]$
33. যদি $y = Ax\sin x$ হয় তবে দেখাও যে $x^2y_2 - 2xy_1 + (x^2 + 2)y = 0$.
34. যদি $y = \sin ln(x^2 + 2x + 1)$ হয় তবে দেখাও যে

    $(1 + x)^2y_2 + (1 + x)y_1 + 4y = 0$
35. যদি $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হয় তবে দেখাও যে $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$
36. যদি $y = \tan^{-1}x$ হয় তবে দেখাও যে $y_3 = 2\cos(\pi + 3y)\cos^3 y$
37. যদি $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ হয় তবে দেখাও যে

    $(1 - x^2)y_3 - 3xy_2 + (m^2 - 1)y_1 = 0$
38. যদি $y = x^2\ ln\ x$ হয় তবে দেখাও যে $xy_3 = 2$
39. যদি $ln\ y = \tan^{-1}x$ হয় তবে দেখাও যে $(1 + x^2)y_3 + (4x - 1)y_2 + 2y_1 = 0$
40. যদি $y = x^{28}$ হয় তবে দেখাও যে $y_{14} = 1.3.5\cdots 27(2x)^{14}$
41. যদি $y = e^{3x}\sin(7 - 4x)$ হয় তবে দেখাও যে

    $$y_n = 5^n e^{3x}\sin\left(7 - 4x - n\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$$
42. যদি $y = e^{ax}\cos bx + p_{n-1}(x)$ হয় তবে y_n নির্ণয় কর যেখানে $p_{n-1}(x)$ একটি $n - 1$ ক্রমের বহুপদী।

    উত্তর ঃ $\left[y_n = (a^2 + b^2)^{n/2}e^{ax}\cos\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\right]$
43. যদি $y = e^{ax}\sin bx + p_n(x)$ হয় তবে y_n নির্ণয় কর যেখানে $p_n(x)$ একটি n ক্রমের মনিক বহুপদী। [মনিক বহুপদী বলতে চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ = 1]

    উত্তর ঃ $\left[y_n = (a^2 + b^2)^{n/2}e^{ax}\sin\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + n!\right]$
44. যদি $y = e^{ax}\cos bx + p_n(x)$ হয় তবে y_n নির্ণয় কর যেখানে $p_n(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r$

    উত্তর ঃ $\left[y_n = (a^2 + b^2)^{n/2}e^{ax}\cos\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + a_n n!\right]$
45. যদি $y = \sin 30x + \cos 30x$ হয় তবে দেখাও যে $y_{13} = 30^{13}(1 - \sin 60x)^{1/2}$
46. যদি $y = x\ ln[(ax)^{-1} + a^{-1}]$ হয় তবে দেখাও যে $x(x + 1)y_2 + xy_1 - y + 1 = 0$
47. যদি $y = \sin x$ হয় তবে দেখাও যে $4\frac{d^3}{dy^3}(\cos^7 x) = 105\sin 4x$
48. যদি $y = e^{ax}\sin bx$ হয় তবে দেখাও যে $y_{n+1} = 2ay_n - (a^2 + b^2)y_{n-1}$

49. যদি $y = e^{-4x}\cos 5x$ হয় তবে $y_{n+1} = 8y_n - 41y_{n-1}$

50. যদি $y = ae^{-bt}\cos(ct + p)$ হয় তবে দেখাও যে
$y_2 + 2by_1 + q^2y = 0$ যেখানে $q^2 = b^2 + c^2$

51. যদি $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$ হয় তবে দেখাও যে

$$y_n = \frac{1}{4}\left[4^n \sin\left(\frac{1}{2}n\pi + 4x\right) - 6^n \sin\left(\frac{1}{2}n\pi + 6x\right) + 2^n \sin\left(\frac{1}{2}n\pi + 2x\right)\right]$$

52. যদি $y = \cos x \cos 2x \cos 3x$ হয় তবে দেখাও যে

$$y_n = \frac{1}{4}\left[6^n \cos\left(\frac{1}{2}n\pi + 6x\right) + 4^n \cos\left(\frac{n}{2}\pi + 4x\right) + 2^n \cos\left(\frac{1}{2}n\pi + 2x\right)\right]$$

53. যদি $y = e^{ax}\cos^3 bx$ হয় তবে দেখাও যে

$$y_n = \frac{1}{4}\left[(a^2 + 9b^2)^{n/2} e^{ax}\cos\left(3bx + n\tan^{-1}\frac{3b}{a}\right) + 3(a^2 + b^2)^{n/2} e^{ax}\cos\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\right]$$

54. যদি $\sin^{-1}[y\cos(x + y)] = x + y$ হয় তবে দেখাও যে $y^5y_2 + 2(1 + y^2) = 0$

55. যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ হয় তবে দেখাও যে $(hx + by)^3 y_2 = h^2 - ab$

56. যদি $x\sin\theta + y\cos\theta = a$ এবং $x\cos\theta - y\sin\theta = b$ হয় তবে দেখাও যে
$\frac{d^m x}{d\theta^m}\cdot\frac{d^n y}{d\theta^n} - \frac{d^n x}{d\theta^n}\cdot\frac{d^m y}{d\theta^m}$ একটি ধ্রুবক।

57. দেখাও যে

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(x^2 + 1)^{n+1}}\left[{}^{n+1}c_1 x^n - {}^{n+1}c_3 x^{n-2} + {}^{n+1}c_5 x^{n-4} - \cdots\right]$$

58. যদি $y = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$ হয় তবে দেখাও যে

$$y_n = \frac{(-1)^n n!}{2(1 + x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{2}\sin^{n+1}\theta\cos(n + 1)\theta + \frac{(-1)^n n!}{2}\sin^{n+1}\theta\sin(n + 1)\theta, \text{ যেখানে } \theta = \cot^{-1}x$$

———x———

Chapter–4(B)
লিবনীজের উপপাদ্য
LEIBNITZ'S THEOREM

n সংখ্যক বার অন্তরীকরণযোগ্য দুইটি ফাংশনের গুণফলের n তম ডেরিভেটিভযোগ্য নির্ণয়ের একটি সূত্র লিবনীজ আবিষ্কার করেন। এজন্য এ সূত্রটিকে লিবনীজের উপপাদ্য বা সূত্র বলে।

উপপাদ্য (লিবনীজের উপপাদ্য)–1. যদি $u = u(x)$ এবং $v = v(x)$ ফাংশনদ্বয় প্রত্যেকে n সংখ্যকবার অন্তরীকরণযোগ্য হয় তবে [If each of the functions $u = u(x)$ and $v = v(x)$ are differentiable n-times then]

$$(uv)_n = u_n v + {}^nc_1 u_{n-1} v_1 + {}^nc_2 u_{n-2} v_2 + \cdots + {}^nc_r u_{n-r} v_r + \cdots + uv_n \quad \cdots\cdots (1)$$

যেখানে $u_n = \frac{d^n u}{dx^n}$, $v_n = \frac{d^n v}{dx^n}$ এবং $(uv)_n = \frac{d^n}{dx^n}(uv)$

[NUH–02, 05, 07, 08, 09, NUH(NM)–02, 05, 08, 09, BSc(Pass)–06, DUH–84, 86, 68, 89, 04, DUHT–89, CUH–83, 93, RUS–90]

প্রমাণ ঃ এখানে $(uv)_1 = \frac{d}{dx}(uv) = u_1 v + uv_1$.

$$(uv)_2 = \frac{d}{dx}(uv)_1 = \frac{d}{dx}(u_1 v + uv_1) = u_2 v + u_1 v_1 + u_1 v_1 + uv_2$$
$$= u_2 v + 2u_1 v_1 + uv_2 = u_2 v + {}^2c_1 u_1 v_1 + {}^2c_2 uv_2$$

$$(uv)_3 = \frac{d}{dx}(u_2 v + 2u_1 v_1 + uv_2)$$
$$= u_3 v + u_2 v_1 + 2u_2 v_1 + 2u_1 v_2 + u_1 v_2 + uv_3$$
$$= u_3 v + 3u_2 v_1 + 3u_1 v_2 + uv_3$$
$$= u_3 v + {}^3c_1 u_2 v_1 + {}^3c_2 u_1 v_2 + uv_3$$

অতএব উপপাদ্যটি $n = 1, 2, 3$ এর জন্য সত্য। [Thus the theorem is true for $n = 1, 2, 3$]

ধরি উপপাদ্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য। তাহা হইলে [Let the theorem is true for $n = m$, then]

$$(uv)_m = u_m v + {}^mc_1 u_{m-1} v_1 + {}^mc_2 u_{m-2} v_2 + \cdots + {}^mc_{r-1} u_{m-r+1} v_{r-1} + {}^mc_r u_{m-r} v_r + \cdots + uv_m \quad \cdots\cdots (2)$$

এখন (2) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Now differentiating (2) w. r. to x we get]

$$\therefore (uv)_{m+1} = u_{m+1}v + (1 + {}^{m}c_1)u_m v_1 + ({}^{m}c_1 + {}^{m}c_2)u_{m-1}v_2 + \cdots + ({}^{m}c_{r-1} + {}^{m}c_r)u_{m-r+1}v_r + \cdots + uv_{m+1}$$

$$= u_{m+1}v + {}^{m+1}c_1 u_m v_1 + {}^{m+1}c_2 u_{m-1} v_2 + \cdots + {}^{m}c_r u_{m-r+1} v_r + \cdots + uv_{m+1}. \quad \text{যেহেতু } {}^{p}c_{q-1} + {}^{p}c_q = {}^{p+1}c_q$$

এখন $n = m + 1$ হইলে ইহা (1) এর সমতুল্য। সুতরাং উপপাদ্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য হইলে ইহা $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য। সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে উপপাদ্যটি সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য সত্য। [Now if $n = m + 1$ then it is equivalent to (1). So if the theorem is true for $n = m$, then it is also true for $n = m + 1$. Thus, by mathematical induction method the theorem is true for all $n \in \mathbb{N}$.]

উদাহরণ–1. যদি $y = x^3 \sin x$ হয় তবে y_n নির্ণয় কর। [If $y = x^3 \sin x$ then find y_n.] **[DUH–1975]**

সমাধান ঃ $y = x^3 \sin x$ ..... (1)

এখন (1) এর উভয় পক্ষে D^n প্রয়োগ করিয়া লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই [By Leibnitz theorem applying D^n on both sides of (1) we get]

$$D^n y = D^n(x^3 \sin x)$$

$$\Rightarrow y_n = x^3 \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) + {}^{n}c_1(3x^2) \sin\left\{\frac{(n-1)\pi}{2} + x\right\} + {}^{n}c_2(6x) \sin\left\{\frac{(n-2)\pi}{2} + x\right\} + {}^{n}c_3(6) \sin\left\{\frac{(n-3)\pi}{2} + x\right\}$$

$$= x^3 \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) - 3nx^2 \sin\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right\} - \frac{n(n-1)}{2}(6x) \sin\left\{\pi - \left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right\} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} 6 \sin\left\{\frac{3\pi}{2} - \left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right\}$$

$$= x^3 \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) - 3nx^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) - 3n(n-1)x \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) + n(n-1)(n-2) \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

$$= \{x^3 - 3n(n-1)x\} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) - \{3nx^2 - n(n-1)(n-2)\} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right).$$

উদাহরণ–2. দেখাও যে $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^n \ln x) = \frac{n!}{x}$.

[NUH(NM)–2002, BSc(Pass)–2006, DUH–1957, 1969]

সমাধান ঃ ধরি $y = x^n \ln x$ ..... (1)

এখন (1) এর উভয় পক্ষে D প্রয়োগ করিয়া পাই [Now applying the operator D on (1) we get]

$$Dy = D(x^n \ln x)$$

$$\Rightarrow y_1 = x^n D \ln x + \ln x \, Dx^n = x^n \cdot \frac{1}{x} + nx^{n-1} \ln x$$

$$\Rightarrow xy_1 = x^n + nx^n \ln x \Rightarrow xy_1 = x^n + ny \quad \text{..... (2) [(1) হইতে]}$$

এখন (2) এর উভয় পক্ষে D^n প্রয়োগ করিয়া পাই [Now applying the operator D^n on (2) we get]

$$D^n(xy_1) = D^n x^n + nD^n y$$

$$\Rightarrow xy_{n+1} + ny_n = n! + ny_n \quad \text{[বামপক্ষে লিবনীজের উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া]}$$

$$\Rightarrow xy_{n+1} = n! \Rightarrow y_{n+1} = \frac{n!}{x}.$$

উদাহরণ–3. যদি $y = \tan^{-1}x$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$ **[DUH–1982]**

(ii) $(1 + x^2)y_{n+2} + 2(n+1)y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$

[DUH–1968, 1989, RUH–1963, CUH–1982]

সমাধান ঃ $y = \tan^{-1}x \Rightarrow y_1 = \frac{1}{1 + x^2}$

$$\Rightarrow (1 + x^2)y_1 = 1 \quad \text{..... (1)}$$

(i) : (1) এর প্রত্যেক পদে D^n প্রয়োগ করিয়া লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই [By Leibnitz theorem applying D^n on each term of (1) we get]

$$D^n\{(1 + x^2)y_1\} = D^n(1) \Rightarrow (1 + x^2)y_{n+1} + n(2x)y_n + \frac{n(n-1)}{2}(2)y_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow (1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0.$$

(ii) : (1) এর প্রত্যেক পদে D^{n+1} প্রয়োগ করিয়া লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই [By Leibnitz theorem applying D^{n+1} on each them of (1) we get]

$$D^{n+1}\{(1 + x^2)y_1\} = D^{n+1}(1)$$

$$\Rightarrow (1 + x^2)y_{n+2} + (n+1)(2x)y_{n+1} + \frac{(n+1)n}{2}(2)y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1 + x^2)y_{n+2} + 2(n+1)x\, y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0.$$

উদাহরণ–4. যদি $y = \cot^{-1}x$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1 + x^2)y_{n+1} + 2nx\,y_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$

[NUH(NM)–2009, DUH–1981, 1985]

(ii) $(1 + x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$ **[DUH–1985]**

সমাধান ঃ $y = \cot^{-1}x \Rightarrow y_1 = \frac{-1}{1+x^2}$ [অন্তরীকরণ করিয়া]

$\Rightarrow (1 + x^2)y_1 = -1 \cdots\cdots (1)$

(i) : (1) এর প্রত্যেক পদে D^n প্রয়োগ করিয়া লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$D^n\{(1 + x^2)y_1\} = D^n(-1)$

$\Rightarrow (1 + x^2)y_{n+1} + n(2x)y_n + \frac{n(n-1)}{2}(2)\,y_{n-1} = 0$

$\Rightarrow (1 + x^2)y_{n+1} + 2nx\,y_n + n(n-1)y_{n-1} = 0.$

(ii) : (1) এর প্রত্যেক পদে D^{n+1} প্রয়োগ করিয়া লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$D^{n+1}\{(1 + x^2)y_1\} = D^{n+1}(-1)$

$\Rightarrow (1 + x^2)y_{n+2} + (n+1)(2x)y_{n+1} + \frac{(n+1)n}{2}(2)\,y_n = 0$

$\Rightarrow (1 + x^2)y_{n+2} + 2(n+1)x\,y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0.$

উদাহরণ–5. যদি $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ হয় তবে দেখাও যে

$x^2y_{n+2} + (2n+1)x\,y_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

[DUH–1983, 2003, RUH–1990, CUH–1983]

সমাধান ঃ $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$

$\Rightarrow Dy = aD\cos(\ln x) + bD\sin(\ln x)$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow y_1 = -a\sin(\ln x).\frac{1}{x} + b\cos(\ln x).\frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy_1 = -a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)$

$\Rightarrow D(xy_1) = -aD\sin(\ln x) + bD\cos(\ln x)$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow xy_2 + y_1 = -a\cos(\ln x).\frac{1}{x} - b\sin(\ln x).\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

$\Rightarrow D^n(x^2y_2) + D^n(xy_1) + D^ny = 0$ [উভয় পক্ষে D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow x^2y_{n+2} + n(2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(2)y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$

[লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে]

$\Rightarrow x^2y_{n+2} + (2n+1)x\,y_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0.$

উদাহরণ–6. যদি $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হয় তবে দেখাও যে

$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0.$

[NUH–95, 97, NUH(NM)–08, B.Sc(Pass)–10, DUHT–92, DUH–78, CUH–84, JUH–85]

সমাধান ঃ $y = e^{a\sin^{-1}x} \Rightarrow Dy = De^{a\sin^{-1}x}$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow y_1 = e^{a\sin^{-1}x}.\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = ay$

$\Rightarrow (1 - x^2)\,y_1^2 = a^2y^2$ [বর্গ করিয়া]

$\Rightarrow D\{(1 - x^2)y_1^2\} = a^2\,Dy^2$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1 - x^2)\,2y_1y_2 - 2xy_1^2 = 2a^2\,yy_1$

$\Rightarrow (1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0 \cdots\cdots (1)$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$\Rightarrow D^n\{(1 - x^2)y_2\} - D^n(xy_1) - a^2D^ny = 0$ [D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1 - x^2)y_{n+2} + n(-2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(-2)y_n - xy_{n+1} - ny_n - a^2y_n = 0$

$\Rightarrow (1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0.$

উদাহরণ–7. যদি $\sin^{-1}y = m\sin^{-1}x$ বা $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ হয় তবে দেখাও যে $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)x\,y_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0.$ **[NUH–04, 06, NUH(NM)–02, 09, BSc(Pass)–06, DUH–83, 06, RUH–81, CUH–80]**

সমাধান ঃ $y = \sin(m\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow Dy = D\sin(m\sin^{-1}x)$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow y_1 = \cos(m\sin^{-1}x).\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = m\cos(m\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow (1 - x^2)\,y_1^2 = m^2\{1 - \sin^2(m\sin^{-1}x)\}$ [বর্গ করিয়া]

$\Rightarrow (1 - x^2)y_1^2 = m^2(1 - y^2)$

$\Rightarrow D\{(1 - x^2)y_1^2\} = m^2D(1 - y^2)$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1 - x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^2 = m^2(-2yy_1)$

$\Rightarrow (1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$\Rightarrow D^n\{(1 - x^2)y_2\} - D^n(xy_1) + m^2D^ny = 0$ [D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} + n(-2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(-2)y_n - xy_{n+1} - ny_n + m^2 y_n = 0$

[লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে]

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)x\,y_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0.$

উদাহরণ–8. যদি $ln\, y = \tan^{-1}x$ হয়, তবে দেখাও যে

$$(1+x^2)y_{n+2} + (2nx + 2x - 1)y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

[NUH(NM)–03, 07, DUH–75, 84, 89, DUS–87, 88, CUH–80, 84]

সমাধান ঃ $ln\, y = \tan^{-1}x \Rightarrow D\, ln\, y = D\tan^{-1}x$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow \frac{y_1}{y} = \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$

$\Rightarrow D\{(1+x^2)y_1\} = Dy$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1+x^2)y_2 + 2xy_1 = y_1$

$\Rightarrow D^n\{(1+x^2)y_2\} + 2D^n(xy_1) = D^n y_1$ [D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + n(2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(2)\,y_n + 2xy_{n+1} + 2ny_n = y_{n+1}$ [লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে]

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + (2nx + 2x - 1)y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0.$

উদাহরণ–9. যদি $y = \sin\{a\, ln(x+b)\}$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(x+b)^2y_2 + (x+b)y_1 + a^2y = 0$

(ii) $(x+b)^2y_{n+2} + (2n+1)(x+b)y_{n+1} + (n^2 + a^2)y_n = 0$

[NUH(NM)–2006, BSc(Pass)–2008, CUH–1980, 1985]

সমাধান ঃ (i) $y = \sin\{a\, ln(x+b)\}$

$\Rightarrow Dy = D\sin\{a\, ln(x+b)\}$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow y_1 = \cos\{a\, ln(x+b)\}.\frac{a}{x+b}$

$\Rightarrow (x+b)y_1 = a\cos\{a\, ln(x+b)\}$

$\Rightarrow D\{(x+b)y_1\} = aD\cos\{a\, ln(x+b)\}$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (x+b)y_2 + y_1 = -a\sin\{a\, ln(x+b)\}.\frac{a}{x+b}$

$\Rightarrow (x+b)^2y_2 + (x+b)y_1 = -a^2y$

$\Rightarrow (x+b)^2y_2 + (x+b)y_1 + a^2y = 0$ ..... (1)

(ii) (1) এর প্রত্যেক পদে D^n প্রয়োগ করিয়া লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$D^n\{(x+b)^2y_2\} + D^n\{(x+b)y_1 + a^2D^ny = 0$

$\Rightarrow (x+b)^2y_{n+2} + n.2(x+b)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}.2y_n + (x+b)y_{n+1} + ny_n + a^2y_n = 0$

$\Rightarrow (x+b)^2y_{n+2} + (2n+1)(x+b)y_{n+1} + (n^2 - n + n + a^2)y_n = 0$

$\Rightarrow (x+b)^2y_{n+2} + (2n+1)(x+b)y_{n+1} + (n^2 + a^2)y_n = 0$

উদাহরণ–10. যদি $y = \cos\{ln(1+x)\}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$(1+x)^2y_{n+2} + (2n+1)(1+x)y_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

[NUH(NM)–2004, DUH–1962, CUH–1983, 1988]

সমাধান ঃ $y = \cos\{ln(1+x)\}$

$\Rightarrow Dy = D\cos\{ln(1+x)\}$ [উভয় পক্ষে D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow y_1 = -\sin\{ln(1+x)\}.\frac{1}{1+x} \Rightarrow (1+x)y_1 = -\sin\{ln(1+x)\}$

$\Rightarrow D\{(1+x)y_1\} = -D\sin\{ln(1+x)\}$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1+x)y_2 + y_1 = -\cos\{ln(1+x)\}.\frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow (1+x)^2y_2 + (1+x)y_1 = -y \Rightarrow (1+x)^2y_2 + (1+x)y_1 + y = 0$

$\Rightarrow D^n\{(1+x)^2y_2\} + D^n\{(1+x)y_1\} + D^ny = 0$ [D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1+x)^2y_{n+2} + n.2(1+x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}.2y_n + (1+x)y_{n+1} + ny_n + y_n = 0$ [লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে]

$\Rightarrow (1+x)^2y_{n+2} + (2n+1)(1+x)y_{n+1} + (n^2 - n + n + 1)y_n = 0$

$\Rightarrow (1+x)^2y_{n+2} + (2n+1)(1+x)y_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0.$

উদাহরণ–11. যদি $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ হয় তবে দেখাও যে

$$(x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$$

[DUH–1984, 1990, 2005]

সমাধান ঃ $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$

$\Rightarrow Dy^{1/m} + Dy^{-1/m} = D(2x)$ [উভয় পক্ষে D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow \frac{1}{m}y^{\frac{1}{m}-1}y_1 - \frac{1}{m}y^{\frac{-1}{m}-1}y_1 = 2$

$\Rightarrow (y^{1/m} - y^{-1/m})y_1 = 2my$ [my দ্বারা গুণ করিয়া]

$\Rightarrow (y^{1/m} - y^{-1/m})^2 y_1^2 = 4m^2y^2$ [বর্গ করিয়া]

$\Rightarrow \{(y^{1/m} + y^{-1/m})^2 - 4\}y_1^2 = 4m^2y^2 \Rightarrow (4x^2-4)y_1^2 = 4m^2y^2$

$\Rightarrow D\{(x^2-1)y_1^2\} = D(m^2y^2)$ [4 দ্বারা ভাগ করিয়া এবং D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (x^2-1)2y_1y_2 + 2xy_1^2 = 2m^2yy_1$

$\Rightarrow (x^2-1)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$\Rightarrow D^n\{(x^2-1)y_2\} + D^n(xy_1) - m^2D^ny = 0$ [D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + n(2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(2)\,y_n + xy_{n+1} + ny_n - m^2y_n = 0$

[লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে]

$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)x\,y_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0.$

উদাহরণ–12. যদি $y = (x^2-1)^n$ হয় তবে দেখাও যে

$$(x^2-1)y_{n+2} + 2ny_{n+1} - n(n+1)y_n = 0.$$

[DUH–1977, 1980, 1982]

আরো দেখাও যে $\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{du}{dx}\right\} + n(n+1)u = 0$ **[JUH–1981]**

যেখানে $u = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

সমাধান ঃ (প্রথম অংশ) ঃ $y = (x^2-1)^n$

$\Rightarrow Dy = D(x^2-1)^n$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow y_1 = n(x^2-1)^{n-1}(2x)$

$\Rightarrow (x^2-1)y_1 = 2nxy$ [x^2-1 দ্বারা গুণ করিয়া]

$\Rightarrow D\{(x^2-1)y_1\} = 2n\,D(xy)$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (x^2-1)y_2 + 2xy_1 = 2nxy_1 + 2ny$

$\Rightarrow (x^2-1)y_2 + 2(1-n)xy_1 - 2ny = 0$

$\Rightarrow D^n\{(x^2-1)y_2\} + 2(1-n)D^n(xy_1) - 2nD^n y = 0$ [D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + n(2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(2)y_n$

$+ 2(1-n)x\,y_{n+1} + 2(1-n)n\,y_n - 2n\,y_n = 0$

[লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে]

$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + (2n+2-2n)x\,y_{n+1} + (n^2-n+2n-2n^2-2)y_n = 0$

$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + 2x\,y_{n+1} - n(n+1)y_n = 0$ ..... (1)

(দ্বিতীয় অংশ) ঃ (1) $\Rightarrow (x^2-1)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + 2x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - n(n+1)y_n = 0$

$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} - 2x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + n(n+1)\frac{d^ny}{dx^n} = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{(1-x^2)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}y + n(n+1)\frac{d^ny}{dx^n} = 0$ ..... (2)

এখানে $u = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{d^ny}{dx^n}$ এবং $\frac{du}{dx} = \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$.

সুতরাং (2) $\Rightarrow \frac{d}{dx}\{(1-x^2)\frac{du}{dx} + n(n+1)u = 0.$

উদাহরণ–13. যদি $y = A\cos\{m\sin^{-1}(ax+b)\}$ হয় তবে দেখাও যে

$\{1-(ax+b)^2\}y_{n+2} - (2n+1)\,a(ax+b)y_{n+1} + (m^2-n^2)a^2y_n = 0.$

সমাধান ঃ $y = A\cos\{m\sin^{-1}(ax+b)\}$ **[NUH–09, NUH(NM)–2010]**

$\Rightarrow Dy = AD\cos\{m\sin^{-1}(ax+b)\}$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow y_1 = -A\sin\{m\sin^{-1}(ax+b)\}.\frac{m}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}.a$

$\Rightarrow \sqrt{1-(ax+b)^2}\,y_1 = -mA\sin\{m\sin^{-1}(ax+b)\}\,.\,a$

$\Rightarrow \{1-(ax+b)^2\}y_1^2 = m^2A^2\sin^2\{m\sin^{-1}(ax+b)\}$ [বর্গ করিয়া]

$= m^2[A^2 - A^2\cos^2\{m\sin^{-1}(ax+b)\}]\,.\,a^2$

$\Rightarrow \{1-(ax+b)^2\}y_1^2 = m^2(A^2-y^2)\,.\,a^2$

$\Rightarrow D[\{1-(ax+b)^2\}y_1^2] = m^2\,D(A^2-y^2)\,.\,a^2$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow \{1-(ax+b)^2\}2y_1y_2 - 2(ax+b)ay_1^2 = -2m^2yy_1\,.\,a^2$

$\Rightarrow \{1-(ax+b)^2\}y_2 - a(ax+b)y_1 + a^2m^2y = 0$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$\Rightarrow D^n[\{1-(ax+b)^2\}y_2] - aD^n\{(ax+b)y_1\} + a^2m^2D^ny = 0$

[D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow \{1-(ax+b)^2\}y_{n+2} + n\{-2(ax+b)a\}y_{n+1}$

$+\frac{n(n-1)}{2}(-2)a^2y_n - a(ax+b)y_{n+1} - na^2y_n + a^2m^2y_n = 0$

[লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে]

$\Rightarrow \{1-(ax+b)^2\}y_{n+2} - (2n+1)\,a(ax+b)y_{n+1} + (m^2-n^2)a^2y_n = 0.$

উদাহরণ–14. যদি $y = e^{\tan^{-1}x} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$

(ii) $(1+x^2)y_{n+2} + \{2(n+1)x - 1\}y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$

(iii) $(n+2)a_{n+2} + na_n = a_{n+1}$

[DUH–1984, RUH–1972, CUH–1980, 1982]

সমাধান ঃ $y = e^{\tan^{-1}x} \Rightarrow \ln y = \tan^{-1}x$

(i) x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই,

$\frac{y_1}{y} = \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow (1+x^2)\,y_1 = y$

আবার x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই,

$(1+x^2)\,y_2 + 2xy_1 = y_1$

$\Rightarrow (1+x^2)\,y_2 + (2x-1)\,y_1 = 0.$

(ii) লিবনীজ উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া $(1 + x^2)\, y_2 + (2x - 1)\, y_1 = 0$ কে n বার অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$(1 + x^2)\, y_{n+2} + {}^nc_1 \cdot 2x \cdot y_{n+1} + {}^nc_2 \cdot 2y_n + (2x - 1)\, y_{n+1} + {}^nc_1 \cdot 2y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1 + x^2)\, y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)\, y_n + (2x - 1)\, y_{n+1} + 2ny_n = 0$$

$$\Rightarrow (1 + x^2)\, y_{n+2} + \{2(n + 1)x - 1\}\, y_{n+1} + n(n + 1)\, y_n = 0$$

(iii) $y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ ..... (1)

এখন (1) এ D এবং D^2 প্রয়োগ করিয়া পাই [Now applying D and D^2 on (1) respectively we get]

$$y_1 = \sum_{r=0}^{\infty} r a_r\, x^{r-1} \text{ এবং } y_2 = \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r x^{r-2}$$

তাহা হইলে $(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0$

$$\Rightarrow (1 + x^2) \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r x^{r-2} + (2x - 1) \sum_{r=0}^{\infty} r a_r\, x^{r-1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} [r(r-1) + 2r] a_r x^r - \sum_{r=0}^{\infty} r a_r\, x^{r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r x^{r-2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} r(r+1) a_r x^r - \sum_{r=0}^{\infty} r a_r x^{r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r x^{r-2} = 0$$

এখন x^n এর সহগ সমীকৃত করিলে পাই [Equating the coefficient of x^n we get]

$$n(n + 1)a_n - (n + 1)a_{n+1} + (n + 2)(n + 1)a_{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow (n + 2)a_{n+2} + na_n = a_{n+1} \quad [n + 1 \text{ দ্বারা ভাগ করিয়া}]$$

উদাহরণ-15. যদি $y = e^{a \sin^{-1} x} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$

(ii) $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0$

(iii) $(n + 1)(n + 2)a_{n+2} = (n^2 + a^2)a_n$.

[NUH-1996, DUH-1978, RUH-1985]

সমাধান ঃ (i) এবং (ii) এর প্রমাণ উদাহরণ 10 এ করা হইয়াছে।

(iii) $y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\, x^r$ ..... (1)

এখন (1) এ D এবং D^2 প্রয়োগ করিয়া পাই

$$y_1 = \sum_{r=0}^{\infty} r a_r\, x^{r-1} \text{ এবং } y_2 = \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r\, x^{r-2}$$

তাহা হইলে $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$

$$\Rightarrow (1 - x^2) \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r\, x^{r-2} - x \sum_{r=0}^{\infty} r a_r\, x^{r-1} - a^2 \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r\, x^{r-2} - \sum_{r=0}^{\infty} [r(r-1) + r + a^2] a_r x^r = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r\, x^{r-2} - \sum_{r=0}^{\infty} (r^2 + a^2) a_r x^r = 0$$

এখন প্রথম পদে r এর পরিবর্তে n + 2 এবং দ্বিতীয় পদে r এর পরিবর্তে n বসাইয়া x^n এর সহগ সমীকৃত করিলে পাই [Replacing r by n + 2 in first term and n in the second term and then equating the coefficients of x^n we get]

$$(n + 2)(n + 1)a_{n+2} - (n^2 + a^2)a_n = 0$$

$$\Rightarrow (n + 1)(n + 2)a_{n+2} = (n^2 + a^2)a_n.$$

4.B.1. $(y_n)_0$ নির্ণয় [Determination of $(y_n)_0$] ঃ $(y_n)_0$ বলিতে $x = 0$ বিন্দুতে y_n এর মান কে বুঝায়।

(i) y_{n+1}, y_n এবং y_{n-1} এর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ হইতে $(y_n)_0$ নির্ণয়।

(i_1) : $(y)_0$, $(y_1)_0$ এবং $(y_2)_0$ নির্ণয় করিতে হয় (প্রয়োজনে)।

(i_2) : y_{n+1}, y_n এবং y_{n-1} এর যোগাশ্রয়ী সমাবেশে $x = 0$ বসাইয়া

$(y_{n+1})_0 = f(n)\,(y_{n-1})_0$ ..... (1) আকারের একটি সম্পর্ক স্থাপন করিতে হয়।

(i_3) : (1) এ n এর পরিবর্তে n − 1 বসাইয়া $(y_n)_0 = f(n-1)\,(y_{n-2})_0$ ..... (2) আকারের সম্পর্ক নির্ণয় করিতে হয়।

(i_4) : (2) এ n = 3, 4, 5, 6, ... বসাইয়া $(y_3)_0$, $(y_4)_0$, $(y_5)_0$, $(y_6)_0$ ... নির্ণয় করিলে $(y_n)_0$ সমান কত হইবে তাহা সহজেই বলা যায়।

(ii) y_{n+2}, y_{n+1} এবং y_{n-1} এর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ হইতে $(y_n)_0$ নির্ণয় ঃ

(ii_1) : উপরের (i_1) এর ন্যায়।

(ii_2) : y_{n+2}, y_{n+1} এবং y_n এর যোগাশ্রয়ী সমাবেশে $x = 0$ বসাইয়া $(y_{n+2})_0 = f(n)(y_n)_0$ ..... (3) আকারের একটি সম্পর্ক স্থাপন করিতে হয়।

(ii_3) : (3) এ n এর পরিবর্তে n − 2 বসাইয়া $(y_n)_0 = f(n-2)\,(y_{n-2})_0$ ..... (4)

(ii_4) : (4) এ n = 3, 4, 5, 6, ... বসাইয়া $(y_3)_0$, $(y_4)_0$, $(y_5)_0$, $(y_6)_0$, ... নির্ণয় করিলে $(y_n)_0$ সমান কত হইবে বলা যায়।

এখন আমরা $(y_n)_0$ নির্ণয়ের পদ্ধতি নিয়ে উদাহরণের মাধ্যমে আলোচনা করিবো।

উদাহরণ–16. যদি $y = \tan^{-1}x$ হয় তবে $(y_n)_0$ নির্ণয় কর। **[CUH–82, 92]**

সমাধান ঃ $y = \tan^{-1}x$ [এখানে $(y)_0 = 0$]

$\Rightarrow Dy = D\tan^{-1}x$ [উভয় পক্ষে D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{1+x^2}$ [এখানে $(y_1)_0 = 1$]

$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = 1 \cdots (1)$

$\Rightarrow D^n[(1+x^2)y_1] = D^n$ [উভয় পক্ষে D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0 \cdots (2)$ [উদাহরণ 14 দ্বারা]

আবার (1) হইতে পাই $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$

এখন $x = 0$ হইলে পাই $(y_2) = 0$

এখন (2) এ $x = 0$ বসাইয়া পাই [Now putting $x = 0$ in (2)]

$$(y_{n+1})_0 + n(n-1)(y_{n-1})_0 = 0$$

$$\Rightarrow (y_{n+1})_0 = -n(n-1)(y_{n-1})_0 \cdots\cdots (3)$$

(3) এ n এর পরিবর্তে $n-1$ বসাইয়া পাই [In (3), putting $n-1$ instead of n]

$$(y_n)_0 = -(n-1)(n-2)(y_{n-2})_0 \cdots\cdots (4)$$

এখন (4) এ $n = 3, 4, 5, 6, \cdots$ বসাইয়া পাই

$(y_3)_0 = -2.1(y_1)_0 = -2.1 = (-1)^{3-1/2}\,2!$ [$\because (y_1)_0 = 1$]

$(y_4)_0 = -3.2(y_2)_0 = 0$ [$\because (y_2)_0 = 0$]

$(y_5)_0 = -4.3(y_3)_0 = (-1)^2\,4.3.2.1 = (-1)^{5-1/2}\,4!$

$(y_6)_0 = -5.4(y_4)_0 = 0$

$(y_7)_0 = -6.5(y_5)_0 = (-1)^3\,6.5.4.3.2.1 = (-1)^{7-1/2}\,6!$

... ...

সুতরাং $y_n = \begin{cases} 0 & \text{যখন n জোড় [when n is even]} \\ (-1)^{n-1/2}(n-1)! & \text{যখন n বেজোড় [when n is odd]} \end{cases}$

উদাহরণ–17. যদি $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হয় তবে $(y_n)_0$ নির্ণয় কর।

[NUH–2003, DUH–1978, 2002, RUH–1985, JUH–1985]

সমাধান ঃ এখানে $y = e^{a\sin^{-1}x}$ এবং $y_1 = e^{a\sin^{-1}x}\,\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$.

সুতরাং $(y)_0 = e^0 = 1$ এবং $(y_1)_0 = e^0.\frac{a}{1} = a$

এখন উদাহরণ (20) এর (i) এ $x = 0$ বসাইয়া পাই $(y_2)_0 - a^2(y)_0 = 0$

$$\Rightarrow (y_2)_0 = a^2.1 = a^2$$

আবার উদাহরণ 20 হইতে পাই

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)x\,y_{n+1} - (n^2+a^2)y_n \cdots\cdots (1)$$

এখন (1) এ $x = 0$ বসাইয়া পাই $(y_{n+2})_0 - (n^2+a^2)(y_n)_0 = 0$

$$\Rightarrow (y_{n+2})_0 = (n^2+a^2)(y_n)_0 \cdots\cdots (2)$$

এখন (2) এ n এর পরিবর্তে $n-2$ বসাইয়া পাই

$$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 + a^2\}(y_{n-2})_0 \cdots\cdots (3)$$

এখন (3) এ $n = 3, 4, 5, 6, \cdots$ বসাইয়া পাই

$(y_3)_0 = (1^2+a^2)(y_1)_0 = (1^2+a^2)a$ [$\because (y_1)_0 = a$]

$(y_4)_0 = (2^2+a^2)(y_2)_0 = (2^2+a^2)a^2$ [$\because (y_2)_0 = a^2$]

$(y_5)_0 = (3^2+a^2)(y_3)_0 = (3^2+a^2)(1^2+a^2)a$

$(y_6)_0 = (4^2+a^2)(y_4)_0 = (4^2+a^2)(2^2+a^2)a^2$

... ...

সুতরাং $(y_n)_0 = \{(n-2)^2+a^2\} \cdots (4^2+a^2)(2^2+a^2)a^2$ যখন n জোড়

এবং $(y_n)_0 = \{(n-2)^2+a^2)\} \cdots (3^2+a^2)(1^2+a^2)a$ যখন n বেজোড়।

উদাহরণ–18. $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ হইলে $(y_n)_0$ নির্ণয় কর। **[DUH–83, 06]**

সমাধান ঃ $y = \sin(m\sin^{-1}x) \cdots\cdots (1)$

$\Rightarrow Dy = D\sin(m\sin^{-1}x)$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow y_1 = \cos(m\sin^{-1}x).\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \cdots\cdots (2)$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = m\cos(m\sin^{-1}x)$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = m^2\cos^2(m\sin^{-1}x)$ [বর্গ করিয়া]

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = m^2[1-\sin^2(m\sin^{-1}x)] \Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = m^2(1-y^2)$

$\Rightarrow D[(1-x^2)y_1^2] = m^2\,D(1-y^2)$ [অপারেটর D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1-x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^2 = -2m^2yy_1$

$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0 \cdots\cdots (3)$

$\Rightarrow D^n[(1-x^2)y_2] - D^n(xy_1) + m^2D^ny = 0$ [D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0 \cdots\cdots (4)$

[লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে]

এখন $x = 0$ হইলে (1) $\Rightarrow (y)_0 = 0$, (2) $\Rightarrow (y_1)_0 = m$

(3) $\Rightarrow (y_2)_0 = 0$ এবং (4) $\Rightarrow (y_{n+2})_0 + (m^2-n^2)(y_n)_0 = 0 \cdots\cdots (5)$

তাহা হইলে (5) $\Rightarrow (y_{n+2})_0 = (n^2-m^2)(y_n)_0 \cdots\cdots (6)$

এখন (6) এ n এর পরিবর্তে $n-2$ বসাইয়া পাই

$$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\}(y_{n-2})_0 \cdots\cdots (7) \text{ যেখানে } n > 2$$

এখন (7) এ n = 3, 4, 5, 6, ... বসাইয়া পাই

$(y_3)_0 = (1^2 - m^2)(y_1)_0 = (1^2 - m^2)m$

$(y_4)_0 = (2^2 - m^2)(y_2)_0 = 0$

$(y_5)_0 = (3^2 - m^2)(y_3)_0 = (3^2 - m^2)(1^2 - m^2)m$

$(y_6)_0 = (4^2 - m^2)(y_4)_0 = 0$

এইভাবে অগ্রসর হইলে আমরা পাই $(y_n)_0 = 0$ যখন n জোড় এবং $(y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\} \cdots (3^2 - m^2)(1^2 - m^2)m$ যখন n বেজোড়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ উপরের (7) নং এ n = 2 হইলেও সত্য। সুতরাং (7) এ n = 2 ও বসানো যাইবে।

উদাহরণ–19. যদি $y = (\sinh^{-1}x)^2$ হয় তবে দেখাও যে $(1 + x^2)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$. ইহা হইতে $(y_n)_0$ নির্ণয় কর।

[NUH–2010, DUH–1976, 1988]

সমাধান ঃ $y = (\sinh^{-1}x)^2$ ..... (1)

$\Rightarrow Dy = D(\sinh^{-1}x)^2$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow y_1 = 2\sinh^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ..... (2)

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\,y_1 = 2\sinh^{-1}x \Rightarrow (1+x^2)y_1^2 = 4(\sinh^{-1}x)^2$ [বর্গ করিয়া]

$\Rightarrow (1+x^2)y_1^2 = 4y \Rightarrow D[(1+x^2)y_1^2] = D(4y)$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1+x^2)2y_1y_2 + 2xy_1^2 = 4y_1$

$\Rightarrow (1+x^2)y_2 + xy_1 = 2$ ..... (3) [উভয় পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$\Rightarrow D^n[(1+x^2)y_2 + xy_1] = D^n2$ [D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + n(2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(2)\,y_{n+2}\,y_{n+1} + ny_n = 0$

[লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে]

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - n + n)y_n = 0$

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$ ..... (4)

(দ্বিতীয় অংশ) ঃ এখন x = 0 হইলে (1) $\Rightarrow (y)_0 = 0$, (2) $\Rightarrow (y_1)_0 = 0$

(3) $\Rightarrow (y_2)_0 = 2$ এবং (4) $\Rightarrow (y_{n+2})_0^2 + n^2(y_n)_0 = 0$ ..... (5)

এখন $\Rightarrow (y_{n+2})_0 = -n^2(y_n)_0$ ..... (6)

এখন (6) এ n এর পরিবর্তে n – 2 বসাইয়া পাই

$(y_n)_0 = -(n-2)^2(y_{n-2})_0$ ..... (7) যেখানে $n > 2$.

এখন (7) এ n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... বসাইয়া পাই $(y_3)_0 = -1^2(y_1) = 0$

$(y_4)_0 = -2^2(y_2)_0 = -2^2.2 = (-1)^{\frac{4}{2}-1}\,2^2.2$

$(y_5)_0 = -3^2(y_3)_0 = 0$

$(y_6)_0 = -4^2(y_4)_0 = (-1)^2.4^2.2^2.2 = (-1)^{\frac{6}{2}-1}\,4^2.2^2.2$

$(y_7)_0 = -5^2(y_5)_0 = 0$

$(y_8)_0 = -6^2(y_6)_0 = (-1)^{\frac{8}{2}-1}.6^2.4^2.2^2.2 = (-1).8^2.6^2.4^2.2^2.2$

এইভাবে অগ্রসর হইলে আমরা পাই $y_n = 0$ যখন n বেজোড়

$y_n = (-1)^{\frac{n}{2}-1}(n-2)^2 \cdots 6^2.4^2.2^2.2$ যখন $n > 2$ এবং জোড়

$= (-1)^{\frac{n}{2}-1}\{(n-2) \cdots 6.4.2\}^2.2 = (-1)^{\frac{n}{2}-1}\{2^{n/2-1}.\left(\frac{n}{2}-1\right) \cdots 3.2.1\}^2.2$

$= (-1)^{\frac{n}{2}-1}\,2^{n-2}\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right\}^2 2 = (-1)^{\frac{n}{2}-1}\,2^{n-1}\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)!\right\}^2$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ উপরের (7) নং শর্তে n = 2 হইলে সত্য নয় কারণ n = 2 হইলে

(7) $\Rightarrow (y_2)_0 = (y_0)_0 = (y)_0 = 0$. কিন্তু এ শর্তে (3) $\Rightarrow (y_2)_0 = 2$.

সুতরাং উপরের (7) নং শর্ত n = 2 এর জন্য সত্য নয়।

উদাহরণ–20. যদি $y = (x + \sqrt{x^2+1})^m$ হয় তবে দেখাও যে

$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$ **[NUH–02, 08]**

সমাধান ঃ $y = (x + \sqrt{x^2+1})^m \Rightarrow Dy = D(x + \sqrt{x^2+1})^m$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow y_1 = m(x + \sqrt{x^2+1})^{m-1} \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{2}.2x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$= m(x + \sqrt{x^2+1})^m \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\,y_1 = my \Rightarrow (1+x^2)y_1^2 = m^2y^2$ [বর্গ করিয়া]

$\Rightarrow D[(1+x^2)y_1^2] = m^2Dy^2$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1+x^2)\,2y_1y_2 + 2xy_1^2 = 2m^2\,yy_1$

$\Rightarrow (1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$

$\Rightarrow D^n[(1+x^2)y_2] + D^n(xy_1) - m^2D^ny = 0$ [D^n প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + n(2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(2)y_n$

$+ xy_{n+1} + ny_n - m^2\,y_n = 0$ [লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে]

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - n + n - m^2)y_n = 0$

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$

উদাহরণ–21. যদি $y = ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$ হয় তবে দেখাও যে

$$(x^2+a^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$ **[B.Sc(Pass)-07]**

সমাধান ঃ $y = ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$

$\Rightarrow Dy = D\, ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+a^2}\, y_1 = 1 \Rightarrow (x^2+a^2)y_1^2 = 1$ [বর্গ করিয়া]

$\Rightarrow D[(x^2+a^2)y_1^2] = D.1$ [D প্রয়োগ করিয়া]

$\Rightarrow (x^2+a^2)(2y_1y_2) + 2xy_1^2 = 0$

$\Rightarrow (x^2+a^2)y_2 + xy_1 = 0$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$\Rightarrow D^n[(x^2+a^2)y_2] + D^n(xy_1) = 0$ [D^n প্রয়োগ করিয়া]

$$\Rightarrow (x^2+a^2)y_{n+2} + n(2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}2y_n + xy_{n+1} + ny_n = 0$$ [লিবনীজ উপপাদ্য সাপেক্ষে]

$\Rightarrow (x^2+a^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - n + n)y_n = 0$

$\Rightarrow (x^2+a^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0.$

উদাহরণ–22. যদি $y = A(x+\sqrt{x^2+1})^m + B(x+\sqrt{x^2+1})^{-m}$ হয় তবে দেখাও যে $(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0.$

সমাধান ঃ $y = A(x+\sqrt{x^2+1})^m + B(x+\sqrt{x^2+1})^{-m}$

উভয় পক্ষে D প্রয়োগ করিয়া আমরা পাই

$$y_1 = Am(x+\sqrt{x^2+1})^{m-1}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - Bm(x+\sqrt{x^2+1})^{-m-1}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}\, y_1 = m[A(x+\sqrt{x^2+1})^m - B(x+\sqrt{x^2+1})^{-m}]$

$\Rightarrow (x^2+1)y_1^2 = m^2[\{A(x+\sqrt{x^2+1})^m + B(x+\sqrt{x^2+1})^{-m}\}^2 - 4AB]$ [বর্গ করিয়া]

$\Rightarrow (x^2+1)y_1^2 = m^2(y^2 - 4AB).$

আবার উভয় পক্ষে D প্রয়োগ করিয়া পাই $(x^2+1)2y_1y_2 + 2xy_1^2 = 2m^2yy_1$

$\Rightarrow (x^2+1)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

এখন উভয় পক্ষে D^n প্রয়োগ করিয়া লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$$(x^2+1)y_{n+2} + n(2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(2)y_n + xy_{n+1} + ny_n - m^2y_n = 0$$

$\Rightarrow (x^2+1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$

উদাহরণ–23. দেখাও যে

$$D^n\left(\frac{ln\, x}{x}\right) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\left(ln\, x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}\right)$$

সমাধান ঃ যদি $u = \frac{1}{x} = x^{-1}$ এবং $v = ln\, x$ হয় তবে

$$u_r = \frac{(-1)^r\, r!}{x^{r+1}} \text{ এবং } v_r = \frac{(-1)^{r-1}\,(r-1)!}{x^r}$$

এখন লিবনীজ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই $D^n\left(\frac{ln\, x}{x}\right) = D^n(x^{-1}\, ln\, x)$

$$= \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}} ln\, x + n\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}\cdot\frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{(-1)^{n-2}\,(n-2)!}{x^{n-1}}\frac{(-1)^2\,1!}{x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(-1)^{n-3}\,(n-3)!}{x^{n-2}}\frac{(-1)^2\,2!}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x}\frac{(-1)^{n-1}\,(n+1)!}{x^n}$$

$$= \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}} ln\, x - \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^n\, n!}{2x^{n+1}} - \frac{(-1)^n\, n!}{3x^{n+1}} - \cdots \frac{(-1)^n\, n!}{nx^{n+1}}$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\left(ln\, x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}\right).$$

উদাহরণ–24. যদি $I_n = D^n(x^n\, ln\, x)$ হয় তবে দেখাও যে $I_n = nI_{n-1} + (n-1)!$ এবং ইহা হইতে আরো দেখাও যে

$$I_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 + ln\, x\right) n!.$$

সমাধান ঃ (প্রথম অংশ) এখানে $I_n = D^n(x^n\, ln\, x)$

$$= D^{n-1}[D(x^n\, ln\, x)] = D^{n-1}\left(nx^{n-1}\, ln\, x + x^n \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$= nD^{n-1}(x^{n-1}\, ln\, x) + D^{n-1}(x^{n-1}) = nI_{n-1} + (n-1)!$ ..... (1)

দ্বিতীয় অংশ ঃ (1) এর উভয় পক্ষকে n! দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\frac{I_n}{n!} = \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n} \text{ ..... (2)}$$

এখন (2) এ n এর পরিবর্তে n, n − 1, n − 2, ⋯ , 3, 2, 1 বসাইয়া যোগ করিয়া পাই

$$\frac{I_n}{n!}+\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{I_{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+\frac{I_3}{3!}+\frac{I_2}{2!}+\frac{I_1}{1!}$$

$$=\left[\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n}\right]+\left[\frac{I_{n-2}}{(n-2)!}+\frac{1}{n-1}\right]+\cdots$$

$$+\left(\frac{I_2}{2!}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{I_1}{1!}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{I_0}{0!}+1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{I_n}{n!}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+I_0$$

$$\Rightarrow I_n=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1+I_0\right)n! \quad \cdots\cdots (3)$$

আবার যেহেতু $I_n = D^n(x^n \ln x) \Rightarrow I_0 = D^0(x^0 \ln x) = \ln x$

সুতরাং (3) $\Rightarrow I_n=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1+\ln x\right)n!$.

উদাহরণ–25. প্রমাণ কর যে, $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}e^{1/x})=(-1)^n\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$

সমাধান ঃ প্রমাণ করিতে হইবে,

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}e^{1/x})=(-1)^n\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}} \quad \cdots\cdots (1)$$

$n = 1$ এর জন্য, বামপক্ষ $= \frac{d}{dx}(e^{1/x})$

$$=e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=(-1)^1\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

এবং ডানপক্ষ $=(-1)^1\frac{e^{1/x}}{x^2}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

সুতরাং $n = 1$ এর জন্য (1) সত্য।

ধরি, $n = m$ এর জন্য (1) সত্য।

$$\therefore \frac{d^m}{dx^m}(x^{m-1}e^{1/x})=(-1)^m\frac{e^{1/x}}{x^{m+1}} \quad \cdots\cdots (2)$$

এখন, $\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^{m+1-1}e^{1/x})=\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x\cdot x^{m-1}e^{1/x})$

$$=x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^{m-1}e^{1/x})+{}^{m+1}c_1\cdot 1\cdot\frac{d^m}{dx^m}(x^{m-1}e^{1/x})$$

(লিবনীজ সূত্র ব্যবহার করিয়া)

$$=x\frac{d}{dx}\cdot\frac{d^m}{dx^m}(x^{m-1}e^{1/x})+(m+1)\frac{d^m}{dx^m}(x^{m-1}e^{1/x})$$

$$=x\frac{d}{dx}\left\{(-1)^m\frac{e^{1/x}}{x^{m+1}}\right\}+(m+1)(-1)^m\frac{e^{1/x}}{x^{m+1}} \quad \text{[(2) এর সাহায্যে]}$$

$$=(-1)^m x\left\{-\frac{e^{1/x}}{x^{m+3}}-\frac{(m+1)e^{1/x}}{x^{m+2}}\right\}+(-1)^m(m+1)\frac{e^{1/x}}{x^{m+1}}$$

$$=(-1)^{m+1}\frac{e^{1/x}}{x^{m+2}}-\frac{(-1)^m(m+1)e^{1/x}}{x^{m+1}}+(-1)^m(m+1)\frac{e^{1/x}}{x^{m+1}}$$

$$\therefore \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^{m+1-1}e^{1/x})=\frac{(-1)^{m+1}e^{1/x}}{x^{m+1+1}}$$

ইহা নির্দেশ করিয়া $n = m + 1$ এর জন্য (1) সত্য অর্থাৎ (1) সম্পর্কটি $n = m$ এর জন্য সত্য হইলে উহা $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হয়। আবার (1) সম্পর্কটি $n = 1$ এর জন্য সত্য। সুতরাং আরোহ পদ্ধতি অনুসারে $n \in \mathbb{N}$ এর সকল মানের জন্য $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}e^{1/x})=(-1)^n\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$ সত্য।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

4.B.1. লিবনীজ উপপাদ্যের বর্ণনা দাও। (State the Leibniz theorem.)

Ans : যদি $u = u(x)$ এবং $v = v(x)$ উভয়ই x এর সাপেক্ষে n সংখ্যক পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণযোগ্য হয় তবে $(uv)_n = u_n v + {}^nc_1 u_{n-1} v_1 + {}^nc_2 u_{n-2} v_2 + \cdots + uv_n$ যেখানে u ও v এর সূচক সমূহ x এর সাপেক্ষে উহাদের অন্তরীকরণ মাত্রা নির্দেশ করে।

4.B.2. $y = f(x)$ ফাংশনের ক্ষেত্রে $(y_n)_0$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $(y_n)_0$ for the function $y = f(x)$?)

Ans : $(y_n)_0$ দ্বারা বোঝায় ফাংশনটির n তম অন্তরজ যেখানে $x = 0$ অর্থাৎ $(y_n)_0=\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=0}$.

4.B.3. যদি $y = \sin x$ হয় তবে $(y)_0$ ও $(y_1)_0$ কত:? [If $y = \sin x$ then what are $(y)_0$ and $(y_1)_0$?]

Ans : এখানে $y = \sin x \Rightarrow y_1 = \cos x$

$\therefore (y)_0 = \sin 0 = 0$ এবং $(y_1)_0 = \cos 0 = 1$

4.B.4. যদি $y = \tan^{-1}x$ হয় তবে $(y_1)_0$ কত? [If $y = \tan^{-1} x$ then what is $(y_1)_0$?]

Ans : $y = \tan^{-1}x \Rightarrow y_1 = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore (y_1)_0 = \frac{1}{1+0} = 1$

4.B.5. যদি $y = e^{ax}$ হয় তবে $(y_n)_0$ কত? [If $y = e^{ax}$ then what is $(y_n)_0$?]

Ans : $y = e^{ax} \Rightarrow y_n = e^{ax}\cdot a^n$

$\therefore (y_n)_0 = e^0 \cdot a^n = a^n$

EXERCISE–4(B)

1. নিম্নের প্রত্যেকটি সম্পর্কের y_n নির্ণয় কর।

(i) $y = x^3 \ln x$ উত্তর ঃ $y_n = (-)^n . 6(n-4)! x^{n-3}$

(ii) $y = x^2 \sin 3x$

উত্তর ঃ $\left[y_n = 3^n x^2 \sin\left(\frac{1}{2}n\pi + 3x\right) - 2n\, 3^{n-1} \cos\left(\frac{1}{2}n\pi + 3x\right) + \cdots + 3^{n-2}\, n(n-1) \sin\left\{\frac{1}{2}(n-2)\pi + 3x\right\}\right]$

(iii) $y = x^3 \cos x$

উত্তর ঃ $\left[y_n = x^3 \cos\left(\frac{1}{2}n\pi + x\right) + 3nx^2 \sin\left(\frac{1}{2}n\pi + x\right) - 3n(n-1)x \cos\left(\frac{1}{2}n\pi + x\right) - n(n-1)(n-2) \sin\left(\frac{1}{2}n\pi + x\right)\right]$

(iv) $y = x^2 e^x \cos x$ উত্তর ঃ $\left[y_n = 2^{n-2/2}\, e^x \left\{2x^2 \cos\left(\frac{n\pi}{4} + x\right)\right\} + 2^{3/2}\, nx \cos\left\{(n-1)\frac{\pi}{4} + x\right\} + n(n-1) \cos\left\{(n-2)\frac{\pi}{4} + x\right\}\right]$.

2. যদি $y = \frac{x^n}{1+x}$ হয় তবে দেখাও যে $y_n = \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

3. যদি $y = x^n \ln x$ হয় তবে দেখাও যে $D^{n+1}y = \frac{n!}{x}$.

4. নিম্নের প্রত্যেকটি সমীকরণকে n সংখ্যক বার অন্তরীকরণ কর ঃ

(i) $xy_1 + y = 0$ উত্তর ঃ $[xy_{n+1} + (n+1)y_n = 0]$

(ii) $x^2y_1 - y = 0$ উত্তর ঃ $[x^2y_{n+1} + (2nx - 1)y_n + n(n-1)y_{n-1} = 0]$

(iii) $(1 + x^2)y_1 = 1$ উত্তর ঃ $(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0]$

(iv) $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$ উত্তর ঃ $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0]$

(v) $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$

উত্তর ঃ $[(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 + m^2)y_n = 0]$

5. যদি $y = \cot^{-1}x$ হয় তবে এ হইতে $(1 + x^2)y_{n+1} + Ax\, y_n + By_{n-1} = 0$ আকারের একটি সমীকরণ উৎপন্ন কর যেখানে A এবং B এর উভয়ে n এর ফাংশন।

উত্তর ঃ $[(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0]$

6. যদি $y = e^{m \cos^{-1}x} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$

(ii) $(n+1)(n+2)a_{n+2} = (m^2 + n^2)a_n$

7. যদি $y = \sin^{-1}x$ হয় তবে দেখাও যে $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$. আরো দেখাও যে

(i) $(y_n)_0 = 0$ যখন $n = 2, 4, 6, \cdots$

(ii) $(y_n)_0 = (n-2)^2 \cdots 5^2.3^2.1^2$ যখন $n = 1, 3, 5, \cdots$

8. যদি $y = \cos^{-1}x$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$ (ii) $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$ আরো দেখাও যে

(iii) $(y_n)_0 = 0$ যখন $n = 2, 4, 6, \cdots$

(iv) $(y_n)_0 = -(n-2)^2 \cdots 5^2.3^2.1^2$ যখন $n = 1, 3, 5, \cdots$

9. যদি $y = 7\cos(\ln x) + 18\sin(\ln x)$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ (ii) $x^2y_3 + 3xy_2 + 2y_1 = 0$

(iii) $x^2y_4 + 5xy_3 + 5y_2 = 0$ (iv) $x^2y_5 + 7xy_4 + 10y_3 = 0$

(v) $x^2y_6 + 9xy_5 + 17y_4 = 0$

(vi) $x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

10. যদি $y = a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x)$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

(ii) $x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

11. যদি $y = \sin(n \sin^{-1}x)$ হয় যেখানে $n \in \mathbb{N}$ তবে দেখাও যে

(i) $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + n^2y = 0$ (ii) $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} = 0$

12. যদি $y = (\sinh^{-1}x)^2$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1 + x^2)y_2 + xy_1 - 2 = 0$ (ii) $(1 + x^2)y_3 + 3xy_2 + y_1 = 0$

(iii) $(1 + x^2)y_4 + 5xy_3 + 4y_2 = 0$

(iv) $(1 + x^2)y_{11} + 19xy_{10} + 81y_9 = 0$

(v) $(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$

আরো দেখাও যে $(y_1)_0 = (y_3)_0 = (y_5)_0 = (y_7)_0 = \cdots = 0$

এবং $(y_{18})_0 = 2.2^2.4^2.6^2 \cdots 16^2$

13. যদি $y^{1/3} + y^{-1/3} = 2x$ তবে দেখাও যে

(i) $(x^2-1)y_2 + xy_1 = 9y$

(ii) $(x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-9)y_n = 0$

14. যদি $x = \tan(ln\, y)$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$

(ii) $(1+x^2)y_3 + (4x-1)y_2 + 2y_1 = 0$

(iii) $(1+x^2)y_4 + (6x-1)y_3 + 6y_2 = 0$

(iv) $(1+x^2)y_{n+2} + \{2(n+1)x - 1\}y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$

15. যদি $y = 501\cos(ln\, x) + 705\sin(ln\, x)$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ (ii) $x^2y_4 + 5xy_3 + 5y_2 = 0$

(iii) $x^2\, y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

16. যদি $y = e^{m\cos^{-1}x}$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1-x^2)y_2 - xy_1 - m^2y = 0$ [NUH–2003]

(ii) $(1-x^2)y_3 - 3xy_2 - (1+m^2)y_1 = 0$

(iii) $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+m^2)y_n = 0$

আরো দেখাও যে $(y_n)_0 = \{(n-2)^2+m^2\} \cdots (4^2+m^2)(2^2+m^2)m^2\, e^{m\pi/2}$

যখন n জোড় এবং $(y_n)_0 = -\{(n-2)^2+m^2\} \cdots (3^2+m^2)(1^2+m^2)m e^{m\pi/2}$

যখন n বেজোড়

17. যদি $\sin^{-1}y = m\sin^{-1}x$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$

(ii) $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$ আরো দেখাও যে $(y_n)_0 = 0$ যখন n জোড় $= \{(n-2)^2 - m^2\} \cdots (3^2-m^2)(1^2-m^2)m$ যখন n বেজোড়।

18. যদি $x = \sin\left(\frac{1}{a}\sin^{-1}y\right)$ হয় তবে দেখাও যে

$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (a^2-n^2)y_n = 0$

19. যদি $x = \sin\left(\frac{1}{m}\, ln\, y\right)$ হয় তবে দেখাও যে $(y_{n+2})_0 = (n^2+m^2)(y_n)_0$

20. যদি $\sin^{-1}y = a\, ln(x+b)$ হয় তবে

(i) $(x+b)^2y_2 + (x+b)y_1 + a^2y = 0$

(ii) $(x+b)^2y_{n+2} + (2n+1)(x+b)y_{n+1} + (n^2+a^2)y_n = 0$

21. যদি $y^{1/n} + y^{-1/n} = 2x$ হয় যেখানে $n \in \mathbb{N}$ তবে দেখাও যে $(x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} = 0$

22. যদি $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ হয় তবে দেখাও যে $(y_{n+2})_0 = (m^2-n^2)(y_n)_0$

23. যদি $p\sin^{-1}y = q\sin^{-1}x$ হয় যেখানে $pq \neq 0$ তবে দেখাও যে

(i) $p^2(1-x^2)y_2 - p^2xy_1 + q^2y = 0$

(ii) $p^2(1-x^2)y_{n+2} - p^2(2n+1)xy_{n+1} + (q^2-p^2n^2)y_n = 0$

24. যদি $y = \cos(m\sin^{-1}x)$ হয় তবে দেখাও যে $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$

25. যদি $y = a\sin^{-1}x + b\cos^{-1}x$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ (ii) $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$

26. যদি $y = ln(x + \sqrt{x^2+4})$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(x^2+4)y_2 + xy_1 = 0$ (ii) $(x^2+4)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$

27. যদি $y = \frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2$ হয় তবে দেখাও যে $(y_{n+2})_0 + 2n^2(y_n)_0 + n(n-1)^2(n-2)(y_{n-2})_0 = 0$

28. যদি $y = A(x+\sqrt{x^2+1})^m + B(x+\sqrt{x^2+1})^{-m}$ হয় তবে দেখাও যে

$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$

29. যদি $y = \sin\{ln(1+x)^2\}$ হয় তবে দেখাও যে

$(1+x)^2\, y_{n+2} + (2n+1)(1+x)y_{n+1} + (n^2+4)y_n = 0$

30. দেখাও যে $D^n[x^n(1-x)^n]$

$$= n!(1-x)^n\left[1 - \frac{n^2}{1^2}\frac{x}{1-x} + \frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2}\cdot\frac{x^2}{(1-x)^2} + \cdots\right]$$

31. যদি $y = (x+\sqrt{x^2+1})^m$ হয় তবে দেখাও যে

$(y_n)_0 = \{m^2-(n-2)^2\} \cdots (m^2-4^2)(m^2-2^2)m^2$ যখন n জোড়

$= \{m^2-(n-2)^2\} \cdots (m^2-3^2)(m^2-1^2)m$ যখন n বেজোড়

32. যদি $y = \frac{\sin x}{x}$ হয় তবে দেখাও যে

$$y_n = \left[P\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right) + Q\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\right]\frac{1}{x^{n+1}}$$

যেখানে $Q = x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \ldots$

এবং $P = nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots$

33. যদি $y = \frac{\cos x}{x}$ হয় তবে দেখাও যে

$$y_n = \left[P\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right) - Q\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\right]\frac{1}{x^{n+1}}$$

যেখানে $P = x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \ldots$

এবং $Q = nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots$

34. যদি $y\sqrt{x^2-1} = ln(x+\sqrt{x^2-1})$ হয় তবে দেখাও যে

$$(x^2-1)y_{n+1} + (2n+1)xy_n + n^2y_{n-1} = 0$$

35. x^{2n} কে n সংখ্যকবার দুই পদ্ধতিতে বিস্তৃতি করিয়া দেখাও যে

$$1 + \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2} + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2.2^2.3^2} + \cdots = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

36. যদি $y = (1+x+x^2+x^3)^{-1}$ হয় তবে দেখাও যে

$$(y_n)_0 = \begin{cases} 0 & \text{যখন } n = 4p+2 \text{ বা } 4p+3 \text{ আকারের সংখ্যা} \\ n! & \text{যখন } n = 4p \text{ আকারের সংখ্যা} \\ -n! & \text{যখন } n = 4p+1 \text{ আকারের সংখ্যা} \end{cases}$$

37. যদি $y = \tan^{-1}x$ হয় তবে দেখাও যে

$$(y_n)_0 = \begin{cases} 0 & \text{যখন } n = 2p \text{ আকারের সংখ্যা} \\ (n-1)! & \text{যখন } n = 4p+1 \text{ আকারের সংখ্যা} \\ -(n-1)! & \text{যখন } n = 4p+3 \text{ আকারের সংখ্যা} \end{cases}$$

38. প্রমাণ কর যে, $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}e^{1/x}) = (-1)^n\frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.

Chapter–5

রোলের উপপাদ্য ও গড়মান উপপাদ্য

ROLLE'S AND MEAN VALUE THEOREM

5.1. রোলের উপপাদ্য (Rolle's theorem) :

[NUH–08, 10, NUH(NM)–02, 09, DUH–09, BSc(Pass)–07]

যদি $y = f(x)$ ফাংশন [If a function $y = f(x)$ is]

(i) [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন [continuous in the closed interval [a, b]]

(ii) (a, b) খোলা ব্যবাধিতে অন্তরীকরণযোগ্য এবং [differentiable in the open interval (a, b), and]

(iii) $f(a) = f(b)$ হয়

তবে a এবং b এর মধ্যে অন্ততঃপক্ষে x এর এমন একটি মান c পাওয়া যাবে যেখানে $f'(c) = 0$ হবে। [then there exists at least a value c of x between a and b such that $f'(c) = 0$]

প্রমাণ ঃ যেহেতু $y = f(x)$ ফাংশন [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন, কাজেই [a, b] ব্যবধিতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান অথবা লঘিষ্ঠমান অথবা উভয় মানই থাকিবে।

মনে করি $y = f(x)$ ফাংশনের গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ট মান যথাক্রমে M এবং m. এখন $m = M$ বা $m \neq M$ হইতে পারে।

যখন $m = M$, তখন $f(x) =$ ধ্রুবক হইবে $[\because f(a) = f(b)]$

এইক্ষেত্রে $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(c) = 0, a < c < b$

[**Proof :** Since $y = f(x)$ is continuous in the closed interval [a, b], so the function has maximum or minimum or both the values in the interval [a, b]. Let the maximum and minimum values of $y = f(x)$ are M and m respectively. Now $m = M$ or $m \neq M$.

When $m = M$ then $f(x) =$ constant. In this case

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f'(c) = 0, a < c < b]$$

যখন $m \neq M$, তখন (a, b) ব্যবধিতে অন্ততঃপক্ষে একটি বিন্দু $x = c$ থাকিবে যেখানে $f(c) = m$ হয়। অর্থাৎ $x = c$ বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠ মান $f(c)$. [When $m \neq M$, then there exists at least a point c between a and b where $f(c) = m$, that is, $f(c)$ is the minimum value of the function at $x = c$.]

$\therefore \lim_{h\to 0_+} f(c+h) \geq f(c)$ এবং $\lim_{h\to 0_-} f(c+h) \geq f(c)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0_+} f(c+h) - f(c) \geq 0$ $\Rightarrow \lim_{h\to 0_-} f(c+h) - f(c) \geq 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0_+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$ $\Rightarrow \lim_{h\to 0_-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$

$\Rightarrow Rf'(c) \geq 0$ $\Rightarrow Lf'(c) \leq 0$

$\therefore f'(c) = 0,\ a < c < b$ [যেহেতু $f'(c)$ বিদ্যমান।]

আবার (a, b) ব্যবধিতে অন্ততঃপক্ষে একটি বিন্দু $x = c$ থাকিবে যেখানে $f(c) = M$ হয়। অর্থাৎ $x = c$ বিন্দুতে ফাংশনের ঘরিষ্ঠমান $f(c)$. [Again there exists a point $x = c$ in the interval (a, b), where $f(c) = M$, that is, $f(c)$ is the maximum value of the function at $x = c$.]

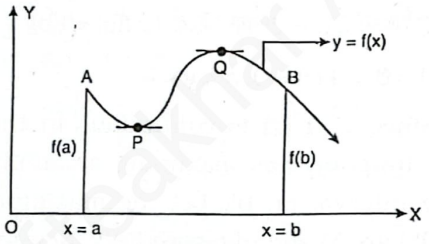
$\therefore \lim_{h\to 0_+} f(c+h) \leq f(c)$ এবং $\lim_{h\to 0_-} f(c+h) \leq f(c)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0_+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ $\Rightarrow \lim_{h\to 0_-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$

$\Rightarrow Rf'(c) \leq 0$ $\Rightarrow Lf'(c) \geq 0$

যেহেতু $f'(c)$ বিদ্যমান। সুতরাং $f'(c) = 0$ হইবে যেখানে $a < c < b$.

5.2. রোলের উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা (Geometrical interpretation of Role's theorem) : [NUH–08, 10, BSc(Pass)–07]



$y = f(x)$ ফাংশনটি [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন, (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য এবং $f(a) = f(b)$. চিত্রে a ও b এর মধ্যে $y = f(x)$ রেখার উপরিস্থ P ও Q যথাক্রমে ফাংশনের লঘিষ্ট ও গরিষ্ঠ বিন্দু। সুতরাং P ও Q বিন্দুতে ফাংশনের স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হইবে অর্থাৎ উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল শূন্য হইবে।

$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$. P ও Q বিন্দুতে।

সুতরাং a ও b এর মধ্যে অন্ততঃপক্ষে x এর এমন একটি মান c পাওয়া যাইবে যেখানে $f'(c) = 0$ হইবে।

[The function $y = f(x)$ is continuous in the closed interval [a, b], differentiable in the open interval (a, b) and $f(a) = f(b)$.

In the figure, $y = f(x)$ have the minimum and maximum values at P and Q between a and b. So the tangents of the function at P and Q will be parallel to x-axis, that is, the slope of the tangents will be zero.

$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$, at the points P and Q.

Therefore, at least a value c of x can be found between a and b where $f'(c) = 0$.]

5.3. গড়মান অথবা মধ্যমান উপপাদ্য (Mean Value Theorem) : [NUH–05, 07, 08, 09, NUH(NM)–02, 04, 06, 08, DUH–04, 07, BSc(Pass)–06, 08, 2010]

যদি $y = f(x)$ ফাংশন (i) [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন (ii) (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য হয়। তবে a ও b এর মধ্যে অন্ততঃপক্ষে x এর এমন একটি মান c পাওয়া যাইবে যেখানে $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$ হয়। [If the function $y = f(x)$ is (i) continuous in the closed interval [a, b], (ii) differentiable in the open interval (a, b), there exists a value c of x between a and b such that $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.]

প্রমাণ ঃ ধরি $F(x) = f(x) + Ax$ ..... (1) একটি সহায়ক ফাংশন। A এইরূপ ইচ্ছামূলক ধ্রুবক যেন $F(a) = F(b)$ হয়।

(1) $\Rightarrow F(a) = f(a) + Aa$ এবং $F(b) = f(b) + Ab$ যেহেতু $F(a) = F(b)$

$\therefore f(a) + Aa = f(b) + Ab \Rightarrow A(b - a) = -f(b) + f(a) \Rightarrow A = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(1) $\Rightarrow F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ $\therefore F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\therefore F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ..... (2) যেখানে $a < c < b$.

যেহেতু $f(x)$ ফাংশন [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য। সুতরাং $F(x)$ ফাংশন [a, b] ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ও (a, b) ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য হইবে। আবার $F(a) = F(b)$. অর্থাৎ $F(x)$ ফাংশন রোলের উপপাদ্যের প্রতিটি শর্ত পালন করে। [Since the function $f(x)$ is continuous in the closed interval [a, b] and differentiable in the open interval (a, b), so the function $F(x)$ will be continuous in the interval [a, b] and differentiable in the interval (a, b). Also $F(a) = F(b)$, so $F(x)$ satisfied all the conditions of Rolle's theorem.]

$\therefore F'(c) = 0, a < c < b \quad \therefore (2) \Rightarrow 0 = f'(c)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$. (প্রমাণিত)

5.4. গড়মান উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা [Geometrical interpretation of Mean value theorem) :

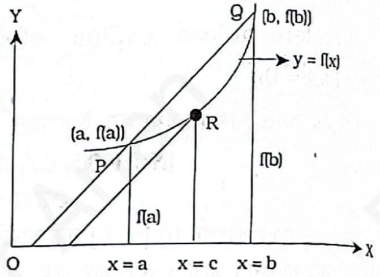
[NUH-2005, 2008, 2010, NUH(NM)-2002, 2004, 2010]

মনে করি $y = f(x)$ রেখার উপরিস্থ P ও Q বিন্দুর ভূজ যথাক্রমে a ও b.

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাংক (a, f(a)) এবং Q বিন্দুর স্থানাংক (b, f(b))

$\therefore$ PQ রেখার ঢাল $= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

যেহেতু ফাংশনটি [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য, কাজেই c ভূজ বিশিষ্ট ফাংশনের উপরিস্থ এইরূপ একটি বিন্দু R পাওয়া যাইবে যেখানে R বিন্দুতে স্পর্শক PQ এর সমান্তরাল হয়।



$\therefore$ R বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল = PQ এর ঢাল

$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

[Let P and Q are two points on the curve $y = f(x)$ whose abscissa are a and b respectively. Then the coordinates of P and Q are (a, f(a)) and (b, f(b)). Slope of the line PQ $= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Since the function is continuous in the closed interval [a, b] and differentiable in the open interval (a, b), so there can be found a point R on the function (curve) whose abscissa is c for which the tangent PQ will be parallel at R.

$\therefore$ Slope of the tangent at R = Slope of PQ

$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

5.5. দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্য (Second Mean value theorem) :

[NUH-2002]

যদি [a, a + h] বদ্ধ ব্যবধিতে f(x) ও f'(x) অবিচ্ছিন্ন এবং (a, a + h) খোলা ব্যবধিতে f''(x) বিদ্যমান থাকে তবে দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্য হইবে [If f(x) and f'(x) are continuous in the closed interval [a, a + h] and f''(x) exists in the open interval (a, a + h) then the second mean value theorem is]

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1$$

প্রমাণ ঃ ধরি, $F(x) = f(x) + (a + h - x) f'(x) + A(a + h - x)^2$ ..... (1)

এখানে A ইচ্ছামূলক ধ্রুবক। A কে এইরূপভাবে নির্বাচিত করা হয়েছে যাতে $F(a + h) = F(a)$ হয়। [Here A is arbitrary which is selected in such a way that $F(a + h) = F(a)$.]

$\Rightarrow f(a + h) + 0 + 0 = f(a) + hf'(a) + Ah^2$

$\Rightarrow f(a + h) = f(a) + hf'(a) + Ah^2$ ..... (2)

(1) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [differentiate (1) w. r. to x]

$F'(x) = f'(x) - f'(x) + (a + h - x) f''(x) - 2A(a + h - x)$

$= (a + h - x) f''(x) - 2A(a + h - x)$ ..... (3)

যেহেতু F(x) ফাংশন [a, a + h] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, a + h) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য এবং F(a) = F(a + h). সুতরাং রোলের উপপাদ্য অনুসারে পাই, [Since F(x) is continuous in the closed interval [a, a + h] and differentiable in the open interval (a, a + h). Also f(a) = f(b) so by Rolle's theorem we get]

$F'(a + \theta h) = 0,\ a < a + \theta h < a + h$

$\Rightarrow (h - \theta h) f''(a + \theta h) = 2A(h - \theta h),\ 0 < \theta h < h$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2} f''(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1$

$(2) \Rightarrow f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ-1. (-1, 1) ব্যবধিতে $f(x) = |x|$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = |x|$ অর্থাৎ $f(x) = \begin{cases} -x \text{ যখন } -1 < x < 0 \\ x \text{ যখন } 0 \le x < 1 \end{cases}$

x = 0 বিন্দুতে $Rf'(0) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{0 + h - 0}{h} = 1$

এবং $Lf'(0) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0_-} \frac{-(0 + h) - 0}{h} = -1$

যেহেতু $Rf'(0) \neq Lf'(0)$ $\therefore$ x = 0 বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

অর্থাৎ (-1, 1) ব্যবধিতে f'(x) বিদ্যমান নয়। সুতরাং (-1, 1) ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য নয়।

উদাহরণ-2. $[0, \pi]$ ব্যবধিতে $f(x) = \tan x$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \tan x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$ বিদ্যমান নয় যেখানে $0 < \frac{\pi}{2} < \pi$

অর্থাৎ $[0, \pi]$ ব্যবধিতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন নয়। সুতরাং $[0, \pi]$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য নয়।

উদাহরণ-3. $(-1, 1)$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^2$

$\therefore f(-1) = (-1)^2 = 1$ এবং $f(1) = 1^2 = 1 \quad \therefore f(-1) = f(1)$

আবার $f(x) = x^2$

$$\therefore Rf'(x) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \left(\frac{2xh + h^2}{h}\right) = \lim_{h\to 0_+} (2x + h) = 2x$$

$$\text{এবং } Lf'(x) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-} (2x + h) = 2x \quad \text{যেহেতু } Rf'(x) = Lf'(x), \forall x$$

$\therefore x$ এর সকল মানের জন্য ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য অর্থাৎ $(-1, 1)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য। আবার কোন ফাংশন কোন বিন্দুতে অন্তরীকরণ যোগ্য হইলে উহা উক্ত বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হইবে। সুতরাং $[-1, 1]$ ব্যবধিতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হইবে।

$\therefore$ ফাংশনটি রোলের উপপাদ্যের সকল শর্ত সিদ্ধ করে।

এখন $f'(x) = 2x \therefore f'(c) = 2c$

$\therefore f'(c) = 0$ হইলে $2c = 0$ বা $c = 0 \quad \therefore -1 \le c < 1$

সুতরাং -1 ও 1 এর মধ্যে একটি বিন্দু $c = 0$ আছে যেখানে $f'(c) = 0$

কাজেই প্রদত্ত ফাংশনে রোলের উপপাদ্যের প্রয়োগ আছে।

উদাহরণ-4. $(-6, 1)$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2 + 5x - 6$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্যের প্রয়োগ যাচাই কর। **[DUH-1989]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^2 + 5x - 6 \cdots\cdots (1)$

$\therefore f(-6) = 36 - 30 = 0, \; f(1) = 1 + 5 - 6 = 0$ সুতরাং $f(-6) = f(1)$

$$\text{এখন } Rf'(x) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{(x+h)^2 + 5(x+h) - 6 - x^2 - 5x + 6}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \left(\frac{2xh + h^2 + 5h}{h}\right) = \lim_{h\to 0_+} (2x + h + 5) = 2x + 5$$

$$\text{এবং } Lf'(x) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-} \frac{(x+h)^2 + 5(x+h) - 6 - x^2 - 5x + 6}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-} (2x + h + 5) = 2x + 5$$

যেহেতু $Rf'(x) = Lf'(x)$, সুতরাং $(-6, 1)$ ব্যবধিতে $f'(x)$ বিদ্যমান। ফলে উক্ত ব্যবধিতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। কারণ প্রত্যেক অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশনই অবিচ্ছিন্ন হয়। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশন রোলের উপপাদ্যের প্রত্যেক শর্ত পালন করে।

কাজেই রোলের উপপাদ্যের শর্তানুসারে $f'(c) = 0$

$$\Rightarrow 2c + 5 = 0 \quad [\because f'(x) = 2x + 5] \Rightarrow c = -\frac{5}{2} \in (-6, 1)$$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনে রোলের উপপাদ্যের প্রয়োগ আছে।

উদাহরণ-5. $(-1, 1)$ ব্যবধিতে $f(x) = x^{2/3}$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্যের প্রয়োগ যাচাই কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^{2/3}$

$$\therefore Rf'(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h^{2/3} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h^{1/3}} = \frac{1}{0} \text{ বিদ্যমান নয়।}$$

$\therefore x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

অর্থাৎ $(-1, 1)$ ব্যবধিতে $f'(x)$ বিদ্যমান নয়।

সুতরাং $(-1, 1)$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য নয়।

উদাহরণ-6. $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{যখন } 1 < x \le 2 \end{cases}$

ফাংশনটির $f(0) = 0 = f(2)$ রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী $(0, 2)$ ব্যবধিতে $f(x)$ এর অন্তরক অন্ততঃ একবার শূন্য হওয়া উচিৎ। কিন্তু উক্ত ব্যবধিতে ইহা কোন বিন্দুতে শূন্য নহে। কেন নয় তাহা ব্যাখ্যা কর। **[BSc(Pass)-2007, DUH-1987]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} x \text{ যখন } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x \text{ যখন } 1 < x \le 2 \end{cases}$

$$\therefore Rf'(1) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{2-(1+h)^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{-h}{h} = -1$$

এবং $Lf'(1) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{1+h-1}{h} = 1$

এখানে $Rf'(1) \neq Lf'(1)$ অর্থাৎ $(0, 2)$ ব্যবধিতে $f'(x)$ বিদ্যমান নয়।

যেহেতু $(0, 2)$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশন রোলের উপপাদ্যের সকল শর্ত সিদ্ধ করে ফলে $(0, 2)$ ব্যবধির কোন বিন্দুতেই $f'(x)$ শূন্য হইবে না।

উদাহরণ–7. $(0, \pi)$ ব্যবধিতে $f(x) = \sin x$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা পরীক্ষা কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \sin x \ \therefore f(0) = 0$ এবং $f(\pi) = 0$

সুতরাং $f(0) = f(\pi)$

এখন $Rf'(x) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$$= \lim_{h\to 0_+} \left(\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x$$

$$\therefore Lf'(x) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x$$

$\therefore Rf'(x) = Lf'(x)$

সুতরাং $(0, \pi)$ ব্যবধিতে $f'(x)$ বিদ্যমান। আবার অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশনই অবিচ্ছিন্ন ফাংশন, সুতরাং $[0, \pi]$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশন অবিচ্ছিন্ন।

প্রদত্ত ফাংশন হইতে পাই $f'(x) = \cos x \ \therefore f'(c) = \cos c$

$\therefore f'(c) = 0$ হইলে $\cos c = 0 \ \therefore c$ এর একটি মান $\frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$

অর্থাৎ c এর একটি মান 0 ও π এর মধ্যে অবস্থিত যেখানে $f'(c) = 0$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য।

উদাহরণ–8. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ব্যবধিতে $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। (Verify Rolle's theorem for $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$ over $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$). **[NUH–2010(Old)]**

সমাধান ঃ $f(x) = 0$ হলে পাই $2x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2(2x+1) - 2(2x+1) = 0 \Rightarrow (2x+1)(x^2-2) = 0$

$\Rightarrow x = -\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{2} \qquad \therefore f(-\sqrt{2}) = f\left(\frac{-1}{2}\right) = f(\sqrt{2}) = 0$

$$Rf'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[2(x+h)^3 + (x+h)^2 - 4(x+h) - 2 - 2x^3 - x^2 + 4x + 2]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[6x^2h + 6xh^2 + 2hx + 2h^3 + h^2 - 4h]$$

$$= \lim_{h\to 0} (6x^2 + 6xh + 2x + 2h^2 + h - 4)$$

$$= 6x^2 + 2x - 4$$

$$Lf'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{h}[2(x-h)^3 + (x-h)^2 - 4(x-h) - 2 - 2x^3 - x^2 + 4x + 2]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{h}[-6x^2h + 6xh^2 - 2h^3 - 2xh + h^2 + 4h]$$

$$= \lim_{h\to 0} [6x^2 - 6xh + 2h^2 + 2x - h - 4]$$

$$= 6x^2 + 2x - 4$$

অতএব, $Lf'(x) = Rf'(x)$, সুতরাং $f'(x) = 6x^2 + 2x - 4$

এখানে $\left(-\sqrt{2}, \frac{-1}{2}\right)$ ও $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ ব্যবধিতে x এর সকল মানের জন্য $f'(x)$ বিদ্যমান। সেহেতু সকল অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হয়, সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি $\left[-\sqrt{2}, \frac{-1}{2}\right]$ ও $\left[-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হবে। দেখা যাচ্ছে প্রদত্ত ব্যবধিতে রোলের উপপাদ্যের সকল শর্ত $f(x)$ ফাংশনের ক্ষেত্রে প্রয়োজ্য হয়। অতএব রোলের উপপাদ্য অনুসারে একটি বিন্দু $c \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ হবে যেন $f'(c) = 0$ হয়।

$$\Rightarrow 6c^2 + 2c - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3c^2 + c - 2 = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{2}{3}, -1$$

এখানে, $-1 \in \left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right)$ এবং $\frac{2}{3} \in \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$. **(Ans)**

উদাহরণ–9. একটি ফাংশন f(x) নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{যখন } -1 < x < 1 \text{ এবং } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

(–1, 1) ব্যবধিতে ফাংশনটির জন্য গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{যখন } -1 < x < 1 \text{ এবং } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{(0+h)\sin\frac{1}{0+h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \sin\frac{1}{h} = \sin\left(\frac{1}{0}\right) \text{ বিদ্যমান নয়।}$$

অর্থাৎ $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।

সুতরাং (–1, 1) ব্যবধিতে $f'(x)$ বিদ্যমান নয়।

∴ ফাংশনটির জন্য গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য নয়।

উদাহরণ–10. ল্যাগরেঞ্জ গড়মান উপপাদ্য $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$ হইতে c এর মান নির্ণয় কর। যদি $f(x) = Ax^2 + Bx + k$; A, B, k ধ্রুবক এবং $A \neq 0$.

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = Ax^2 + Bx + k$

∴ $f(b) = Ab^2 + Bb + k$ এবং $f(a) = Aa^2 + Ba + k$

∴ $f(b) - f(a) = A(b^2 - a^2) + B(b - a)$

এখন $f'(x) = 2Ax + B \Rightarrow f'(c) = 2Ac + B$

গড়মান উপপাদ্য $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

$$\Rightarrow A(b^2 - a^2) + B(b-a) = (b-a)(2Ac + B)$$

$$\Rightarrow A(b+a) + B = 2Ac + B \Rightarrow A(b+a) = 2Ac$$

$$\Rightarrow b + a = 2c \quad \because a \neq 0 \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

উদাহরণ–11. (0, 1) ব্যবধিতে $f(x) = 3 + 2x - x^2$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই কর।

[NUH(NM)–2004, 2006 B.Sc(Pass)–2010, DUH–1988]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = 3 + 2x - x^2$

$$\therefore Rf'(x) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{3 + 2(x+h) - (x+h)^2 - (3 + 2x - x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_+} \frac{2h - 2xh - h^2}{h} = \lim_{h\to 0_+} (2 - 2x - h) = 2 - 2x$$

$$\therefore Lf'(x) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-} \frac{3 + 2(x+h) - (x+h)^2 - (3 + 2x - x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0_-} (2 - 2x - h) = 2 - 2x$$

যেহেতু $Rf'(x) = Lf'(x)$, $\forall x$

সুতরাং x এর সকল মানের জন্য f(x) ফাংশন [0, 1] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (0, 1) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য।

∴ ফাংশনটি গড়মান উপপাদ্যের সকল শর্ত সিদ্ধ করে।

অতএব গড়মান উপপাদ্যের শর্তানুসারে অন্ততঃপক্ষে একটি বিন্দু $c \in (0, 1)$ এর জন্য $f(1) - f(0) = (1-0) f'(c)$ ..... (1) হইবে।

এখন $f(1) = 3 + 2 - 1 = 4$, $f(0) = 3$ এবং $f'(x) = 2 - 2x$ ∴ $f'(c) = 2 - 2c$

∴ (1) $\Rightarrow 4 - 3 = 1(2 - 2c)$ বা $2c = 1$ বা $c = \frac{1}{2}$

যেহেতু $c = \frac{1}{2} \in (0, 1)$; সুতরাং (0, 1) ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশনে গড়মান উপপাদ্য সত্য।

উদাহরণ–12. গড়মান উপপাদ্য $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ হইতে θ এর মান নির্ণয় কর, যখন $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ এবং $h = 3$.

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $f(x) = \sqrt{x}$ ∴ $f(a+h) = \sqrt{a+h}$, $f(a) = \sqrt{a}$

যেহেতু $a = 1$ এবং $h = 3$ ∴ $f(a) = 1$, $f(a+h) = 2$

আবার $f(x) = \sqrt{x}$, ∴ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\therefore f'(a+\theta h) = \frac{1}{2\sqrt{a+\theta h}} = \frac{1}{2\sqrt{1+3\theta}} \quad [\because a = , h = 3]$$

এখন গড়মান উপপাদ্য $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$

$$\Rightarrow 2 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+3\theta}} \Rightarrow 1 = \frac{3}{2\sqrt{1+3\theta}} \Rightarrow \sqrt{1+3\theta} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + 3\theta = \frac{9}{4} \Rightarrow 3\theta = \frac{5}{4} \therefore \theta = \frac{5}{12}$$

উদাহরণ-13. গড়মান উপপাদ্য $f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$ এর ক্ষেত্রে ξ এর মান নির্ণয় কর, যদি $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $b = 9$ হয়। **[NUH(NM)-2007]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi) \cdots\cdots (1)$$

যেখানে $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $b = 9$

$\therefore f(b) = f(9) = 3$, $f(a) = f(4) = 2$

আবার, $f(x) = \sqrt{x}$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

$$(1) \Rightarrow 3 - 2 = (9 - 4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\xi} = 5$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{25}{4}$$

উদাহরণ-14. $f(x) = x^3 - 3x + 2x^2$, $a = 0$, $4 = \frac{1}{2}$ হলে সূত্র $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$ এ θ এর উপযুক্ত মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)-03]**

সমাধান ঃ $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h) \cdots\cdots (1)$

এখানে $a = 0$, $h = \frac{1}{2}$ এবং $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$$\therefore f(a + h) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{8}$$

এবং $f(a) = f(0) = 0$

আবার, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\Rightarrow f'(a + \theta h) = f'\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3\theta^2}{4} - 3\theta + 2$$

$$(1) \Rightarrow \frac{3}{8} = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{3\theta^2}{4} - 3\theta + 2\right)$$

$$\Rightarrow 3 = 3\theta^2 - 12\theta + 8$$

$$\Rightarrow 3\theta^2 - 12\theta + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 60}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{84}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{3}$$

যেহেতু $0 < \theta < 1$, সুতরাং θ এর উপযুক্ত মান $= \frac{6 - \sqrt{21}}{3}$ $\left[\because \frac{6 + \sqrt{21}}{3} > 1\right]$

উদাহরণ-15. $(-1, 1)$ ব্যবধিতে $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা পরীক্ষা কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \frac{1}{x}$ $\therefore f(0) = \frac{1}{0}$, বিদ্যমান নয়।

অর্থাৎ $x = 0$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়।

$\therefore (-1, 1)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন নয়।

সুতরাং ফাংশনটির জন্য প্রদত্ত ব্যবধিতে গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য নয়।

উদাহরণ-16. $(0, 4)$ ব্যবধিতে $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা পরীক্ষা কর। **[NUH-2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

যেহেতু $f(x)$ একটি x এর বহুপদী ফাংশন, কাজেই x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ ফাংশন $[0, 4]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $(0, 4)$ খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য। সুতরাং $f(x)$ ফাংশন গড়মান উপপাদ্যের সকল শর্ত সিদ্ধ করে।

অতএব গড়মান উপপাদ্যের শর্তানুসারে অন্ততঃপক্ষে একটি বিন্দু $c \in (0, 4)$ এর জন্য $f(4) - f(0) = (4 - 0) f'(c) \cdots\cdots (1)$ হইবে।

এখন $f(4) = (4 - 1)(4 - 2)(4 - 3) = 6$, $f(0) = (0 - 1)(0 - 2)(0 - 3) = -6$

প্রদত্ত ফাংশনকে অন্তরীকরণ করে পাই

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 12c + 11$$

$$\therefore (1) \Rightarrow 6 - (-6) = (4 - 0)(3c^2 - 12c + 11) \Rightarrow 3c^2 - 12c + 8 = 0$$

$$\therefore c = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \pm 1.15 = 3.15, .85$$

এখানে $c = 3.15 \in (0, 4)$ এবং $c = .85 \in (0, 4)$

সুতরাং $(0, 4)$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশনে গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য।

উদাহরণ-17. যে কোন সুবিধাজনক শর্তে দেখাও যে অন্ততঃপক্ষে একটি বিন্দু $c \in (a, b)$ এর জন্য $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ \phi(a) & \phi(b) \end{vmatrix} = (b - a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(c) \\ \phi(a) & \phi'(c) \end{vmatrix}$

সমাধান ঃ মনে করি $f(x)$ এবং $\phi(x)$ ফাংশন দুইটি $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য।

সুতরাং গড়মান উপপাদ্য অনুযায়ী অন্ততঃপক্ষে একটি $c \in (a, b)$ বিন্দুর জন্য $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \cdots (1)$ হইবে এবং $\phi(b) - \phi(a) = (b - a) \phi'(c) \cdots (2)$ হইবে।

$$(2) \times f(a) - (1) \times \phi(a)$$

$$\Rightarrow f(a)\phi(b) - \phi(a) f(b) = (b - a)\{f(a)\phi'(c) - \phi(a) f'(c)\}$$

বা $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ \phi(a) & \phi(b) \end{vmatrix} = (b - a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(c) \\ \phi(a) & \phi'(c) \end{vmatrix}$.

উদাহরণ–18. গড়মান উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1}b - \tan^{-1}a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

যখন $a < b$ এবং ইহা হইতে প্রমাণ কর $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25} < \tan^{-1}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$.

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \tan^{-1}x \quad \therefore f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$

গড়মান উপপাদ্যের সাহায্যে পাই $\frac{\tan^{-1}b - \tan^{-1}a}{b-a} = \frac{1}{1+c^2}$ যেখানে $a < c < b$

যেহেতু $c > a \quad \therefore \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$ এবং $c < b \quad \therefore \frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+b^2}$

$$\therefore \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2} \Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{\tan^{-1}b - \tan^{-1}a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1}b - \tan^{-1}a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

দ্বিতীয় অংশ ঃ $b = \frac{4}{3}$ এবং $a = 1 \quad \frac{\frac{4}{3}-1}{1+(4/3)^2} < \tan^{-1}\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4} < \frac{\frac{4}{3}-1}{1+1^2}$

$$\Rightarrow \frac{3}{25} < \tan^{-1}\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4} < \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{3}{25} < \tan^{-1}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}.$$

উদাহরণ–19. গড়মান উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া প্রমাণ কর যে

$$\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} < \frac{ln(1+x)}{\sin^{-1}x} < 1 \text{ যখন } 0 < x < 1 \quad \textbf{[NUH–06, DUH-90]}$$

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = ln(1+x)$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{1+c}$$

গড়মান উপপাদ্যের সাহায্যে পাই $\frac{ln(1+x) - ln\,1}{x-0} = \frac{1}{1+c}$ যেখানে $0 < c < x$

যেহেতু $0 < c$ এবং $c < x$

$$\therefore \frac{1}{1+c} < 1 \qquad \therefore \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{ln(1+x)}{x} < 1 \quad \ldots\ldots (1)$$

আবার ধরি $f(x) = \sin^{-1}x \quad \therefore f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \therefore f'(c_1) = \frac{1}{\sqrt{1-c_1^2}}$

গড়মান উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$$\frac{\sin^{-1}x - \sin^{-1}0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{1-c_1^2}} \text{ যেখানে } 0 < c_1 < x \Rightarrow \frac{x}{\sin^{-1}x} = \sqrt{1-c_1^2}$$

যেহেতু $0 < c_1 < x$

$$\therefore \sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-c_1^2} < 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} < \frac{x}{\sin^{-1}x} < 1 \quad \ldots\ldots (2)$$

(1) ও (2) গুণ করিয়া পাই $\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} < \frac{ln(1+x)}{\sin^{-1}x} < 1$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ–20. $x = a$ বিন্দুতে দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্যের সাহায্যে $f(x) = (x-a)^{7/2}$ ফাংশনের জন্য θ নির্ণয় কর। **[NUH–2003]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = (x-a)^{7/2}$

$$\therefore f'(x) = \frac{7}{2}(x-a)^{5/2} \qquad \therefore f''(x) = \frac{35}{4}(x-a)^{3/2}$$

আমরা জানি, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a+\theta h)$

$$\Rightarrow h^{7/2} = 0 + h.0 + \frac{h^2}{2}\cdot\frac{35}{4}(\theta h)^{3/2}$$

$$\Rightarrow h^{7/2} = \frac{35}{8}h^{7/2}\theta^{3/2} \Rightarrow 1 = \frac{35}{8}\theta^{3/2}$$

$$\Rightarrow \theta^{3/2} = \frac{8}{35} \Rightarrow \theta = \left(\frac{8}{35}\right)^{2/3} \cdot\cdot$$

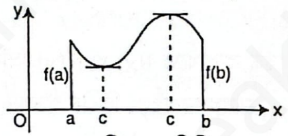
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

5.1. রোলের উপপাদ্যের বর্ণনা দাও। (State the Rolle's theorem.)

Ans : যদি $y = f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন, (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য এবং $f(a) = f(b)$ হয় তবে অন্ততঃ একটি সংখ্যা $c \in (a, b)$ পাওয়া যাইবে যেখানে $f'(c) = 0$.

5.2. রোলের উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা কি? (What is the geometrical interpretation of Rolle's theorem?)

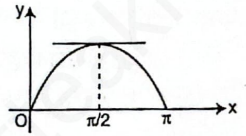
Ans :



$y = f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য এবং $f(a) = f(b)$ হয় তবে (a, b) এর মধ্যে অন্ততঃ একটি বিন্দু c বিদ্যমান থাকে যেখানে স্পর্শক রেখা x অক্ষের সমান্তরাল হয়।

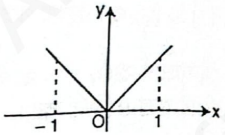
5.3. একটি ফাংশনের উদাহরণ দাও যাহা রোলের উপপাদ্য সিদ্ধ করে। (Give an example of a function which satisfies Rolle's theorem).

Ans : $f(x) = \sin x$ ফাংশন $[0, \pi]$ ব্যবধিতে রোলের উপপাদ্য সিদ্ধ করে। কারণ $[0, \pi]$ ব্যবধিতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন, $(0, \pi)$ ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য এবং $f(0) = f(\pi) = 0$.



5.4. একটি ফাংশনের উদাহরণ দাও যাহা রোলের উপপাদ্য সিদ্ধ করে না। (Give an example of a function which does not satisfy Rolle's theorem.)

Ans : $f(x) = |x|$ ফাংশন $[-1, 1]$ ব্যবধিতে রোলের উপপাদ্য সিদ্ধ করে না। কারণ $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয় অর্থাৎ $(-1, 1)$ ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

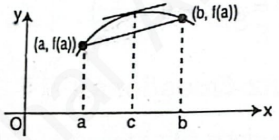


5.5. প্রথম গড়মান বা মধ্যমান উপপাদ্যের বর্ণনা দাও। (State the first mean value theorem.) **[NUH-2010]**

Ans : যদি $y = f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য হয় তবে অন্তত একটি সংখ্যা $c \in (a, b)$ পাওয়া যাইবে, যেখানে $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

5.6. গড়মান উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা কি? (What is the geometrical interpretation of mean value theorem.)

Ans :



$y = f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) খোলাব্যবধিতে অন্তরীকরণ হইলে (a, b) এর মধ্যে অন্তত একটি বিন্দু c পাওয়া যাইবে যেখানে স্পর্শক রেখা $(a, f(a))$ ও $(b, f(b))$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার সমান্তরাল হইবে।

5.7. দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্যের বর্ণনা দাও। (State the second mean value theorem.) **[NUH(NM)-2010]**

Ans : $[a, a + h]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $f(x)$ ও $f'(x)$ অবিচ্ছিন্ন এবং $(a, a + h)$ খোলা ব্যবধিতে $f''(x)$ বিদ্যমান হইলে দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্য হইবে

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1.$$

5.8. দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্যের ন্যায় প্রথম মধ্যমান উপপাদ্যটি লিখ। (Write the first mean value theorem as the second mean value theorem.)

Ans : $[a, a + h]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন এবং $(a, a + h)$ খোলা ব্যবধিতে $f'(x)$ বিদ্যমান হইলে প্রথম গড়মান উপপাদ্য হইবে,

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1.$$

EXERCISE–5

1. একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত
$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{যখন } 0 \le x < 1 \\ x - 1 & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \end{cases}$ $0 \le x \le 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

2. একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{যখন } x = 1 \end{cases}$
$(0, 1)$ ব্যবাধিতে $f(x)$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

3. $(-2, 2)$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

4. $(1, 2)$ ব্যবধিতে $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ ফাংশনের ক্ষেত্রে রোলের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর।

5. $(1, 3)$ ব্যবধিতে $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ ফাংশনে রোলের উপপাদ্যের প্রয়োগ যাচাই কর। **[NUH-2007]**

6. $(0, 2)$ ব্যবধিতে $f(x) = 2 + (x - 1)^{2/3}$ ফাংশনে রোলের উপপাদ্যের প্রয়োগ যাচাই কর।

7. $(-\pi/4, \pi/4)$ ব্যবধির জন্য $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$ ফাংশনে রোলের উপপাদ্যের প্রয়োগ যাচাই কর। **[DUH-2007]**

8. $(0, \pi)$ ব্যবধিতে $f(x) = e^{-x} \sin x$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। **[NUH(NM)-2009]**

9. $(0, 1)$ ব্যবধিতে $f(x) = x^3(1 - x)^2$ ফাংশনে রোলের উপপাদ্যের প্রয়োগ যাচাই কর।

10. $(1, 3)$ ব্যবধিতে $f(x) = ln\left(\frac{x^2 + 3}{4x}\right)$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

11. একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত $f(x) = \begin{cases} -x & \text{যখন } -1 \le x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \end{cases}$
$[-1, 1]$ ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

12. $(0, 1)$ ব্যবধিতে $f(x) = x^2$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্যের c এর মান নির্ণয় কর।

13. $[1, 2]$ ব্যবধিতে $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

14. $[-2, 1]$ ব্যবধিতে $f(x) = x - x^3$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্যটির সত্যতা পরীক্ষা কর।

15. (a, b) ব্যবধিতে $f(x) = Ax^2 + Bx + c$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর। **[NUH-2007]**

16(i) [0, 1/2] ব্যবধিতে $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ফাংশনের জন্য ল্যাগরেঞ্জ গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। **[DUH–2006, BSc(Pass)–2008]**

(ii) [3, 5] ব্যবধিতে $f(x) = e^{-x}$ এর জন্য গড়মান উপপাদ্যটি যাচাই কর।

[NUH(NM)–2008]

17. মধ্যমান উপপাদ্য $f(x+h) = f(x) + h f'(x+\theta h)$ হইতে θ এর মান নির্ণয় কর যখন (i) $f(x) = e^x$ (ii) $f(x) = 1/x$.

18. গড়মান উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া প্রমাণ কর যে $1 - \frac{a}{b} < ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1$ যখন $0 < a < b$ এবং ইহা হইতে প্রমাণ কর $\frac{1}{6} < ln(1.2) < \frac{1}{5}$.

19. যদি $f(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \sin a & \sin b \\ \cos x & \cos a & \cos b \\ \tan x & \tan a & \tan b \end{vmatrix}$, $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে $f'(c) = 0$ যেখানে $a < c < b$.

20. যদি $f(x)$, $g(x)$ এবং $h(x)$ ফাংশনসমূহ $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণ যোগ্য হয়, তবে দেখাও যে

(i) $\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(a) & g(a) & h(a) \end{vmatrix} = 0$ যখন $a < c < b$ (ii) $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

ANSWER–5

1.	প্রযোজ্য নয়	2.	প্রযোজ্য নয়	3.	প্রযোজ্য
4.	সত্য	5.	প্রয়োগ আছে	6.	প্রয়োগ নাই
7.	প্রয়োগ নাই	8.	সত্য	9.	প্রয়োগ আছে
10.	প্রয়োগ আছে	11.	প্রযোজ্য নয়	12.	1/2
13.	প্রযোজ্য	14.	সত্য	15.	প্রযোজ্য
16(i)	সত্য	16(ii)	সত্য		

17.(i) $\frac{1}{h} ln\left(\frac{e^h - 1}{h}\right)$ (ii) $\frac{\sqrt{x(x+h)} - x}{h}$

—×—

Chapter–6

টেলর এবং ম্যাকলরিন উপপাদ্য ও ধারা

TAYLOR'S AND MACLAURIN'S THEOREM AND SERIES

ঐতিহাসিক নোট ঃ বর্তমানে পরিচিত টেলর ও ম্যাকলরিন ধারার প্রথম উদ্ভাবন করেছিলেন স্কটিশ গণিতবিদ জেমস গ্রেগরী (James Gregory). ম্যাকলরিনের জন্ম গ্রহনের দশ বৎসর পূর্বে তিনি $\tan x$, $\sec x$, $\tan^{-1}x$, $\sec^{-1}x$ এর জন্য ম্যাকলরিন ধারা নির্ণয় করেন। এই সময় ফ্লেমিশ গণিতবিদ নিকলাস মারকেটর (Nicolus Mercator) $ln(1+x)$ এর জন্য ম্যাকলরিন ধারা নির্ণয় করেন। ১৭১৫ সালে যখন ইংলিশ গণিতবিদ ব্রুক টেলর (Brook Taylor) বহুল পরিচিত টেলর ধারা প্রতিষ্ঠা করেন তখন তিনি গ্রেগরীর আবিষ্কার সম্বন্ধে জানতেন না। ১৭৪২ সালে স্কটিশ গণিতবিদ কলিন ম্যাকলরিন (Colin Maclaurin) তাঁর ক্যালকুলাস বই লেখার সময় টেলর ধারার উল্লেখ করেন। $x = 0$ প্রতিবেশে টেলর ধারাকে মূলতঃ ম্যাকলরিন ধারা হিসেবে প্রকাশ করা হয়। ইতিহাসে যাহাই ঘটুক না কেন টেলর ও ম্যাকলরিন ছিলেন দীপ্তিমান গণিতবিদ। গণিত তথা বিজ্ঞানে রয়েছে তাঁদের অনেক অবদান।

6.1. ম্যাকলরিন বহুপদী (Maclaurin polynomial) [BSc(Pass)–07]

যদি $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ ফাংশনসমূহ বিদ্যমান হয় তবে n ক্রমের ম্যাকলরিন বহুপদী $P_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$. ম্যাকলরিন বহুপদীর বৈশিষ্ট $x = 0$ বিন্দুতে বহুপদী ও ইহার n তম অন্তরকের মান যথাক্রমে $f(x)$ ও ইহার n তম অন্তরকের মানের সমান হইবে। অর্থাৎ $x = 0$ বিন্দুর সাপেক্ষে $f(x)$ এর আসন্ন মান (approximation) $P_n(x)$.

6.2. টেলর বহুপদী (Taylor polynomial) ঃ [BSc(Pass)–2007]

ম্যাকলরিন বহুপদী কেবলমাত্র $x = 0$ বিন্দুর সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয়। $f(x)$ এর জন্য টেলর বহুপদী x এর ইচ্ছামূলক বিন্দুর সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয়। যদি $x = x_0$ বিন্দুতে $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ ফাংশন সমূহ বিদ্যমান হয় তবে n তম ক্রমের টেলর বহুপদী।

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

টেলর বহুপদীর বৈশিষ্ট্য $x = x_0$ বিন্দুতে বহুপদী ও ইহার n তম অন্তরকের মান যথাক্রমে $f(x)$ ও ইহার n তম অন্তরকের মানের সমান হইবে। অর্থাৎ $x = x_0$ বিন্দুর সাপেক্ষে $f(x)$ এর আসন্ন মান (approximation) $p_n(x)$.

$x = 0$ বিন্দুর সাপেক্ষে $f(x)$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী ও টেলর বহুপদী এই সুতরাং ম্যাকলরিন বহুপদী টেলর বহুপদীর বিশেষ অবস্থা।

$x = x_0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর রৈখিক আসন্ন মান $p_1(x)$, $n = 1$

$x = x_0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর দ্বিঘাত আসন্ন মান $p_2(x)$, $n = 2$

$x = x_0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর কিউবিক আসন্নমান $p_3(x)$, $n = 3$

এইভাবে $x = x_0$ বিন্দুর সাপেক্ষে $f(x)$ এর সাধারণ আসন্ন মান বা n তম ক্রমের আসন্নমান $p_n(x)$.

উপপাদ্য–1. ম্যাকলরিন বহুপদী বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।

বর্ণনা ঃ যদি $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান হয় এবং $f(0) = p_n(0)$, $f'(0) = p_n'(0)$, $f''(0) = p_n''(0)$, $\cdots$ $f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0)$ হয় তবে $x = 0$ বিন্দুর সাপেক্ষে $f(x)$ এর জন্য n তম ক্রমের ম্যাকলরিন বহুপদী হইবে।

$$p_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

প্রমাণ ঃ ধরি n তম ক্রমের যে কোন বহুপদী

$$p_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n \cdots\cdots (1)$$

$$\therefore p_n'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots + nc_nx^{n-1}$$

$$p_n''(x) = 2c_2 + 6c_3x + \cdots + n(n-1)c_nx^{n-2}$$

$$p_n'''(x) = 6c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$p_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1\, c_n = n!\, c_n$$

এখন $f(0) = p_n(0) = c_0$ $\qquad f'(0) = p_n'(0) = c_1$

$f''(0) = p_n''(0) = 2c_2 = 2!\, c_2$ $\qquad f'''(0) = p_n'''(0) = 6c_3 = 3!\, c_3$

$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$

$f^{(n)}(0) = p_n^{(n)}(0) = n!\, c_n$

$$(1) \Rightarrow p_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

উদাহরণ–1. e^x এর জন্য ম্যাকলরিন (Maclaurin) বহুপদী $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ ও $p_3(x)$ নির্ণয় কর এবং e^x সহ বহুপদীগুলি অংকন কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$

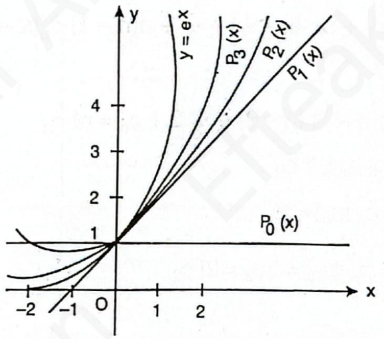
$$\Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$$

এখন $p_0(x) = f(0) = 1$, $p_1(x) = f(0) + xf'(0) = 1 + x$

$$p_2(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$p_3(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

নিম্নে e^x সহ বহুপদীগুলি অংকন করা হইল ঃ



উদাহরণ–2. $\frac{1}{1-x}$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী $p_n(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\Rightarrow f(0) = 1$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2!}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2!$$

$$f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4} \Rightarrow f'''(0) = 3!$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$f^n(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \Rightarrow f^n(0) = n!$$

আমরা জানি $p_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f_n(0)$

$$\Rightarrow p_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n.$$

উপপাদ্য–2. টেলর বহুপদী বর্ণনাসহ প্রমাণ কর।

বর্ণনা ঃ যদি $x = x_0$ বিন্দুতে $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান হয় এবং $f(x_0) = p_n(x_0)$, $f'(x_0) = p_n'(x_0)$, $f''(x_0) = p_n''(x_0)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0)$ হয় তবে $x = x_0$ বিন্দুর সাপেক্ষে $f(x)$ এর জন্য n তম ক্রমের টেলর বহুপদী হইবে

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

প্রমাণ ঃ ধরি $x - x_0$ শক্তি ধারায় n তম ক্রমের যে কোন বহুপদী

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\therefore p_n'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \cdots + nc_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$p_n''(x) = 2c_2 + 6c_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)\, c_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$p_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1\, c_n = n!\, c_n$$

এখন $f(x_0) = p_n(x_0) = c_0$

$$f'(x_0) = p_n'(x_0) = c_1$$

$$f''(x_0) = p_n''(x_0) = 2c_2 = 2!\, c_2$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0) = n!\, c_n$$

$$(1) \Rightarrow p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

উদাহরণ–3. $x = 2$ বিন্দুর সাপেক্ষে $ln\, x$ এর জন্য প্রথম চারটি টেলর (taylor) বহুপদী নির্ণয় কর এবং $ln\, x$ সহ বহুপদীগুলি অংকন কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = ln\, x \quad \Rightarrow f(2) = ln\, 2$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow f'''(2) = \frac{1}{4}$$

এখন প্রথম টেলর বহুপদী $p_0(x) = f(2) = ln\, 2$

দ্বিতীয় টেলর বহুপদী $p_1(x) = f(2) + (x - 2) f'(2) = ln\, 2 + \frac{1}{2}(x - 2)$

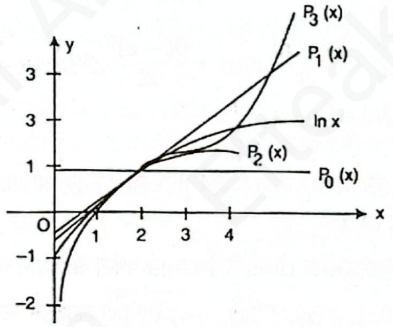
তৃতীয় টেলর বহুপদী $p_2(x) = f(2) + (x - 2) f'(2) + \frac{(x - 2)^2}{2!} f''(2)$

$$= ln\, 2 + \frac{x - 2}{2} - \frac{1}{8}(x - 2)^2$$

চতুর্থ টেলর বহুপদী $p_3(x) = f(2) + (x - c) f'(2) + \frac{(x - 2)^2}{2!} f''(2) + \frac{(x - 2)^3}{3!} f''(2)$

$$= ln\, 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2 + \frac{1}{24}(x - 2)^3.$$

নিম্নে $ln\, x$ সহ বহুপদীগুলি অংকন করা হইল।



উদাহরণ–4. $(x - 1)$ শক্তি ধারায় e^x এর জন্য n তম টেলর বহুপদী নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^n(x) = e^x$

$$\Rightarrow f'(1) = f''(1) = f'''(1) = \cdots = f^n(1) = e$$

আমরা জানি n তম টেলর বহুপদী

$$p_n(x) = f(1) + (x - 1) f'(1) + \frac{(x - 1)^2}{2!} f''(1) + \cdots + \frac{(x - 1)^n}{n!} f^n(1)$$

$$= e\left[1 + (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x - 1)^n}{n!}\right].$$

6.3. টেলর উপপাদ্য (Taylor's theorem) ঃ $x = a$ বিন্দুর সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের n তম টেলর বহুপদী বা $x = a$ বিন্দুর সাপেক্ষে $f(x)$ এর আসন্ন মান

$$p_n(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$f(x)$ ফাংশন ও টেলর বহুপদী $p_n(x)$ এর পার্থক্য $R_n(x)$ হইলে

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) \Rightarrow f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - a)^k}{k!} f^k(a) + R_n(x)$$

ইহা অবশেষসহ টেলর উপপাদ্য বা সসীম ধারায় টেলর উপপাদ্য। এখানে $R_n(x)$ ধারার $(n + 1)$ সংখ্যক পদের পর অবশেষ (remainder).

6.4. টেলর ধারা (Taylor's Series) [BSc(Pass)-2007]

যদি $n \to \infty$ এর জন্য $R_n(x) \to 0$ হয় তবে টেলর বহুপদী $f(x)$ এর সহিত অভিসারী হইবে। এইক্ষেত্রে টেলর উপপাদ্যকে টেলর ধারা বা টেলর অনন্ত ধারা বলা হয়।

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots \text{ কে টেলর ধারা বলা হয়}$$

যেখানে $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

যখন $x = 0$ হয় তখন টেলর উপপাদ্য বা টেলর ধারাকে ম্যাকলরিন উপপাদ্য বা ম্যাকলরিন ধারা বলা হয়।

উপপাদ্য-3. অবশেষসহ টেলর উপপাদ্যের বর্ণনা ও প্রমাণ দাও।

বর্ণনা ঃ যদি $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ ফাংশন সমূহ $a < x < b$ ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য হয় তবে টেলরের উপপাদ্য

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n$$

যেখানে $R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$, $a < c < b$ $\cdots$ n ক্রমের অবশেষ বা ধারার $(n+1)$ সংখ্যক পদের পর অবশেষ।

প্রমাণ ঃ $x = a$ বিন্দুর সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের জন্য টেলর বহুপদী $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$. এখানে $p_n(x)$ ও ইহার n তম অন্তরক সহগ যথাক্রমে $f(x)$ ও ইহার n তম অন্তরক সহগ $x = a$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

সুতরাং $k(x-a)^{n+1}$ পদটি টেলর বহুপদী সহিত যোগ করলেও শর্তটি বিদ্যমান থাকবে। এইক্ষেত্রে নতুন ফাংশন $\phi_n(x) = p_n(x) + k(x-a)^{n+1}$, k যে কোন ধ্রুবক। k এর মান এইরূপভাবে নির্বাচিত করা হয়েছে যাতে $f(b) = \phi_n(b)$ হয়।

$$\Rightarrow f(b) = p_n(b) + k(b-a)^{n+1} \Rightarrow k = \frac{f(b) - p_n(b)}{(b-a)^{n+1}} \quad \cdots\cdots (1)$$

যদি $a \le x \le b$ এর জন্য $f(x)$ ও $\phi_n(x)$ ফাংশনের পার্থক্য $F(x)$ হয় অর্থাৎ $F(x) = f(x) - \phi_n(x)$ হয় তবে $F(a) = F(b) = 0$ এবং $F(x)$, $F'(x)$ ফাংশন সমূহ $[a, b]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হইবে। রোলের উপপাদ্য অনুসারে $F'(c_1) = 0$ যেখানে $a < c_1 < b$

আবার $F'(a) = F'(c_1) = 0$ এবং $F'(x)$, $F''(x)$ ফাংশন $[a, c_1]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore F''(c_2) = 0$ যেখানে $a < c_2 < c_1$

এইভাবে পর্যায়ক্রমে রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া পাই

$F'''(c_3) = 0$ যেখানে $a < c_3 < c_2$

$F^{iv}(c_4) = 0$ যেখানে $a < c_4 < c_3$

... ...

$F^{(n)}(c_n) = 0$ যেখানে $a < c_n < c_{n-1}$

এখন $F^n(x)$ ফাংশন $[a, c_n]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, c_n) ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য এবং $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$

$\therefore F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$ যেখানে $a < c_{n+1} < c_n$

$F(x) = f(x) - \phi_n(x)$ কে $(n+1)$ সংখ্যক বার অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - k(n+1)!$ $\because \phi_n(x) = p_n(x) + k(x-a)^{n+1}$

$\Rightarrow F^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - k(n+1)!$ $\Rightarrow \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\{\phi_n(x)\} = 0 + k(n+1)!$

যেখানে $c = c_{n+1} \in (a, b)$

$\Rightarrow 0 = f^{n+1}(c) - k(n+1)! \Rightarrow k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$

$\Rightarrow \frac{f(b) - p_n(b)}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ [(1) এর সাহায্যে]

$\Rightarrow f(b) = p_n(b) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$, $a < c < b$

$$\Rightarrow f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(n-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),\ a < c < b$$

নোট ঃ (1) টেলর বহুপদী $(n-1)$ ক্রমের হইলে অর্থাৎ অবশেষ ধারার n তম পদের পর হইলে

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c) \text{ যেখানে } a < c < b.$$

(2) যদি a কে ধারণ করিয়া কোন খোলা ব্যবধি I এর জন্য $f(x)$ এর সকল ক্রমের অন্তরক বিদ্যমান হয় তবে $x \in I$ এর জন্য বা $b = x$ বসিয়ে

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c) \text{ যেখানে } a < c < x$$

(3) $a = 0$ বসিয়ে $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(x-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c)$, যেখানে $0 < c < x$.

ইহা ম্যাকলরিন উপপাদ্য।

(4) (1) এ $b = a + h$ বসিয়ে $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c) \quad \text{যেখানে } a < c < a + h$$

(5) $c = a + h\theta$ হইলে $a < a + h\theta < a + h$ হইবে $\Rightarrow 0 < \theta < 1$

$$\therefore f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h) \quad \text{যেখানে } 0 < \theta < 1$$

এখানে $R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$ কে n পদের পর ল্যাগ্রাঞ্জ (Lagrainge) আকারের অবশেষ বলা হয়।

উপপাদ্য–4. (i) সলমিস এবং রসির আকারের অবশেষসহ (ii) কসির আকারের অবশেষসহ এবং (iii) ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষসহ টেলর উপপাদ্যের বর্ণনা ও প্রমাণ দাও। [State and prove Taylor's theorem with (i) Schlomilch and Roche's form remainders (ii) Cauchy's form of remainder and (iii) Lagrange's form of remaindes]

[NUH–03, 04, 07, 2010, NUH(NM)–02, 2009, BSc(Pass)–07]

বর্ণনা ঃ যদি $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ ফাংশনগুলি $[a, a + h]$ বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং $f^{(n)}(x)$ ফাংশনটি $(a, a + h)$ খোলা ব্যবধিতে বিদ্যমান থাকে তবে টেলরের উপপাদ্য হইবে [If the functions $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ are continuous in the closed interval $[a, a + h]$ and $f^{(n)}(x)$ exists in the open interval $(a, a + b)$ then the Taylor's theorem is]

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

এখন $R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-m}}{m(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$ সলমিস ও রসির আকারে অবশেষ।

প্রমাণ ঃ (i) ধরি $F(x) = f(x) + (a + h - x) f'(x) + \frac{(a + h - x)^2}{2!} f''(x) + \cdots$

$$+ \frac{(a + h - x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + k(a + h - x)^m \cdots\cdots (1)$$

ধ্রুবক k এইরূপভাবে নির্বাচিত করা হইয়াছে যাহাতে $F(a) = F(a + h)$ হয়। [The constant k is considered in such a way for which $F(a) = F(a + h)$.]

(1) এ $x = a$ বসিয়ে

$$F(a) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + kh^m$$

আবার (1) এ $x = a + h$ বসিয়ে $F(a + h) = f(a + h)$ সেহেতু $F(a) = F(a + h)$

$$\Rightarrow f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + kh^m \cdots\cdots (2)$$

(1) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$F'(x) = f'(x) - f'(x) + (a + h - x) f''(x) - (a + h - x) f''(x) + \cdots$$

$$- \frac{(a + h - x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(a + h - x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x) - km(a + h - x)^{m-1}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{(a + h - x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - km(a + h - x)^{m-1} \cdots\cdots (3)$$

যেহেতু $F(x)$ ফাংশন $[a, a + h]$ বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $(a, a + h)$ খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য এবং $F(a) = F(a + h)$. সুতরাং রোলের উপপাদ্য অনুসারে পাই [Since the function $F(x)$ is continuous in the closed interval $[a, a + h]$, differentiable in the open interval $(a, a + h)$ and $F(a) = F(a + h)$, so by Rolle's theorem we get]

$F'(a + \theta h) = 0$ যেখানে $a < a + \theta h < a + h \Rightarrow 0 < \theta < 1$

$$(3) \Rightarrow F'(a + \theta h) = 0 = \frac{(a + h - a - \theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

$$- km(a + h - a - \theta h)^{m-1}$$

$$\Rightarrow k = \frac{(h - \theta h)^{n-m}}{m(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

$$\Rightarrow k = \frac{h^{n-m}(1-\theta)^{n-m}}{m(n-1)!} f^n(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1$$

$$(2) \Rightarrow f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \cdots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n(1-\theta)^{n-m}}{m(n-1)!} f^n(a + \theta h) \quad \text{যেখানে } 0 < \theta < 1.$$

(ii) $m = 1$ হইলে পাই

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1$$

ইহা কসি (Cauchy) আকারের অবশেষসহ টেলরের উপপাদ্য।

(iii) $m = n$ হইলে পাই $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h) \text{ যেখানে } 0 < \theta < 1$$

ইহা ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষসহ টেলরের উপপাদ্য।

নোট ঃ (i) $a = 0$ হইলে টেলর উপপাদ্যের এই বিশেষ অবস্থাকে ম্যাকলরিণ উপপাদ্য বলা হয়।

(ii) ল্যাগ্রাঞ্জ আকারের অবশেষসহ টেলর উপপাদ্যে $n = 1$ বসাইলে প্রথম গড়মান উপপাদ্য এবং $n = 2$ বসাইলে দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্য পাওয়া যাবে।

6.5. টেলর ধারা এবং ম্যাকলরিন ধারার ব্যর্থতা (Failures of Taylor's series and Maclaurin series) ঃ $f(x)$ ফাংশনের জন্য নিম্নের কোন শর্ত প্রযোজ্য হইলে টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে $f(x)$ এর বিস্তৃতি সম্ভব নয়।

(i) যদি $f(x)$ অথবা ইহার যে কোন ক্রমের অন্তরক সহগ অসীম হয়।

(ii) যদি $f(x)$ অথবা ইহার যে কোন ক্রমের অন্তরক সহগ বিচ্ছিন্ন হয়।

(iii) যদি $\lim_{n\to\infty} R_n \neq 0$ অর্থাৎ $\lim_{n\to\infty} \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h) \neq 0$ হয়

অথবা $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$ ধারাটি অপসারী (divergent) হয়।

অনুরূপভাবে $f(x)$ ফাংশনের জন্য নিম্নের কোন শর্ত সত্য হইলে উহাকে ম্যাকলরিণের উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তার করা সম্ভব নয়।

(i) যদি $f(0)$ অথবা $f'(0), f''(0), \cdots, f^{(n)}(0)$, ইহাদের যে কোনটি মান অসীম হয়।

(ii) যদি $f(x)$ অথবা ইহার যে কোন ক্রমের অন্তরক সহগ বিচ্ছিন্ন হয় এবং

(iii) $\lim_{n\to\infty} R_n \neq 0$ অর্থাৎ $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x) \neq 0$ হয়

অথবা $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$ ধারাটি অপসারী হয়।

6.6. টেলর উপপাদ্যের n তম অবশেষ (remainder) নির্ণয়ের সূত্র ঃ

[BSc(Pass)–2007]

ধরি $x = x_0$ কে ধারণকারী যে কোন ব্যবধি I. যদি $\forall x \in I$ এর জন্য $f(x)$ ফাংশন $(n+1)$ সংখ্যকবার অন্তরীকরণ যোগ্য এবং $|f^{n+1}(x)| \leq M$ হয় যেখানে M যে কোন ধনাত্মক ধ্রুবক সংখ্যা তবে $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$.

নোট ঃ x এর যে কোন মানের জন্য $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$

ধরি $u_n = \frac{|x|^n}{n!} \Rightarrow \frac{u^n}{u_{n-1}} = \frac{|a|}{n}$

যদি n এইরূপ বৃহত্তর হয় যে $n > 2|a|$ এবং ধরি $N = 2|a| + 1$ তবে

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < \frac{1}{2}, \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < \frac{1}{2}, \cdots, \frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{1}{2}$$

অসমতাগুলি গুন করিয়া পাই $\frac{u_n}{u_N} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \Rightarrow u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$

যেহেতু $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = 0$. সুতরাং $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$

নোট ঃ কতকগুলি ফাংশনের n তম অন্তরক সহগ এর সূত্র।

(i) $\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m = \frac{m!\, a^n}{(m-n)!}(ax+b)^{m-n}$

(ii) $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{(-1)^n\, n!\, a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

(iii) $\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}) = a^n e^{ax}$ (iv) $\frac{d^n}{dx^n}(a^x) = a^x (\ln a)^n$

(v) $\frac{d^n}{dx^n}(\sin ax) = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$

(vi) $\frac{d^n}{dx^n}(\cos ax) = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$

(vii) $\frac{d^n}{dx^n}\{\ln(a+x)\} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(a+x)^n}$

(viii) $\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}\sin bx) = (a^2+b^2)^{n/2} e^{ax} \sin\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

(ix) $\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}\cos bx) = (a^2+b^2)^{n/2} e^{ax} \cos\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

(x) $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right) = \frac{(-1)^n\, n!}{a^{n+2}} \sin^{n+1}\left(\cot^{-1}\frac{x}{a}\right) \sin\left\{(n+1)\cot^{-1}\frac{x}{a}\right\}$

(xi) $\frac{d^n}{dx^n}(\tan^{-1}x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\sin^n(\cot^{-1}x)\sin(n\cot^{-1}x)$

(xii) $\frac{d^n}{dx^n}(\cot^{-1}x) = (-1)^n(n-1)!\sin^n(\cot^{-1}x)\sin(n\cot^{-1}x)$.

উদাহরণ–**5.** কোন শর্তে $(x-a)$ ক্রম উচ্চ শক্তি ধারায় $f(x)$ এর জন্য টেলর অনন্ত ধারা নির্ণয় করা যায়। $(x-1)$ ক্রম উচ্চ শক্তি ধারায় e^x এর জন্য টেলর অনন্ত ধারা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ টেলর উপপাদ্য হইতে পাই

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)),\ 0<\theta<1$$

যদি f(x) এর সকল ক্রমের অন্তরক সহগ বিদ্যমান হয় এবং $\lim_{n\to\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta x) = 0$ হয় তবে f(x) এর জন্য টেলর অনন্ত (infinite) ধারা নির্ণয় করা যায়।

দ্বিতীয় অংশ ঃ $f(x) = e^x \Rightarrow f(1) = f'(1) = f''(1) = \cdots = f^{(n-1)}(1) = e$

এখন $R_n = \frac{(x-1)^n}{n!} f^{(n)}(1+\theta x) = \frac{(x-1)^n}{n!} e^{1+\theta x}$

যেহেতু $\lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^n}{n!} = 0$. সুতরাং $n \to \infty$ এর জন্য $R_n = 0$

আমরা জানি $(x-1)$ ক্রম উচ্চ শক্তি ধারায় $f(x)$ এর টেলর অনন্ত ধারা

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} f''(1) + \cdots$$

$$\Rightarrow e^x = e\left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots\right].$$

উদাহরণ–6. $x = 0$ প্রতিবেশে $ln(1+x)$ এর জন্য টেলর ধারা নির্ণয় কর।

অথবা $ln(1+x)$ এর জন্য ম্যাকলরিন ধারা নির্ণয় কর।

অথবা প্রমাণ কর $ln(1+x)$ এর ম্যাকলরিন ধারা $-1 < x \le 1$ ব্যবধিতে অভিসারী (convergent). **[NUH-2002]**

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষ $R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1$

$$= R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{(1+\theta x)^n},\ 0 < \theta < 1 \Rightarrow |R_n| = \frac{1}{n}\left|\frac{x}{1+\theta x}\right|^n,\ 0 < \theta < 1$$

যখন $0 < x \le 1$ তখন $\left|\frac{x}{1+\theta x}\right| < 1 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$

আবার, কসির আকারের অবশেষ

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(\theta x) = \frac{(-1)^n x^n (1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n} - 1 < x < 0 \text{ এর জন্য}$$

$$|R_n| = \frac{1}{1-\theta} \cdot \left|\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right|^n$$

$$|x-\theta x| = |-x+\theta x| < |1+\theta x| \quad \therefore \left|\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right| < 1$$

সুতরাং $\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$

$\therefore$ আমরা জানি $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots$

$\Rightarrow ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$ যাহা $-1 < x \le 1$ এর জন্য সত্য।

উদাহরণ–7. $\sin x$ কে অসীম ধারায় বিস্তার কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$

$f^{iv}(x) = \sin x \Rightarrow f^{iv}(0) = 0$

$f^{v}(x) = \cos x \Rightarrow f^{v}(0) = 1$

এখন ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষ

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1$$

$$= \frac{x^n}{n!} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right) \quad \Big| \quad \because f(x) = \sin x$$

$$\therefore |R_n| = \frac{|x|^n}{n!}\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right)\right| \quad \Big| \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

$$\therefore |R_n| = \frac{|x|^n}{n!}\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right)\right|$$

$\Rightarrow |R_n| \le \frac{|x|^n}{n!}$ যখন $n \to \infty$ তখন $\lim_{n\to\infty} (R_n) \le 0 \Rightarrow R_n = 0$

সুতরাং টেলরের উপপাদ্যের সাহায্য $\sin x$ এর বিস্তার বিদ্যমান। যেখানে নির্ণেয় অসীম ধারা $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots$

$$\Rightarrow \sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + \cdots \Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

উদাহরণ–8. $x = 0$ বিন্দুর প্রতিবেশে $\cos x$ এর জন্য টেলর অনন্ত ধারা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = 1$

$\therefore f'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \quad \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \quad \Rightarrow f'''(0) = 0$

$f^{iv}(x) = \cos x \quad \Rightarrow f^{iv}(0) = 1$

... ...

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f^{(n)}(0x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right)$$

এখন $R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) = \frac{x^n}{n!} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right)$

$$\therefore |R_n| = \frac{|x|^n}{n!}\left|\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right)\right| \le \frac{|x|^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |R_n| \le 0 \Rightarrow R_n = 0$$

সুতরাং $\cos x$ এর জন্য টেলর অনন্ত ধারা বিদ্যমান, যেখানে নির্ণেয় ধারা

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots \Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

উদাহরণ–9. $(x-2)$ শক্তি ধারায় $5x^2 + 7x + 3$ এবং $x^3 + 2x^2 - 1$ কে বিস্তার কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = 5x^2 + 7x + 3$

$\Rightarrow f'(x) = 10x + 7,\ f''(x) = 10,\ f'''(x) = 0$

$\Rightarrow f(2) = 37,\ f'(2) = 27,\ f''(2) = 10$

$f'''(2) = f^{iv}(2) = f^{v}(2) = \cdots = 0$

টেলর উপপাদ্য হইতে জানি $(x-2)$ শক্তি ধারায় $f(x)$ এর বিস্তার

$$f(x) = f(2) + (x-2)f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}f''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!}f'''(2) + \cdots$$

$\Rightarrow 5x^2 + 7x + 3 = 37 + 27(x-2) + 5(x-2)^2$

দ্বিতীয় অংশ ঃ ধরি $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x \quad \Rightarrow f(2) = 15$

$f''(x) = 6x + 4 \quad f'(2) = 20$

$f'''(x) = 6 \quad f''(2) = 16$

$f'''(2) = 6$

এখন $f(x) = f(2) + (x-2)f'(x) + \frac{(x-2)^2}{2!}f''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!}f'''(2) + \cdots$

$\Rightarrow x^3 + 2x^2 - 1 = 15 + 20(x-2) + 8(x-2)^2 + (x-2)^3.$

উদাহরণ–10. দেখাও যে $x^{3/2}$ এর জন্য ম্যাকলরিন অনন্ত ধারা বিদ্যমান নয়। আরও দেখাও $n = 2$ এর জন্য ম্যাকলরিন সসীম ধারা বিদ্যমান, এইক্ষেত্রে θ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow f''(0) = \frac{1}{0}, \text{ বিদ্যমান নয়।}$$

সুতরাং $x^{3/2}$ এর জন্য ম্যাকলরিন অনন্ত ধারা $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots$, বিদ্যমান নয়।

দ্বিতীয় অংশ ঃ $n = 2$ এর জন্য ম্যাকলরিন সসীম ধারা

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(\theta x),\ 0 < \theta < 1 \cdots\cdots (1)$$

এখানে $f(x) = x^{3/2} \quad \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} \quad \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}} \quad \Rightarrow f''(\theta x) = \frac{3}{4\sqrt{\theta x}}$

$$(1) \Rightarrow x^{3/2} = 0 + 0 + \frac{x^2}{2!}\cdot\frac{3}{4\sqrt{\theta x}} \Rightarrow x^{3/2} = \frac{3x^2}{8\sqrt{\theta x}}$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{\theta x} = 3\sqrt{x} \Rightarrow \theta = \frac{9}{64}$$

সুতরাং $x^{3/2}$ এর জন্য ম্যাকলরিন ধারা $(n = 2)$ বিদ্যমান যখন $\theta = \frac{9}{64}$.

উদাহরণ–11. ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ $e^{ax}\cos bx$ এর জন্য সসীম ম্যাকলরিন ধারা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = e^{ax}\cos bx \Rightarrow f(0) = 1$

$$\Rightarrow f^n(x) = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{ax}\cos\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f'(0) = (a^2 + b^2)^{1/2}\cos\left(\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

$$f''(0) = (a^2 + b^2)\cos\left(2\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

... ...

$$f^{(n-1)}(0) = (a^2 + b^2)^{(n-1)/2}\cos\left\{(n-1)\tan^{-1}\frac{b}{a}\right\}$$

$$f^n(\theta x) = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{a\theta x}\cos\left(b\theta x + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

আমরা জানি, ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ সসীম ম্যাকলরিণ ধারা

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^n(\theta x),\ 0 < \theta < 1$$

$$\Rightarrow e^{ax}\cos bx = 1 + x(a^2+b^2)^{1/2}\cos\left(\tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + \frac{x^2}{2!}(a^2+b^2)\cos\left(2\tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}(a^2+b^2)^{n-1/2}\cos\left\{(n-1)\tan^{-1}\frac{b}{a}\right\} + \frac{x^n}{n!}(a^2+b^2)^{n/2}e^{a\theta x}\cos\left(b\theta x + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right).$$ যেখানে $0<\theta<1$

উদাহরণ–12. $e^x \sin x$ এর জন্য $x = 0$ প্রতিবেশে ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ সসীম টেলর ধারা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = e^x \sin x \Rightarrow f(0) = 0$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = 2^{n/2}e^x \sin(x + n\tan^{-1}1) = 2^{n/2}e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f'(0) = 2^{1/2}e^0 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ f''(0) = 2e^0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$f'''(0) = 2^{3/2}e^0 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$$

... ...

$$f^{(n-1)}(0) = 2^{(n-1)/2}\sin\left\{\frac{(n-1)\pi}{4}\right\}$$

$$f^{(n)}(\theta x) = 2^{n/2}e^{\theta x}\sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

আমরা জানি $x = 0$ প্রতিবেশে ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ সসীম টেলর ধারা

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$ যেখানে $0<\theta<1$

$$\Rightarrow e^x \sin x = x + 2.\frac{x^2}{2!} + 2.\frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{(n-1)/2}\sin\left\{\frac{(n-1)\pi}{4}\right\} + 2^{n/2}e^{\theta x}\sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{4}\right),\ 0<\theta<1.$$

উদাহরণ–13. $\tan^{-1}x$ এর জন্য x ক্রম শক্তি ধারায় ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–2009]**

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \tan^{-1}x$

আমরা জানি x ক্রম শক্তি ধারায় ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x),\ 0<\theta<1 \cdots (1)$$

এখন $f(x) = \tan^{-1}x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow f'''(0) = -2$

... ...

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\sin^n(\cot^{-1}x)\sin(n\cot^{-1}x)$

$\Rightarrow f^{(n)}(\theta x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\sin^n(\cot^{-1}\theta x)\sin(n\cot^{-1}\theta x)$

$(1) \Rightarrow \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\sin^n(\cot^{-1}\theta x)\sin(n\cot^{-1}\theta x).$

উদাহরণ–14. $\sin x$ এর জন্য $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ক্রম উচ্চ শক্তি ধারায় ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা নির্ণয় কর। **[NUH–2003, NUH(NM)–2006]**

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \sin x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f^{iv}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

... ...

$$f^{(n-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \theta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

যেখানে $0 < \theta < 1$

আমরা জানি $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ক্রম উচ্চ শক্তি ধারায় ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+\cdots+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n}{n!}f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

যেখানে $0<\theta<1$.

$$\Rightarrow \sin x=1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}-\cdots$$
$$+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n}{n!}\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\theta\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$ যেখানে $0<\theta<1$.

উদাহরণ–15. $\cos x$ কে $x-\frac{\pi}{2}$ এর শক্তি ধারায় বিস্তৃত কর। **[NUH-2005]**

সমাধান ঃ আমরা জানি, $x-\frac{\pi}{2}$ এর শক্তি ধারায় $f(x)$ এর বিস্তৃতি

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{(x-\pi/2)^2}{2!}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cdots\cdots (1)$$

এখানে, $f(x)=\cos x$

$$\therefore f^{(n)}(x)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-1$$
$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$$
$$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1$$
$$f^{iv}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$$
$$f^{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-1$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$(1)\Rightarrow \cos x=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!}+\cdots$$

উদাহরণ–16. $\cos^2x$ এর জন্য $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ক্রম উচ্চ শক্তি ধারায় ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x)=\cos^2x \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\Rightarrow f^n(x)=2^{n-1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}+2x\right)$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=2^2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=4$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$f^{(n-1)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=2^{n-2}\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2^{n-2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2^{n-1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+2\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right),\ 0<\theta<1$$

আমরা জানি $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ক্রম উচ্চশক্তি ধারার ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cdots$$
$$+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\ 0<\theta<1$$

$$\Rightarrow \cos^2x=\frac{1}{2}-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2^2\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}-\cdots$$
$$+2^{n-2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}}{(n-1)!}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+2^{n-1}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+2\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$
$$0<\theta<1$$

উদাহরণ–17. টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+c)^5},\ 0 < c < x.$$

[NUH–2006, DUH-1986]

সমাধান ঃ ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষসহ টেলর উপপাদ্য হইতে পাই

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{iv}(0) + \frac{x^5}{5!}f^{v}(c) \ldots\ldots (1)$$

যেখানে $0 < c < x$

এখানে $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$

$f^{iv}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \Rightarrow f^{iv}(0) = -6$

$f^{v}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \Rightarrow f^{v}(c) = \frac{24}{(1+c)^5}$

$$(1) \Rightarrow \ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + 2.\frac{x^3}{3!} - 6.\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\cdot\frac{24}{(1+c)^5}$$

যেখানে $0 < c < x$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+c)^5},\ 0 < c < x.$$

উদাহরণ–18. টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর।

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}e^c \sin c,\ 0 < c < x.$$

সমাধান ঃ $x = 0$ বিন্দুর প্রতিবেশে ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ টেলর উপপাদ্য হইতে পাই

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{iv}(c),\ 0 < c < x \ldots\ldots (1)$$

এখানে $f(x) = e^x \sin x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \sqrt{2}\,e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = (\sqrt{2})^2 e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) \Rightarrow f''(0) = 2$

$f''(x) = (\sqrt{2})^2 e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) \Rightarrow f''(0) = 2$

$f'''(x) = (\sqrt{2})^3 e^x \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow f'''(0) = 2$

$f^{iv}(x) = (\sqrt{2})^4 e^x \sin\left(x + \frac{4\pi}{4}\right)$

$= 4e^x \sin(\pi + x) = -4e^x \sin x \Rightarrow f^{iv}(c) = -4e^c \sin c.$

$(1) \Rightarrow e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!}(-4e^c \sin c),\ 0 < c < x.$

$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}e^c \sin c,\ 0 < c < x.$

উদাহরণ–19. সলমিস ও রসির অবশেষসহ $\sin(x+h)$ এর জন্য h এর শক্তি ধারায় টেলর সসীম ধারা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আমরা জানি, সলমিস ও রসির অবশেষসহ $f(x+h)$ এর জন্য h এর শক্তি ধারায় টেলর সসীম ধারা

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!m}f^n(x+\theta h),\ 0 < \theta < 1 \ldots\ldots (1)$$

এখানে $f(x+h) = \sin(x+h) \Rightarrow f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$$\Rightarrow f''(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right), \cdots, f^{(n-1)}(x) = \sin\left\{\frac{(n-1)\pi}{2} + x\right\}$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f^{(n)}(x+\theta h) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x + \theta h\right)$$

$$(1) \Rightarrow \sin(x+h) = \sin x + h\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \frac{h^2}{2!}\sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right) + \cdots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\sin\left\{\frac{(n-1)\pi}{2} + x\right\} + \frac{h^n(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!m}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x + \theta h\right)$$

যেখানে $0 < \theta < 1$.

উদাহরণ–20. টেলর ধারা হইতে ১ম ও ২য় গড়মান উপপাদ্য নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আমরা জানি, টেলর ধারা $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h),\ 0 < \theta < 1$$

যখন $\mathbf{n = 1}$, $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h),\ 0 < \theta < 1$

$a + \theta h = c$ হইলে $0 < \theta h < h$

$\Rightarrow a < a + \theta h < h + a \Rightarrow a < c < a + h$

$\Rightarrow f(a+h) = f(a) + hf'(c),\ a < c < a + h$

আবার $a + h = b$ বসিয়ে পাই $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ ইহাই প্রথম গড়মান উপপাদ্য।

যখন $\mathbf{n = 2}$, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h),\ 0 < \theta < 1$

ইহা ২য় গড়মান উপপাদ্য।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

6.1. f(x) ফাংশনের n ক্রমের টেলর বহুপদী কাকে বলে? (What is the n order Taylor polynomial of a function f(x)?)

Ans : যদি $x = a$ বিন্দুর প্রতিবেশে $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান হয় তবে f(x) ফাংশনের n ক্রমের বা n তম টেলর বহুপদী ;

$$p_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

6.2. $x = 1$ প্রেক্ষিতে $f(x) = \ln x$ এর জন্য টেলর বহুপদী $p_1(x)$ কত? (What is the Taylor polynomial $p_1(x)$ for $f(x) = \ln x$ about $x = 1$?)

Ans : $f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = 0$ এবং $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1.$

এখন, $p_1(x) = f(1) + (x-1)f'(1) \Rightarrow p_1(x) = x - 1.$

6.3. $x = \frac{\pi}{2}$ প্রেক্ষিতে $f(x) = \sin x$ এর জন্য টেলর বহুপদী $p_1(x)$ কত? (What is the Taylor polynomial $p_1(x)$ for $f(x) = \sin x$ about $x = \frac{\pi}{2}$?)

Ans : $f(x) = \sin x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ এবং $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

এখন, $p_1(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow p_1(x) = 1$

6.4. $x = \frac{\pi}{2}$ প্রেক্ষিতে $f(x) = \cos x$ এর জন্য টেলর বহুপদী $p_1(x)$ কত? (What is the Taylor polynomial $p_1(x)$ for $f(x) = \cos x$ about $x = \frac{\pi}{2}$?)

Ans : $f(x) = \cos x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ এবং $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

এখন, $p_1(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow p_1(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$

6.5. $x = 2$ প্রেক্ষিতে $f(x) = \ln x$ এর জন্য টেলর বহুপদী $p_1(x)$ কত? (What is the Taylor polynomial $p_1(x)$ for $f(x) = \ln x$ about $x = 2$?)

Ans : $f(x) = \ln x \Rightarrow f(2) = \ln 2$ এবং $f'(2) = \frac{1}{2}.$

এখন, $p_1(x) = f(2) + (x-2)f'(2) \Rightarrow p_1(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2).$

6.6. $x = 1$ প্রেক্ষিতে $f(x) = e^x$ এর জন্য টেলর বহুপদী $p_2(x)$ কত? (What is the Taylor polynomial $p_2(x)$ for $f(x) = e^x$ about $x = 1$?)

Ans : $f(x) = e^x \Rightarrow f(1) = f'(1) = f''(1) = e$

এখন, $p_2(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1)$

$$\Rightarrow p_2(x) = e\left\{1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!}\right\}$$

6.7. $(x-1)$ শক্তি ধারায় e^x এর জন্য n ক্রমের টেলর বহুপদী কত? (What is the n order Taylor polynomial for e^x, power series of $(x-1)$?)

Ans : $(x-1)$ শক্তি ধারায় বা $x = 1$ প্রেক্ষিতে e^x এর জন্য n ক্রমের টেলর বহুপদী ঃ

$$p_n(x) = e\left\{1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!}\right\}.$$

6.8. f(x) এর n ক্রমের বহুপদী $p_n(x)$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by the n order polynomial $p_n(x)$ of f(x)?)

Ans : f(x) এর n ক্রমের বহুপদী $p_n(x)$ দ্বারা f(x) এর সন্নিকর্ষ (approximation) বোঝায়।

6.9. সন্নিকর্ষের অবশেষ কি? (What is the remainder in a approximation?)

Ans : ধরি f(x) এর সন্নিকর্ষ $p_n(x)$। সন্নিকর্ষের সঠিকতা $f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$ হইলে $R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x)$, ইহা $p_n(x)$ দ্বারা f(x) কে সন্নিকর্ষ করিতে সৃষ্ট ভূলকে বর্ণনা করে। ইহাকে সন্নিকর্ষের অবশেষ বলা হয়।

6.10. অবশেষসহ টেলর উপপাদ্য বা সসীম ধারায় টেলর উপপাদ্য কি? (What is the Taylor's theorem with remainder or Taylor's theorem in finite series?)

Ans : যদি $x = a$ প্রেক্ষিতে f(x) এর n তম টেলর বহুপদী $p_n(x)$ হয় তবে $f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$ কে অবশেষসহ টেলর উপপাদ্য বা সসীম ধারায় টেলর উপপাদ্য বলে। এখানে $R_{n+1}(x)$ ধারার $(n+1)$ সংখ্যক পদের পর অবশেষ। সাধারণভাবে টেলর এর সসীম ধারাটিকে $f(x) = p_{n-1}(x) + R_n(x)$ লেখা হয়।

6.11. সলমিস ও রসির আকারের অবশেষ $R_n(x)$ কত? (What is the schlomilch and Roche's form of remainder $R_n(x)$?)

Ans : সলমিস ও রসির আকারের অবশেষ,

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n(1-\theta)^{n-m}}{m \cdot (n-1)!}f^{(n)}(a + \theta(x-a)),\ 0 < \theta < 1.$$

6.12. ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষ $R_n(x)$ কত? (What is the Lagrange's form of the remainder $R_n(x)$?)

Ans : ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষ,

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)),\ 0 < \theta < 1$$

6.13. কসির আকারের অবশেষ $R_n(x)$ কত? (What is the Cauchy's form of the remainder $R_n(x)$?)

Ans : কসির আকারের অবশেষ,

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)),\ 0 < \theta < 1.$$

6.14. সলমিস ও রসির আকারের অবশেষসহ টেলরের সসীম ধারা লিখ। (Write the Taylor's finite series with schlomilch and Roche's form of remainder.)

Ans : যদি $x = a$ বিন্দুর প্রতিবেশে $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান হয় তবে সলমিস ও রসির আকারের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x)$$

যেখানে, $R_n(x) = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-m}}{m \cdot (n-1)!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)),\ 0 < \theta < 1.$

6.15. ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষসহ টেলরের সসীম ধারা লিখ। (Write the Taylor's finite series with Lagrange's form of remainder.)

Ans : যদি $x = a$ বিন্দুর প্রতিবেশে $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান হয় তবে ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা,

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)),\ 0 < \theta < 1.$$

6.16. কসির আকারের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা লিখ। (Write the Taylor's finite series with Cauchy's form of remainder.)

Ans : যদি $x = a$ বিন্দুর প্রতিবেশে $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান হয় তবে কসির আকারের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা,

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)),\ 0 < \theta < 1.$$

6.17. সলমিস ও রসির আকারের অবশেষসহ $f(a + h)$ এর বিস্তৃতি লিখ। (Write the expansion of $f(a + h)$ with schlomilch and Roche's form of remainder.)

Ans : যদি $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ ফাংশনগুলি $[a, a + h]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $(a, a + h)$ ব্যবধিতে $f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান থাকে তবে

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n (1-\theta)^{n-m}}{m \cdot (n-1)!} f^{(n)}(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1.$$

6.18. ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষসহ $f(a + h)$ এর বিস্তৃতি লিখ। (Write the expansion of $f(a + h)$ with Lagrange's form of remainder.)

Ans : যদি $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ ফাংশনগুলি $[a, a + h]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $(a, a + h)$ ব্যবধিতে $f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান হয় তবে

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1.$$

6.19. কসির আকারের অবশেষসহ $f(a + h)$ এর বিস্তৃতি লিখ। (Write the expansion of $f(a + h)$ with Cauchy's form of remainder.)

Ans : যদি $f(x), f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ ফাংশনগুলি $[a, a + h]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $f^n(x)$ ফাংশনটি $(a, a + h)$ ব্যবধিতে বিদ্যমান থাকে তবে

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n (1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta h),\ 0 < \theta < 1.$$

6.20. টেলর ধারা $f(x) = p_{n-1}(x) + R_n(x)$ কখন $f(x)$ তে অভিসারী হইবে? (When is the Taylor's series $f(x) = p_{n-1}(x) + R_n(x)$ converges to $f(x)$?)

Ans : যদি $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$ হয় তবে টেলর ধারা $f(x)$ তে অভিসারী হইবে।

6.21. টেলর অনন্ত ধারা কাকে বলে? (What is called Taylor's infinite series?)

Ans : $x = a$ বিন্দুর প্রতিবেশে টেলর ধারা,

$$f(a) = f(x) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x)$$

যদি $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ হয় তবে টেলর ধারাকে অর্থাৎ

$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots$ কে টেলর অসীম ধারা বলে।

6.22. টেলর ধারার ব্যর্থতা কি? (What is the failures of Taylor's series?)

Ans : টেলর ধারার ব্যর্থতা বলিতে বোঝায়, নিম্নের তিনটি শর্তে টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে f(x) এর বিস্তৃত সম্ভব নয়।

(i) যদি $x = a$ বিন্দুতে f(x) বা ইহার যে ক্রমের অন্তরক সহগ অসীম বা অসংজ্ঞায়িত হয়।

(ii) যদি $x = a$ বিন্দুতে f(x) বা ইহার যে কোন ক্রমের অন্তরক সহগ বিচ্ছিন্ন হয়।

(iii) যদি $\lim_{n\to\infty} R_n \neq 0$ হয়, যেখানে R_n হইল n পদের পর অবশেষ।

6.23. f(x) ফাংশনের n ক্রমের বা n তম ম্যাকলরিন বহুপদী কাকে বলে? (What is called n order or n-th Machlaurin polynomial of a functin f(x)?)

Ans : যদি $x = 0$ বিন্দুর প্রতিবেশে $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান হয় তবে f(x) ফাংশনের n ক্রমের বা n তম ম্যাকলরিন বহুপদী

$$p_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

6.24. টেলর বহুপদী ও ম্যাকলরিন বহুপদীর মধ্যে পার্থক্য কি? (What is the difference between Taylor polynomial and Maclaurin polynomial?)

Ans : ম্যাকলরিন বহুপদী হইল $x = 0$ বিন্দুর প্রতিবেশে f(x) ফাংশনের টেলর বহুপদী। অর্থাৎ সকল ম্যাকলরিন বহুপদীকে টেলর বহুপদী বলা যায় কিন্তু সকল টেলর বহুপদী ম্যাকলরিন বহুপদী নয়।

6.25. $f(x) = \sin x$ এর ম্যাকলরিন বহুপদী $p_0(x)$ কত? (What is the Maclaurin polynomial $p_0(x)$ for $f(x) = \sin x$?)

Ans : $f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$

এখন, $p_0(x) = f(0) \Rightarrow p_0(x) = 0$

6.26. $f(x) = \sin x$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী $p_1(x)$ কত? (What is the Maclaurin polynomial $p_1(x)$ for $f(x) = \sin x$?)

Ans : $f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$ এবং $f'(0) = \cos 0 = 1$

এখন, $p_1(x) = f(0) + xf'(0) \Rightarrow p_1(x) = x$

6.27. $f(x) = \sin x$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী $p_2(x)$ কত? (What is the Maclaurin polynomial $p_2(x)$ for $f(x) = \sin x$?)

Ans : $f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0, f'(0) = \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0$

এখন, $p_2(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) \Rightarrow p_2(x) = x.$

6.28. $f(x) = \cos x$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী $p_1(x)$ কত? (What is the Maclaurin polynomial $p_1(x)$ for $f(x) = \cos x$?)

Ans : $f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = 1$ এবং $f'(0) = -\sin 0 = 0$

এখন, $p_1(x) = f(0) + xf'(0) \Rightarrow p_1(x) = 1.$

6.29. $f(x) = e^x$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী $p_2(x)$ কত? (What is the Maclaurin polynomial $p_2(x)$ for $f(x) = e^x$?)

Ans : $f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$

এখন, $p_2(x) = f(0) + xf''(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) \Rightarrow p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}.$

6.30. $f(x) = \ln(1+x)$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী $p_1(x)$ কত? (What is Maclaurin polynomial $p_1(x)$ for $f(x) = \ln(1+x)$?)

Ans : $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

এখন, $p_1(x) = f(0) + xf'(0) \Rightarrow p_1(x) = x$

6.31. $f(x) = \ln x$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী $p_1(x)$ কি বিদ্যমান? (Does the Maclaurin polynomial $p_1(x)$ exist for $f(x) = \ln x$?)

Ans : $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

এখানে $x = 0$ বিন্দুতে $f'(x)$ বিদ্যমান নয়, সুতরাং $f(x) = \ln x$ এর জন্য ম্যাকলরিণ বহুপদী $p_1(x)$ বিদ্যমান নয়।

6.32. $f(x) = e^x$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী $p_n(x)$ লিখ। (Write the Maclaurin polynomial $p_n(x)$ for $f(x) = e^x$.)

Ans : $f(x) = e^x$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী, $p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

6.33. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী $p_n(x)$ লিখ। (Write the Maclaurin polynomial $p_n(x)$ for $f(x) = \frac{1}{1-x}$.)

Ans : $f(x) = \frac{1}{1-x}$ এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী,

$p_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$.

6.34. সলমিস ও রসির আকারের অবশেষসহ ম্যাকলরিন সসীম ধারা লিখ। (Write the Maclaurin's finite series with schlomilch and Roche's form of remainder.)

Ans : যদি $x = 0$ বিন্দুর প্রতিবেশে $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান হয় তবে সলমিস ও রসির আকারের অবশেষসহ ম্যাকলরিন সসীম ধারা,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n(1-\theta)^{n-m}}{m\cdot(n-1)!}f^{(n)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1.$$

6.35. ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষসহ ম্যাকলরিন সসীম ধারা লিখ। (Write the Maclaurin's finite series with lagrange's form of remainder.)

Ans : যদি $x = 0$ বিন্দুর প্রতিবেশে $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান হয় তবে ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষসহ ম্যাকলরিন সসীম ধারা,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1$$

6.36. কসির আকারের অবশেষসহ ম্যাকলরিন সসীম ধারা লিখ। (Write the Maclaurin's finite series with Cauchy's form of remainder.)

Ans : যদি $x = 0$ বিন্দুর প্রতিবেশে $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$ বিদ্যমান হয় তবে কসির আকারের অবশেষসহ ম্যাকলরিন সসীম ধারা,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1.$$

6.37. ম্যাকলরিন অনন্ত ধারা কি? (What is the Maclaurin's infinite series?)

Ans : ম্যাকলরিন সসীম ধারা,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n \cdots (1)$$

যদি $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ হয় তবে (1) কে অর্থাৎ $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots$ কে ম্যাকলরিন অসীম ধারা বলে।

6.38. ম্যাকলরিন ধারার ব্যর্থতা কি? (What is the failures of Maclaurin series?)

Ans : ম্যাকলরিন ধারার ব্যর্থতা বলিতে বোঝায়, নিম্নের তিনটি শর্তে ম্যাকলরিন উপপাদ্যের সাহায্যে $f(x)$ এর বিস্তৃতি সম্ভব নয়।

(i) যদি $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $\cdots$, $f^{(n)}(0)$ এর যে কোন একটি মান অসীম বা অসংজ্ঞায়িত হয়।

(ii) যদি $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ বা ইহার যে কোন ক্রমের অন্তরক সহগ বিচ্ছিন্ন হয়।

(iii) যদি $\lim_{n\to\infty} R_n \neq 0$ হয়, যেখানে R_n হইল n পদের পর অবশেষ।

6.39. অভিসারিতা ব্যবধিসহ $\frac{1}{1-x}$ এর ম্যাকলরিণ ধারা লিখ। (Write the Maclaurin's series of $\frac{1}{1-x}$ with interval of convergence.)

Ans : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots +, -1 < x < 1.$

6.40. অভিসারিতা ব্যবধিসহ নিম্নের ফাংশনগুলির ম্যাকলরিন ধারা লিখ। (Write the Maclaurin's series of the following functions with interval of convergence.)

(i) $\ln(1+x)$ (ii) $\tan^{-1}x$ (iii) e^x (iv) $\sin x$ (v) $\cos x$

(vi) sinhx (vii) coshx.

Ans : (i) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, -1 < x \leq 1$

(ii) $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, -1 \leq x \leq 1$

(iii) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, -\infty < x < \infty$

(iv) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, -\infty < x < \infty$

(v) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, -\infty < x < \infty$

(vi) $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, -\infty < x < \infty$

(vii) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, -\infty < x < \infty$

6.41. নিম্নের ধারা হইতে cos x এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। (Find the expansion of cos x from the following series.)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Ans : দেওয়া আছে, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই, $\cos x = 1 - \frac{2x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \cdots$

$\therefore \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

6.42. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ হইতে $(1-x)^{-2}$ এর ম্যাকলরিন ধারা নির্ণয় কর। (Find Maclaurin's series of $(1-x)^{-2}$ from $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$)

Ans : এখানে, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

x এর সাপেক্ষে অন্তীকরণ করি, $\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$

6.43. দেখাও যে $f(x) = \sqrt{x}$ এর জন্য ম্যাকলরিন অসীম ধারা বিদ্যমান নয়। (Show that Maclaurin's infinite series of $f(x) = \sqrt{x}$ does not exist.)

Ans : $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

এখানে $f'(0) = \frac{1}{0}$, বিদ্যমান নয়, সুতরাং $f(x) = \sqrt{x}$ এর জন্য ম্যাকলরিন অসীম ধারা বিদ্যমান নয়।

6.44. টেলর ধারা হইতে প্রথম গড়মান উপপাদ্য নির্ণয় কর। (Find first mean value theorem from Taylon's series.)

Ans : ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ টেলর ধারা,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),\ 0 < \theta < 1$$

$n = 1$ হইলে পাই,

$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h),\ 0 < \theta < 1$ ইহাই প্রথম গড়মান উপপাদ্য।

6.45. টেলর ধারা হইতে দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্য নির্ণয় কর। (Find second mean value theorem from Taylor's series.)

Ans : ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ টেলর ধারা,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),\ 0 < \theta < 1$$

$n = 2$ বসাই,

$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h),\ 0 < \theta < 1$

ইহা দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্য।

EXERCISE–6

1. x sin x এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী $p_3(x)$ ও $p_4(x)$ নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ $p_3(x) = x^2,\ p_4(x) = x^2 - \frac{x^4}{6}$

2. sin πx এর জন্য ম্যাকলরিন বহুপদী $p_{2n+1}(x)$ নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ $\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{3!} + \frac{\pi^5 x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{\pi^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3. cos x এর জন্য ম্যাকলরিন ধারা নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

4. $a^x,\ a > 0$ এর জন্য ম্যকলরিন ধারা নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ $1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!}(\ln a)^2 + \frac{x^3}{3!}(\ln a)^3 + \cdots$

5. $x = 0$ প্রতিবেশে $ln\,(1-x)$ এর জন্য টেলর ধারা নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+-\cdots\right), -1<x<1$.

6. $x = 1$ বিন্দুর সাপেক্ষে e^x এর জন্য টেলর ধারা নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $e\left[1+\frac{(x-1)}{1!}+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}+\cdots\right]$

7. $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ শক্তি ধারায় $\cos x$ এর জন্য টেলর ধারা নির্ণয় কর। **[NUH-2008]**

উত্তর ঃ $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\cdots\right]$.

8. $ln\,x$ কে $(x-2)$ শক্তি ধারায় বিস্তার করিয়া।

উত্তর ঃ $ln\ 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{(x-2)^3}{3}-\cdots$

যেখানে $0<x<4$.

9. সসীম আকারের টেলর ধারা বর্ণনা কর। কখন ইহা অনন্ত ধারা হইবে? টেলর ধারার সাহায্যে $5x^2+7x+3$ কে $(x-1)$ এর ক্রম উচ্চশক্তি ধারায় বিস্তার কর। **[NUH-1999]**

উত্তর ঃ $15+17(x-1)+5(x-1)^2$

10. টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে x^3-3x^2+7x+2 কে $(x-2)$ এর ক্রম উচ্চ শক্তিধারায় বিস্তার কর। উত্তর ঃ $12+7(x-2)+3(x-2)^2+(x-2)^3$.

11. দেখাও যে $\sqrt{x}$ এবং $x^{5/2}$ কে x এর ক্রম উচ্চ শক্তি ধারায় টেলর অনন্ত ধারা নির্ণয় করা যায় না।

12. টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে $\frac{1}{1-x}$ কে অসীম ধারায় বিস্তার কর।

উত্তর ঃ $1+x+x^2+x^3+\cdots$

13. ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ $e^{ax}\sin bx$ এর জন্য সসীম ম্যাকলরিন ধারা নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $x(a^2+b^2)^{1/2}\sin\left(\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)+\frac{x^2}{2!}(a^2+b^2)\sin\left(2\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

$+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}(a^2+b^2)^{n-1/2}\sin\left\{(n-1)\tan^{-1}\frac{b}{a}\right\}$

$+\frac{x^n}{n!}(a^2+b^2)^{n/2}e^{a\theta x}\sin\left(b\theta x+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right), 0<\theta<1.$

14. $e^x\cos x$ এর জন্য $x = 0$ প্রতিবেশে ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ সসীম টেলর ধারা নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $1+x-\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}2^{(n-1)/2}\cos\left\{\frac{(n-1)\pi}{4}\right\}$

$+\frac{x^n}{n!}2^{n/2}e^{\theta x}\cos\left(\theta x+\frac{n\pi}{4}\right), 0<\theta<1$ **[NUH(NM)-2007]**

15. টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর $\sin^2 x = x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{5!}\cdot 16\sin 2\theta x,\ 0<\theta<1$

16. ম্যাকলরিন উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর ঃ

(i) $ln\,(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\theta x)^4}, 0<\theta<1$

(ii) $ln\,(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5(1-\xi)^5}, 0<\xi<x.$

17. ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ $(1+x)^m$ কে x এর ক্রম উচ্চ শক্তি ধারায় ম্যাকলরিন সসীম ধারা নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots$

$+\frac{x^n}{n!}m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n}, 0<\theta<1.$

18. সলমিস ও রসির অবশেষসহ a^{x+h} এর জন্য h এর শক্তি ধারায় টেলর সসীম ধারা নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $a^x\left[1+h\,ln\,a+\frac{(h\,ln\,a)^2}{2!}+\cdots\right.$

$\left.+\frac{(h\,ln\,a)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{h^n(1-\theta)^{n-m}}{m(n-1)!}(ln\,a)^n\,a^{\theta h}\right], 0<\theta<1$

19. টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর

$\sin(a+h)=\sin a+h\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)+\frac{h2}{2!}\sin\left(\frac{2\pi}{2}+a\right)+\cdots$

$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\sin\left\{\frac{(n-1)\pi}{2}+a\right\}$

$+\frac{h^n(1-\theta)^{n-m}}{m(n-1)!}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+a+\theta h\right)$ যেখানে $0<\theta<1$

20. কসির অবশেষসহ e^{a+x} এর জন্য x এর শক্তিধারায় টেলর সসীম ধারা নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $e^a\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]+\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}e^{a+\theta x}$ যেখানে $0<\theta<1$.

21. টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}h^2 + \cdots +$$

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{m-n+1}h^{n-1}$$

$$+\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}m(m-1)\cdots(m-n+1)(x+\theta h)^{m-n},\ 0<\theta<1$$

22. $x = 0$ বিন্দুর প্রতিবেশে সলমিস ও রসির অবশেষসহ $e^{ax}\sin bx$ এর জন্য x এর শক্তি ধারায় টেলর ধারা নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $bx + abx^2 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}(a^2+b^2)^{n-1/2}\sin\left\{(n-1)\tan^{-1}\frac{b}{a}\right\}$

$$+\frac{x^n(1-\theta)^{n-m}}{m(n-1)!}(a^2+b^2)^{n/2}e^{a\theta x}\sin\left(b\theta x + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right).$$

23. সলমিস ও রসির অবশেষসহ $\tan^{-1}x$ এর জন্য ম্যাকলরিন সসীম ধারা নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n(1-\theta)^{n-m}}{m}$

$\sin^n(\cot^{-1}\theta x)\sin(n\cot^{-1}\theta x)$ যেখানে $0<\theta<1$.

24. $ln(1+\sin x)$ এর বিস্তার হতে প্রমাণ কর $\sec x - tzn\ x = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \cdots$

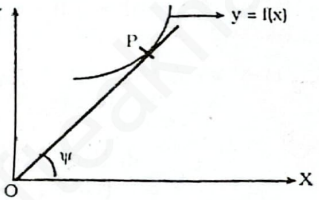
25. $\tan x$ এর বিস্তর হতে প্রমাণ কর $\sec^2 x = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \cdots$

26. $y = (\sin^{-1}x)^2$ হলে প্রমাণ কর $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$ ইহা হতে আরও প্রমাণ কর $(\sin^{-1}x)^2 = \frac{1^2}{2!}.2x^2 + \frac{2^2}{4!}.2x^4 + \frac{2^2.4^2}{6!}.2x^6 + \cdots$

[NUH(NM)-2008]

Chapter-7
ফাংশনের গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমান
MAXIMUM AND MINIMUM VALUE OF A FUNCTION

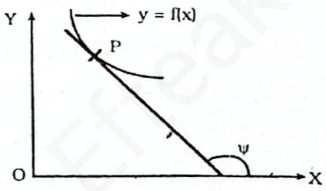
7.1. ক্রমবর্ধমান ফাংশন (Increasing function) ঃ x বৃদ্ধি পাইলে যদি কোন ফাংশন $y = f(x)$ এর মান বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়। অর্থাৎ $y = f(x)$ ফাংশনের উপরিস্থ যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত ঢাল ধনাত্মক হয়, তবে $y = f(x)$ কে ক্রমবর্ধমান ফাংশন বলা হয়।



ক্রমবর্ধমান ফাংশনের ক্ষেত্রে স্পর্শকের ঢাল ধনাত্মক অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} > 0$

এখানে $\frac{dy}{dx} = \tan\psi$ এবং $\psi < 90^0$.

7.2. ক্রমহ্রাসমান ফাংশন (Decreasing function) ঃ x বৃদ্ধি পাইলে যদি কোন ফাংশন $y = f(x)$ এর মান হ্রাসপ্রাপ্ত হয় অর্থাৎ $y = f(x)$ ফাংশনের উপরিস্থ যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল ঋণাত্মক হয়, তবে $y = f(x)$ কে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন বলা হয়।



ক্রমহ্রাসমান ফাংশনের ক্ষেত্রে স্পর্শকের ঢাল ঋণাত্মক।

অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} < 0$ এখানে $\frac{dy}{dx} = \tan\psi$ এবং $\psi > 90^0$

7.3. কোন বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান ফাংশন (Increasing function at a Point) : **[NUH(NM)-2006, 2007]**

যদি $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশনের ক্ষেত্রে $\lim_{h\to 0_+} f(a+h) \geq f(a)$ এবং $\lim_{h\to 0_-} f(a+h) < f(a)$ হয়, তবে $y = f(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান হইবে।

উদাহরণ ঃ $y = 3x + 1$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

7.4. কোন বিন্দুতে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন (Decreasing function at a Point) **[NUH(NM)-2006, 2007]**

যদি $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশনের ক্ষেত্রে $\lim_{h\to 0_+} f(a+h) < f(a)$ এবং $\lim_{h\to 0_-} f(a+h) > f(a)$ হয়, তবে $y = f(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে ক্রমহ্রাসমান হইবে।

উদাহরণ ঃ $y = \frac{1}{x}$ একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন।

7.5. উপপাদ্য–1. $x = a$ বিন্দুতে যদি $y = f(x)$ ক্রমবর্ধমান ফাংশন হয়, তবে $f'(a) > 0$ হইবে।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ ক্রমবর্ধমান ফাংশন, কাজেই সংজ্ঞার সাহায্যে পাই

$\lim_{h\to 0_+} f(a+h) > f(a)$ ..... (1) এবং $\lim_{h\to 0_-} f(a+h) < f(a)$ ..... (2)

(1) নং হইতে পাই $\lim_{h\to 0_+} f(a+h) - f(a) > 0$

বা $\lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$ বা $Rf'(a) > 0$

(2) নং হইতে পাই $\lim_{h\to 0_-} f(a+h) - f(a) < 0$

বা $\lim_{h\to 0_-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$ বা $Lf'(a) > 0$

যেহেতু $Rf'(a) > 0$ এবং $Lf'(a) > 0$ সুতরাং $f'(a) > 0$.

7.6. উপপাদ্য–2. $x = a$ বিন্দুতে যদি $y = f(x)$ ক্রমহ্রাসমান ফাংশন হয়, তবে $f'(a) < 0$ হইবে।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ ক্রমহ্রাসমান ফাংশন, কাজেই সংজ্ঞার সাহায্যে পাই

$\lim_{h\to 0_+} f(a+h) < f(a)$ ..... (1) এবং $\lim_{h\to 0_-} f(a+h) > f(a)$ ..... (2)

(1) নং হইতে পাই $\lim_{h\to 0_+} f(a+h) - f(a) < 0$

বা $\lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0$ বা $Rf'(a) < 0$

(2) নং হইতে পাই $\lim_{h\to 0_-} f(a+h) - f(a) > 0$

বা $\lim_{h\to 0_-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0$ বা $Lf'(a) < 0$

যেহেতু $Rf'(a) < 0$ এবং $Lf'(a) < 0$. সুতরাং $f'(a) < 0$.

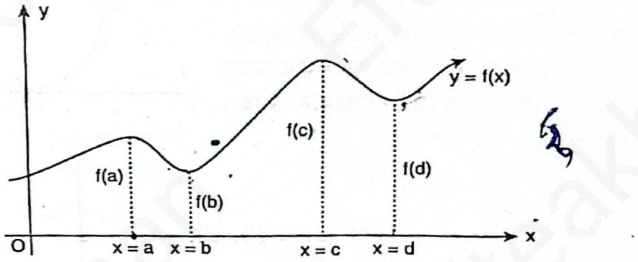
7.7. কোন ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন (Increasing and decreasing function in an interval) ঃ

যদি $a < x < b$ এর সকল x এর জন্য $f'(x) > 0$ হয়, তবে $y = f(x)$ ফাংশন (a, b) ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান হইবে। এবং $a < x < b$ এর সকল x এর জন্য $f'(x) < 0$ হইলে, $y = f(x)$ ফাংশন (a, b) ব্যবধিতে ক্রমহ্রাসমান হইবে।

7.8. ফাংশনের গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান (Maximum value and minimam value of a fanction) : [NUH(NM)–08, BSc(Pass)–07]

কোন ফাংশনের গরিষ্ঠমান বা লঘিষ্ঠমান বলিতে উহার মানগুলির মধ্যে বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম মানকে বুঝায়, এই ধারণা সর্বদা সত্য নয়। কোন বিন্দুতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান অপর একটি বিন্দুতে উহার লঘিষ্ঠমানের সাপেক্ষে ক্ষুদ্রতরও হইতে পারে।

কোন অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করিলে যদি উহার উপরস্থ কোন বিন্দুতে উহার নিকটবর্তী অন্য সকল বিন্দু অপেক্ষা ফাংশনের মান বেশী হয় তবে উহাকে ফাংশনের গরিষ্ঠমান বলা হয় এবং যদি কোন বিন্দুতে উহার নিকটবর্তী অন্য সকল বিন্দু অপেক্ষা ফাংশনের মান কম হয় তবে উহাকে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান বলা হয়।



লেখচিত্রে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের মান উহার নিকটবর্তী অন্য সকল বিন্দু হইতে বৃহত্তম। সুতরাং $f(a)$ ফাংশনের গরিষ্ঠমান। আবার $x = b$ বিন্দুতে ফাংশনের মান উহার নিকটবর্তী অন্য সকল বিন্দু হইতে ক্ষুদ্রতম। সুতরাং $f(b)$ ফাংশনের লঘিষ্ঠমান।

অনুরূপে $f(c)$ ও $f(d)$ যথাক্রমে ফাংশনের গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান। এখানে লঘিষ্ঠমান $f(d)$ গরিষ্ঠমান $f(a)$ এর চেয়ে বৃহত্তর। অর্থাৎ কোন বিন্দুতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান অপর একটি বিন্দুর ফাংশনের লঘিষ্ঠমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে।

একটি ফাংশনের অনেকগুলি গরিষ্ঠমান অথবা অনেকগুলি লঘিষ্ঠমান থাকিতে পারে। গরিষ্ঠমান এবং লঘিষ্ঠমানের বিন্দুসমূহ ক্রমানুসারে পাওয়া যায় অর্থাৎ দুইটি গরিষ্ঠমানের মধ্যে একটি লঘিষ্ঠমান এবং দুইটি লঘিষ্ঠমানের মধ্যে একটি গরিষ্ঠমানের বিন্দু পাওয়া যায়।

ফাংশনের গরিষ্ঠমান এবং লঘিষ্ঠমানকে একত্রে ফাংশনের চরমমান বলা হয় এবং গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমানের বিন্দুকে একত্রে সন্ধি বিন্দু **(Critical point)** বলা হয়। একটি ফাংশনের সকল লঘিষ্ঠমান ও গরিষ্ঠমানের বৃহত্তম মানকে পরম গরিষ্ঠমান (Absolute maximum value) এবং সকল গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমানের ক্ষুদ্রতম মানকে পরম লঘিষ্ঠমান (Absolute minimum value) বলা হয়। পরম গরিষ্ঠমান ব্যতিত ফাংশনের অপর কোন গরিষ্ঠমান থাকিলে উহাকে স্থানীয় গরিষ্ঠমান (local maximum value) অথবা আপেক্ষিক গরিষ্ঠমান (Relative maximum value) বলা হয়। একইভাবে ফাংশনের পরম লঘিষ্ঠমান ব্যতিত অপর লঘিষ্ঠমানকে স্থানীয় লঘিষ্ঠমান (local minimum value) অথবা আপেক্ষিক লঘিষ্ঠমান (Relative minimam value) বলা হয়।

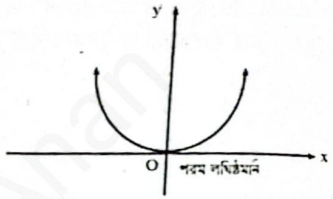
7.9. পরম গরিষ্ঠমান ও পরম লঘিষ্ঠমান (Absolute maximam value and absolute minimum value) : ধরি $f(x)$ ফাংশনের ডোমেন D_f. যদি ফাংশনের ডোমেনে c এইরূপ একটি বিন্দু হয় যে, $f(x) \le f(c)$, $\forall x \in D_f$. তবে $f(c)$ কে ফাংশনের পরম গরিষ্ঠমান বলা হয়।

যদি ফাংশনের ডোমেনে c এইরূপ বিন্দু হয় যে, $f(x) \ge f(c)$, $\forall x \in D_f$ তবে $f(c)$ কে ফাংশনের পরম লঘিষ্ঠমান বলা হয়।

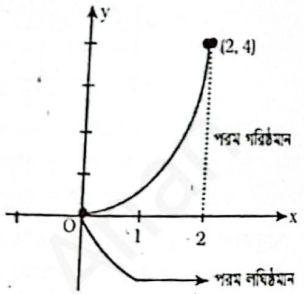
পরম গরিষ্ঠমান এবং পরম লঘিষ্ঠমানকে একত্রে পরম চরমমান (absolute extreme value) বলা হয়।

লেখচিত্রের সাহায্যে পরম গরিষ্ঠমান ও পরম লগিষ্ঠমান নিম্নে দেখানো হইল :

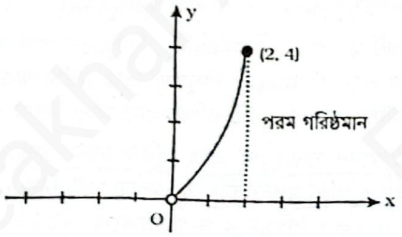
(i). ফাংশন $y = x^2$ এবং $D_f = (-\infty, \infty)$. $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের পরম লঘিষ্ঠমান আছে কিন্তু ইহার কোন পরম গরিষ্ঠমান নাই। লঘিষ্ঠমান = 0.



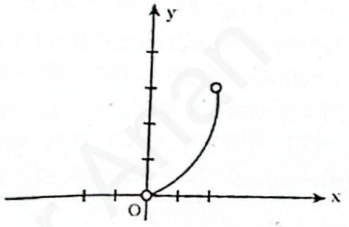
(ii) ফাংশন $y = x^2$ এবং $D_f = [0, 2]$. $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের পরম লঘিষ্ঠমান আছে এবং লঘিষ্ঠমান $x = 0$, $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান আছে যেখানে পরম গরিষ্ঠমান = $2^2 = 4$.



(iii) ফাংশন $y = x^2$ এবং ডোমেন $D_f = [0, 2]$. $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনের পরম গরিষ্ঠমান আছে যেখানে গরিষ্ঠমান = 4. ফাংশনের পরম লঘিষ্ঠমান নাই।



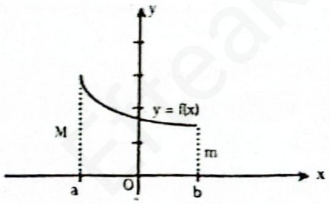
(iv) ফাংশন $y = x^2$ এবং $D_f = (0, 2)$ ফাংশনের পরম গরিষ্ঠমান বা পরম লঘিষ্ঠমান নাই।



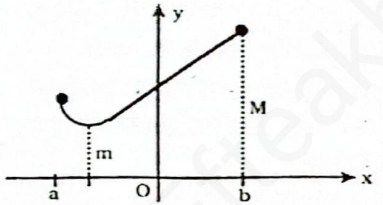
7.10. কোন ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের পরম গরিষ্ঠমান ও পরম লঘিষ্ঠমান (Absolute maximum value and absolute minimum value of a function in an interval) : যদি $f(x)$ ফাংশন কোন বদ্ধ ব্যবধি I এর প্রত্যেক বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয় তবে উক্ত ব্যবধির মধ্যে সর্বদা একটি পরম গরিষ্ঠমান এবং একটি পরম লঘিষ্ঠমান থাকিবে। $x_1, x_2 \in I$ এর জন্য যদি $f(x_1) = m$ (পরম লঘিষ্ঠমান) এবং $f(x_2) = M$ (পরম গরিষ্ঠমান হয় তবে $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in I$ হইবে।

নিম্নে চিত্রের সাহায্যে ইহা দেখানো হইল :

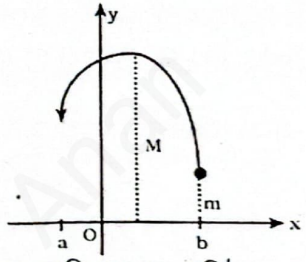
(i). [a, b] বদ্ধ ব্যবধির প্রান্ত বিন্দুতে পরম গরিষ্ঠমান ও পরম লঘিষ্ঠমান আছে।



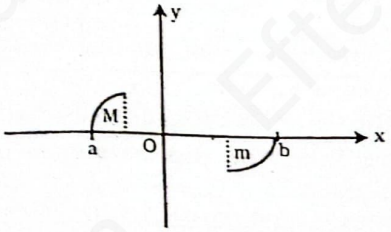
(ii) [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে পরম গরিষ্ঠমান প্রান্তবিন্দুতে এবং পরম লঘিষ্ঠমান ব্যবধির অন্তঃস্থ বিন্দুতে আছে।



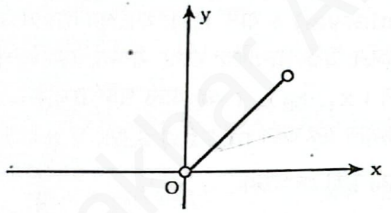
(iii) [a, b] বদ্ধ ব্যবধির প্রান্তবিন্দুতে পরম লঘিষ্ঠমান এবং অন্তঃস্থ বিন্দুতে পরম গরিষ্ঠমান আছে।



(iv) [a, b] বদ্ধ ব্যবধির অন্তঃস্থ বিন্দুতে পরম গরিষ্ঠমান ও পরম লঘিষ্ঠমান আছে।

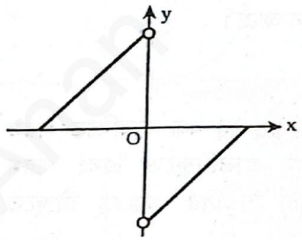


খোলা ব্যবধিতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইলে ইহার পরম গরিষ্ঠমান বা পরম লঘিষ্ঠমান নাও থাকতে পারে। নিম্নে চিত্রে ইহা দেখানো হইলো।



$y = x$ ফাংশনের (0, 1) খোলা ব্যবধিতে পরম গরিষ্ঠমান বা পরম লঘিষ্ঠমান নাই। বদ্ধ ব্যবধির কোন বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন হইলে পরম গরিষ্ঠমান বা পরম লঘিষ্ঠমান নাও থাকিতে পারে।

$$y = \begin{cases} x+1 & \text{যখন} \quad -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{যখন} \quad x = 0 \\ x-1 & \text{যখন} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

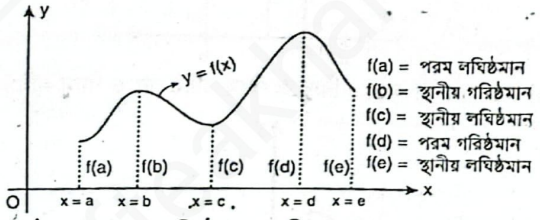


ফাংশন $x = 0$ বিন্দু ব্যতিত বদ্ধ ব্যবধি $[-1, 1]$ এর সকল বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন। কিন্তু ফাংশনের পরম লঘিষ্ঠমান বা পরম গরিষ্ঠমান নাই।

7.11. স্থানীয় গরিষ্ঠমান ও স্থানীয় লঘিষ্ঠমান (Local maximum value and local minimum value) ঃ ধরি f(x) ফাংশনের ডোমেন D_f এবং ডোমেন এর একটি বিন্দু c কে ধারণ করিয়া যে কোন খোলা ব্যবধি I. যদি $x \in I$ এর জন্য $f(x) \le f(c)$ হয় তবে f(c) কে ফাংশনের স্থানীয় গরিষ্ঠমান বলা হয়।

যদি $x \in I$ এর জন্য $f(x) \ge f(c)$ হয় তবে f(c) কে ফাংশনের স্থানীয় লঘিষ্ঠমান বলা হয়।

স্থানীয় লঘিষ্ঠমান এবং স্থানীয় গরিষ্ঠমানকে একত্রে স্থানীয় চরমমান (Local extreme value) বলা হয়।



7.12. গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত (Necessary conditions for the existence of maximam value and minimum value) :

[NUH–02, 09, NUH(NM)–06, 07, BSc(Pass)–08, 2010]

$x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের গরিষ্ঠমান থাকিলে $f(a + h) - f(a) \le 0$ হইবে যেখানে $h > 0$ অথবা $h < 0$ হয়।

$$\Rightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0 \text{ যখন } h > 0 \text{ এবং } \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0 \text{ যখন } h < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0_-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0 \text{ এবং } \lim_{h \to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0$$

$$\Rightarrow Lf'(a) \ge 0 \text{ এবং } Rf'(a) \le 0$$

যদি $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অন্তরীকরণ যোগ্য হয় তবে

$$Rf'(a) = 0 = Lf'(a) \Rightarrow f'(a) = 0 \cdots\cdots (1)$$

আবার যদি $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের লঘিষ্ঠমান থাকে তবে $f(a + h) - f(a) \ge 0$ হইবে যেখানে $h > 0$ বা $h < 0$.

$$\Rightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0 \text{ যখন } h < 0 \text{ এবং } \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0 \text{ যখন } h > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0_-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0 \text{ এবং } \lim_{h \to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0$$

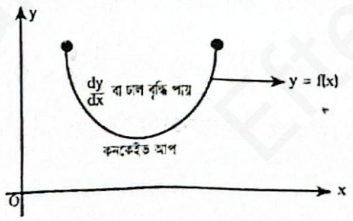
$$\Rightarrow Lf'(a) \le 0 \text{ এবং } Rf'(a) \ge 0$$

যদি $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য হয় তবে

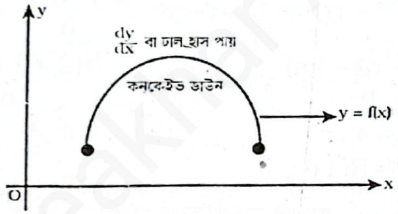
$$Lf'(a) = Rf'(a) = 0 \Rightarrow f'(a) = 0 \cdots\cdots (2)$$

(1) ও (2) হইতে পাই, ফাংশনে গরিষ্ঠমান অথবা লঘিষ্ঠমান থাকিলে $f'(a) = 0$ হইবে। অর্থাৎ কোন বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য হইলে যদি ঐ বিন্দুতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান বা লঘিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকে তবে প্রয়োজনীয় শর্ত হইবে $x = a$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$.

7.13. অবতলতা (Concavity) ঃ $y = f(x)$ ফাংশনের যে অংশে $\frac{dy}{dx}$ বৃদ্ধি পায় অর্থাৎ স্পর্শকের ঢাল বৃদ্ধি পায় ফাংশনের ঐ অংশকে কনকেইভ আপ (concave up) বলা হয়।

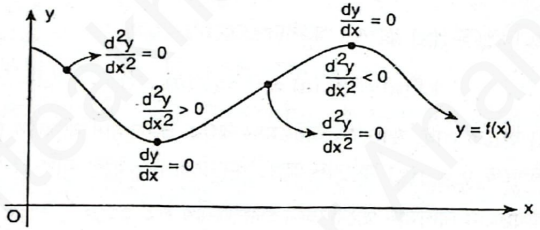


$y = f(x)$ ফাংশনের যে অংশে $\frac{dy}{dx}$ হ্রাস পায় অর্থাৎ স্পর্শকের ঢাল হ্রাস পায় ফাংশনের ঐ অংশকে কনকেইভ ডাউন (Concave down) বলা হয়।



কোন ফাংশনের কনকেইভ আপ এবং কনকেইভ ডাউন অংশ যে বিন্দুতে মিলিত হয় উহাকে ইনফ্লেকশন (inflexion) বিন্দু বলা হয়। কনকেইভ আপ অংশে $\frac{dy}{dx}$ বৃদ্ধি পায়, সুতরাং $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) > 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হইবে। কনকেইভ ডাউন অংশে $\frac{dy}{dx}$ হ্রাস পায়।

সুতরাং $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) < 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হইবে। ইনফ্লেকশন বিন্দুতে কনকেইভ আপ এবং কনকেইভ ডাউন অংশ মিলিত হয়, সুতরাং ইনফ্লেকশন বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ হইবে অথবা $\frac{d^2y}{dx^2}$ অসংজ্ঞায়িত হইবে।



কনকেইভ আপ অংশের যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হইবে অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = 0$ হইবে, ঐ বিন্দুকে লঘিষ্ঠমানের বিন্দু এবং ঐ বিন্দুতে ফাংশনের মানকে লঘিষ্ঠমান বলা হইবে। কনকেইভ ডাউন অংশের যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = 0$, ঐ বিন্দুকে গরিষ্ঠমানের বিন্দু এবং ঐ বিন্দুতে ফাংশনের মানকে গরিষ্ঠমান বলা হয়।

সুতরাং গরিষ্ঠমানের বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, এবং লঘিষ্ঠমানের বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ এবং ইনফ্লেকশন বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ বা অসংজ্ঞায়িত এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ বা অসংজ্ঞায়িত।

7.14. গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ধারণ (Determination of maximam value and minimam value) ঃ $f(x)$ ফাংশনের সন্ধিবিন্দু $x = a$ হলে টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots$$

যদি h অতিক্ষুদ্র সংখ্যা হয় তবে h এর উচ্চতর ঘাতের পদগুলি শূন্যের কাছাকাছি হইবে। এখন h এর দুই এর অধিক ঘাতের পদগুলি বাদ দিয়া পাই

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a)$$

$x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান বা গরিষ্ঠমান হওয়ার প্রয়োজনীয় শর্ত $f'(a) = 0$

$$\therefore f(a + h) - f(a) = \frac{h^2}{2} f''(a)$$

লঘিষ্টমান এবং গরিষ্ঠমান এর সংজ্ঞা হইতে জানি $f(a + h) - f(a) < 0$ হইলে $f(a)$ গরিষ্ঠমান হইবে এবং $f(a + h) - f(a) > 0$ হইলে $f(a)$ লঘিষ্ঠমান হইবে।

অর্থাৎ $\frac{h^2}{2} f''(a) < 0$ হইলে $f(a)$ গরিষ্ঠমান হইবেং এবং $\frac{h^2}{2} f''(a) > 0$ হইলে $f(a)$ লঘিষ্ঠমান হইবে.। যেহেতু $h^2 > 0$, সুতরাং গরিষ্ঠমানের জন্য $f''(a) < 0$ এ লঘিষ্ঠমানের জন্য $f''(a) > 0$.

উপপাদ্য ঃ যদি $f(x)$ ফাংশনের সন্ধি বিন্দু $x = a$ এবং $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ কিন্তু $f^{(n)}(a) \neq 0$ হয় তবে প্রমাণ কর ঃ

(i). n জোড় এবং $f^{(n)}(a) < 0$ হইলে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান থাকিবে

(ii). n জোড় এবং $f^{(n)}(a) > 0$ হইলে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান থাকিবে।

(iii). n বেজোড় হইলে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের কোন লঘিষ্ঠমান বা গরিষ্ঠমান থাকিবে না।

প্রমাণ ঃ সসীম ধারার টেলরের উপপাদ্য

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h) \quad \text{যেখানে } 0 < \theta < 1$$

দেওয়া আছে $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{n-1}(a) = 0$

$$\Rightarrow f(a + h) - f(a) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

h অতিক্ষুদ্র সংখ্যা এবং $f^{(n)}(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হইলে আমরা পাই

$$f^n(a + 0h) = f^n(a) \Rightarrow f(a + h) - f(a) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

(i). n জোড় এবং $f^{(n)} < 0$ হইলে $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) < 0$ হইবে

$$\Rightarrow f(a + h) - f(a) < 0 \Rightarrow f(a + h) < f(a)$$

ইহা নির্দেশ করিয়া $f(a)$ গরিষ্ঠমান অর্থাৎ $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান আছে।

(ii). n জোড় এবং $f^{[n]}(a) > 0$ হইলে উপরোক্তভাবে পাওয়া যাইবে। $f(a+h) > f(a)$ অর্থাৎ $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান আছে।

(iii). n বেজোড় হইলে $h > 0$ এর জন্য $h^n > 0$ এবং $h < 0$ এর জন্য $h^n < 0$ হইবে। অর্থাৎ h এর সকল মানের জন্য $f(a+h) > f(a)$ বা $f(a+h) < f(a)$ হইতে পারে, যাহা গরিষ্ঠমান বা লঘিষ্ঠমানের শর্ত মেনে চলে না। সুতরাং n বেজোড় হইলে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনের কোন লঘিষ্ঠমান বা গরিষ্ঠমান থাকিবে না।

উদাহরণ–1. দেখাও যে $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18x + 15$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 18 = 3(x^2 - 2x + 1) + 15 = 3(x-1)^2 + 15$

এখানে x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $f'(x) > 0$:

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।

উদাহরণ–2. দেখাও যে $f(x) = 1 - 13x + 6x^2 - x^3$ একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $f(x) = 1 - 13x + 6x^2 - x^3$

$\therefore f'(x) = -13 + 12x - 3x^2 = -3(x^2 - 4x + 4) - 1 = -3(x-2)^2 - 1$

এখানে x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $f'(x) < 0$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন।

উদাহরণ–3. দেখাও যে $x = 2$ বিন্দুতে $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad \therefore f'(2) = 3 \Rightarrow f'(2) > 0$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

উদাহরণ–4. দেখাও যে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^3 - x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$

$\Rightarrow f'(1) = 3 - 2 - 2 = -1 \quad \therefore f'(1) < 0$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।

উদাহরণ–5. নিম্নের ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং বৃদ্ধি পায় তাহা নির্ণয় কর $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12,\ 0 \le x \le 6$

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = 3(x-2)(x-4)$

$\therefore f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, 4$

$x = 2, 4$ বিন্দুগুলি $0 \le x \le 6$ ব্যবধিকে $0 \le x < 2$, $2 < x < 4$ এবং $4 < x \le 6$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন $0 \le x < 2$ ব্যবধিতে $f'(x)$ এর চিহ্ন = (–) (–) = ধনাত্মক। অর্থাৎ $f'(x) > 0$, সুতরাং $0 \le x < 2$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায় $2 < x < 4$ ব্যবধিতে $f'(x)$ এর চিহ্ন = (+) (–) = ঋনাত্মক। অর্থাৎ $f'(x) < 0$, সুতরাং $2 < x < 4$ ব্যবধিতে ফাংশনটি হ্রাস পায় এবং $4 < x \le 6$ ব্যবধিতে $f'(x)$ এর চিহ্ন = (+) (+) = ধনাত্মক। অর্থাৎ $f'(x) > 0$, সুতরাং $4 < x \le 6$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

উদাহরণ–6. $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে ক্রমহ্রাসমান বা ক্রমবর্ধমান তা নির্ণয় কর। **[NUH–2006]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

$\therefore f'(x) = -15 + 18x - 3x^2$

$= -3(x^2 - 6x + 5)$

$= -3(x-1)(x-5)$

এখানে $x = 1, 5$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ এবং বিন্দুগুলি সকল বাস্তব সংখ্যাকে $-\infty < x < 1$, $1 < x < 5$ এবং $5 < x < \infty$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-\infty < x < 1$ ব্যবধিতে $f'(x) < 0$

$\therefore -\infty < x < 1$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান।

আবার, $1 < x < 5$ ব্যবধিতে $f'(x) > 0$

$\therefore 1 < x < 5$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান।

আবার, $5 < x < \infty$ ব্যবধিতে $f'(x) < 0$

$\therefore 5 < x < \infty$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান।

উদাহরণ–7. কোন্ কোন্ ব্যবধিতে $f(x) = 5 + 12x - x^3$ ফাংশনটি বৃদ্ধি ও হ্রাস পায় তাহা নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 5 + 12x - x^3$

$\therefore f'(x) = 12 - 3x^2$

$= -3(x+2)(x-2)$

এখানে $x = -2, 2$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ এবং বিন্দুগুলি সকল বাস্তব সংখ্যাকে $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2$ এবং $2 < x < \infty$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-\infty < x < -2$ ব্যবধিতে $f'(x) < 0$

$\therefore -\infty < x < -2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।

আবার, $-2 < x < 2$ ব্যবধিতে $f'(x) > 0$

$\therefore -2 < x < 2$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

আবার, $2 < x < \infty$ ব্যবধিতে $f'(x) < 0$

$\therefore 2 < x < \infty$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।

উদাহরণ–8. যে সকল ব্যবধিতে $f(x) = x^3 - 3x + 5$ ফাংশনটি বৃদ্ধি বা হ্রাস পায়, সেই সকল ব্যবধি নির্ণয় কর। **[BSc(Pass)–2006]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^3 - 3x + 5$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$= 3(x + 1)(x - 1)$$

এখানে $x = -1, 1$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ এবং বিন্দুগুলি সকল বাস্তব সংখ্যাকে $-\infty < x < -1$, $-1 < x < 1$ এবং $1 < x < \infty$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-\infty < x < -1$ ব্যবধিতে $f'(x) > 0$

$\therefore -\infty < x < -1$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

আবার, $-1 < x < 1$ ব্যবধিতে $f'(x) < 0$

$\therefore -1 < x < 1$ ব্যবধিতে ফাংশনটি হ্রাস পায়।

আবার, $1 < x < \infty$ ব্যবধিতে $f'(x) > 0$

$\therefore 1 < x < \infty$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

উদাহরণ–9. ফাংশন $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ কোন ব্যবধিতে উর্ধগামী এবং কোন্ ব্যবধিতে নিম্নগামী? ফাংশন $f(x)$ এর লেখচিত্র অংকন কর। **[NUH–2002]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$
$$= 6(x^2 - 3x + 2)$$
$$= 6(x - 1)(x - 2)$$

এখানে, $x = 1, 2$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ এবং বিন্দুগুলি সকল বাস্তব সংখ্যাকে $-\infty < x < 1$, $1 < x < 2$ এবং $2 < x < \infty$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-\infty < x < 1$ ব্যবধিতে $f'(x) > 0$

$\therefore -\infty < x < 1$ ব্যবধিতে ফাংশনটি উর্ধগামী।

আবার, $1 < x < 2$ ব্যবধিতে $f'(x) < 0$

$\therefore 1 < x < 2$ ব্যবধিতে ফাংশনটি নিম্নগামী।

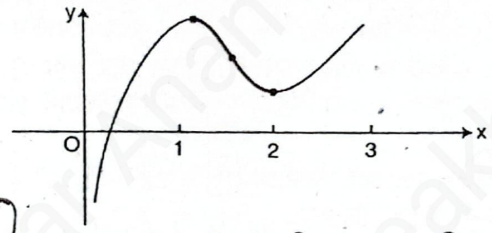
আবার, $2 < x < \infty$ ব্যবধিতে $f'(x) > 0$

$\therefore 2 < x < \infty$ ব্যবধিতে ফাংশনটি উর্ধগামী।

লেখচিত্র অংকন ঃ

x	0	·5	1	1·5	2	3
f(x)	–3	1	2	1·5	1	6

নিম্নে ফাংশনটির লেখচিত্র অংকন করা হইল ঃ



উদাহরণ–10. দেখাও যে, $f(x) = x^2$ ফাংশনটি $(0, \infty)$ ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান এবং $(-\infty, 0)$ ব্যবধিতে ক্রমহ্রাসমান। ইহা হইতে $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান বাহির কর। **[NUH(NM)–2003]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^2$

$$\therefore f'(x) = 2x$$

এখানে $x = 0$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$

এখন, $(-\infty, 0)$ ব্যবধিতে $f'(x) < 0$

$\therefore (-\infty, 0)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান।

আবার, $(0, \infty)$ ব্যবধিতে $f'(x) > 0$

$\therefore (0, \infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান।

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান ক্ষুদ্রতম, যেখানে ক্ষুদ্রতম মান $= f(0) = 0$.

উদাহরণ–11. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ ফাংশনটি যে সকল ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় এবং হ্রাস পায়, সেই সকল ব্যবধি নির্ণয় কর। ফাংশনটির লঘিষ্ঠমান ও গরিষ্ঠমান আলোচনা কর। **[NUH(NM)–2005]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$= 3(x^2 - 4x + 3)$$
$$= 3(x - 1)(x - 3)$$

এখানে, $x = 1, 3$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$ এবং বিন্দুগুলি সকল বাস্তব সংখ্যাকে $-\infty < x < 1$, $1 < x < 3$ এবং $3 < x < \infty$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-\infty < x < 1$ ব্যবধিতে $f'(x) > 0$

$\therefore -\infty < x < 1$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

আবার, $1 < x < 3$ ব্যবধিতে $f'(x) < 0$

$\therefore 1 < x < 3$ ব্যবধিতে ফাংশনটি হ্রাস পায়।

আবার, $3 < x < \infty$ ব্যবধিতে $f'(x) > 0$

$\therefore 3 < x < \infty$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।

যেহেতু $-\infty < x < 1$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায় এবং $1 < x < 3$ ব্যবধিতে ফাংশনটি হ্রাস পায়, সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির গরিষ্ঠমান আছে। যেখানে গরিষ্ঠমান = $f(1) = 9$.

আবার $1 < x < 3$ ব্যবধিতে ফাংশনটি হ্রাস পায় এবং $3 < x < \infty$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়, সুতরাং $x = 3$ বিন্দুতে ফাংশনটির লঘিষ্ঠমান আছে। যেখানে লঘিষ্ঠমান = $f(3) = 5$.

উদাহরণ–12. $[1, 5]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ ফাংশনের পরম গরিষ্ঠমান ও পরম লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$

সন্ধিবিন্দুর জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 30x + 36 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, 3$$

$\therefore$ সন্ধিবিন্দুতে ফাংশনের মান $f(2) = 2.2^3 - 15.2^2 + 36.2 = 28$

এবং $f(3) = 2.3^3 - 15.3^2 + 36.3 = 27$

প্রান্তবিন্দুতে ফাংশনের মান $f(1) = 2 - 15 + 36 = 23$

এবং $f(5) = 2.5^3 - 15.5^2 + 36.5 = 55$

সুতরাং ফাংশনের পরম গরিষ্ঠমান = 55 এবং পরম লঘিষ্ঠমান = 23.

উদাহরণ–13. প্রমাণ কর $y = x^3$ ফাংশন $(-\infty, 0)$ ব্যবধিতে কনকেইভ ডাউন এবং $(0, \infty)$ ব্যবধিতে কনকেইভ আপ। আরও প্রমাণ কর $x = 0$ ফাংশনের ইনফ্লেকশন বিন্দু।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $y = x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

যদি $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ হয় তবে, $6x = 0 \Rightarrow x = 0$, $(-\infty, 0)$ ব্যবধিতে $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x < 0$, সুতরাং $(-\infty, 0)$ ব্যবধিতে ফাংশন কনকেইভ ডাউন। $(0, \infty)$ ব্যবধিতে $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x > 0$, সুতরাং $(0, \infty)$ ব্যবধিতে ফাংশন কনকেইভ আপ।

আবার $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের কনকেইভ আপ এবং কনকেইভ ডাউন অংশ মিলিত হইয়াছে। সুতরাং $x = 0$ বিন্দু ফাংশনের ইনফ্লেকশন বিন্দু।

উদাহরণ–14. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ ফাংশনের প্রকৃতি পরীক্ষা কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 15x^4 - 15x^2$

$$\Rightarrow f''(x) = 60x^3 - 30x$$

ধরি $f''(x) = 0 \Rightarrow 60x^3 - 30x = 0 \Rightarrow 2x^3 - x = 0$

$$\Rightarrow x(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1) = 0 \quad \therefore x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

এখন $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ব্যবধিতে $f''(x) < 0$, সুতরাং $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি কনকেইভ ডাউন এবং $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ব্যবধিতে $f''(x) > 0$.

সুতরাং $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি কনকেইভ আপ। এবং $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ব্যবধিতে $f''(x) < 0$, সুতরাং $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি কনকেইভ ডাউন।

আবার $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$ ব্যবধিতে $f''(x) > 0$, সুতরাং $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি কনকেইভ আপ। যেহেতু $x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ বিন্দুগুলির দুই পার্শ্বে প্রদত্ত বক্ররেখাটি দুই প্রকারে বেঁকে যায় অর্থাৎ কনকেইভ আপ ও কনকেইভ ডাউন, সুতরাং $x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ বিন্দুগুলি প্রদত্ত বক্ররেখার ইনফ্লেকশন বিন্দু।

উদাহরণ–15. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ ফাংশন কোন্ ব্যবধিতে 'concave up' এবং কোন্ ব্যবধিতে 'concave down' হবে নির্ণয় কর। **[NUH–2002]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

এবং $f''(x) = 12x - 18$

$$= 12\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

এখানে, $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে $f''(x) = 0$, যাহা সকল বাস্তব সংখ্যাকে $-\infty < x < \frac{3}{2}$ ও $\frac{3}{2} < x < \infty$ ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

এখন, $-\infty < x < \frac{3}{2}$ ব্যবধিতে $f''(x) < 0$

$\therefore -\infty < x < \frac{3}{2}$ ব্যবধিতে ফাংশনটি 'concave down'.

আবার, $\frac{3}{2} < x < \infty$ ব্যবধিতে $f''(x) > 0$

$\therefore \frac{3}{2} < x < \infty$ ব্যবধিতে ফাংশনটি 'concave down'.

উদাহরণ–16. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$ ফাংশনের লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠমান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ঠ মানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \therefore x = 2, 4$$

যখন $x < 2$ তখন $f'(x)$ এর চিহ্ন = ধনাত্মক। অর্থাৎ $f'(x) > 0$ এবং $2 < x < 4$ ব্যবধিতে $f'(x)$ এর চিহ্ন = ঋণাত্মক। অর্থাৎ $f'(x) < 0$. যেহেতু x এর মান 2 অপেক্ষা সামান্য কম হইলে $f(x)$ ধনাত্মক এবং x এর মান 2 অপেক্ষা সামান্য বেশী হইলে $f(x)$ ঋণাত্মক হয়, কাজেই $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর গরিষ্ঠমান আছে এবং গরিষ্ঠমান

$$f(2) = 2^3 - 9.2^2 + 24.2 - 12 = 18$$

আবার $2 < x < 4$ হইলে $f'(x) < 0$ এবং $x > 4$ হইলে $f'(x) > 0$

যেহেতু x এর মান 4 অপেক্ষা সামান্য কম হইলে $f(x)$ ঋণাত্মক হয় এবং x এর মান 4 অপেক্ষা সামান্য বেশী হইলে $f(x)$ ধনাত্মক হয়, কাজেই $x = 4$ বিন্দুতে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠমান আছে এবং লঘিষ্ঠমান $f(4) = 4^3 - 9.4^2 + 24.4 - 12 = 4$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

ফাংশনের লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ বিন্দুতে $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \therefore x = 2, 4$$

এখন $f''(x) = 6x - 18 \quad \therefore f''(2) = 12 - 18 = -6 \quad \therefore f'(2) < 0$

সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনের গরিষ্টমান আছে, যেখানে গরিষ্ঠ মান

$f(2) = 2^3 - 9.2^2 + 24.2 - 12 = 8$ এবং $f''(4) = 24 - 18 = 6 \quad \therefore f''(4) > 0$

সুতরাং $x = 4$ বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান আছে, যেখানে লঘিষ্ঠমান = $f(4)$

$$= 4^3 - 9.4^2 + 24.4 - 12 = 4.$$

অর্থাৎ প্রদত্ত ফাংশনের $x = 2$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান 8 এবং $x = 4$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান 4.

উদাহরণ–17. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠমান, গরিষ্ঠমান ও সন্ধি বিন্দু নির্ণয় কর। **[BSc(Pass)–2006]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$$

এবং $f''(x) = 6x - 18$

সন্ধি বিন্দুতে, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 1, 5$$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের সন্ধি বিন্দু সমূহ $x = 1$ ও $x = 5$

এখন, $x = 1$ বিন্দুতে, $f''(1) = -12 \Rightarrow f''(1) < 0$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনের গরষ্ঠমান আছে।

যেখানে গরিষ্ঠমান = $f(1) = 4$

আবার, $x = 5$ বিন্দুতে, $f''(5) = 12 \Rightarrow f''(5) > 0$

$\therefore x = 5$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনের লঘিষ্ঠমান আছে।

যেখানে লঘিষ্ঠমান = $f(5) = -28$.

উদাহরণ–18. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ ফাংশনের গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর। **[NUH–2010, DUH–1979]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 9x \quad \therefore f''(x) = 6x - 12$$

লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ বিন্দুতে $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 1, 3$$

$x = 1$ বিন্দুতে $f''(1) = 6 - 12 = -6 \quad \therefore f''(1) < 0$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান আছে যেখানে গরিষ্ঠমান

$f(1) = 1 - 6 + 9 + 5 = 9$, $x = 3$ বিন্দুতে $f''(3) = 18 - 6 = 6 \quad \therefore f''(3) > 0$

সুতরাং $x = 3$ বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান আছে যেখানে লঘিষ্ঠমান

$$f(3) = 27 - 54 + 27 + 5 = 5.$$

উদাহরণ–19. $f(x) = (x-2)(x-3)^2$ এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠমান নির্ণয় কর। **[RUH–1972]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = (x-2)(x-3)^2 = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 16x + 21$ এবং $f''(x) = 6x - 16$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ বিন্দুতে $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16x + 21 = 0$

$$\Rightarrow (3x-7)(x-3) = 0 \quad \therefore x = \frac{7}{3}, 3$$

$x = \frac{7}{3}$ বিন্দুতে $f''\left(\frac{7}{3}\right) = 6\left(\frac{7}{3}\right) - 16 = -2 \quad \therefore f''\left(\frac{7}{3}\right) < 0$

সুতরাং $x = \frac{7}{3}$ বিন্দুতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান আছে

যেখানে গরিষ্ঠ মান $f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{4}{27}$; $x = 3$ বিন্দুতে $f''(3) = 18 - 16 = 2$

$\therefore f''(3) > 0$

সুতরাং $x = 3$ বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান আছে যেখানে লঘিষ্ঠমান $f(3) = 0$.

উদাহরণ–20. দেখাও যে, $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$ ফাংশনটির মান $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে বৃহত্তম, $x = 1$ বিন্দুতে ক্ষুদ্রতম এবং $x = \frac{3}{4}$ বিন্দুটি $f(x)$ ফাংশনের ইনফ্লেকশন বিন্দু।

[NUH(NM)–2003, B.Sc(Pass)–2009, 2010]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$

$$\therefore f'(x) = 12x^2 - 18x + 6$$

এবং $$f''(x) = 24x - 18 = 24\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত হইতে পাই,

$$f'(x) = 0$$
$$\Rightarrow 12x^2 - 18x + 6 = 0$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (2x - 1)(x - 1) = 0$$
$$\therefore x = \frac{1}{2}, 1$$

এখন, $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - 18 = -6$ (ঋণাত্মক)

$\therefore x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনটির বৃহত্তম মান আছে।

আবার, $x = 1$ বিন্দুতে, $f''(1) = 6$ (ধনাত্মক)

$\therefore$ $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির ক্ষুদ্রতম মান আছে।

আবার, ফাংশনটির ইনফ্লেকশন বিন্দুতে $f''(x) = 0$

$$\Rightarrow 24x - 18 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

এখন, $x < \frac{3}{4}$ ব্যবধিতে $f''(x) < 0$

$\therefore x < \frac{3}{4}$ ব্যবধিতে ফাংশনটি কনকেইভ ডাউন।

এবং $x > \frac{3}{4}$ ব্যবধিতে $f''(x) > 0$

$\therefore x > \frac{3}{4}$ ব্যবধিতে ফাংশনটি কনকেইভ আপ।

সুতরাং $x = \frac{3}{4}$ বিন্দুটি প্রদত্ত ফাংশনের ইনফ্লেকশন বিন্দু।

উদাহরণ–21. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ এর বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম এবং বক্রতার বিন্দুসমূহ নির্ণয় কর। দেখাও যে বক্রতার বিন্দু (Inflexion point) বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বিন্দুর মাঝখানে অবস্থিত। **[NUH(NM)–2006]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 12x - 18$$

এবং $$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 12 = 12(x - 1)$$

বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বিদ্যমান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত হইতে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow 6x^2 - 12x - 18 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$
$$\therefore x = -1, 3$$

এখন, $x = -1$ বিন্দুতে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -24$ অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

$\therefore x = -1$ বিন্দুতে ফাংশনটির বৃহত্তম মান আছে।

আবার, $x = 3$ বিন্দুতে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 24$ অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

$\therefore x = 3$ বিন্দুতে ফাংশনটির ক্ষুদ্রতম মান আছে।

আবার বক্রতার বিন্দুতে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$\Rightarrow 12x - 12 = 0$$
$$\Rightarrow x = 1$$

এখন, $x < 1$ ব্যবধিতে $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

$\therefore x < 1$ ব্যবধিতে ফাংশনটি কনকেইভ ডাউন।

আবার, $x > 1$ ব্যবধিতে $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

$\therefore$ $x > 1$ ব্যবধিতে ফাংশনটি কনকেইভ আপ।

যেহেতু $x < 1$ ব্যবধিতে ফাংশনটি কনকেইভ ডাউন এবং $x > 1$ ব্যবধিতে ফাংশনটি কনকেইভ আপ, সুতরাং $x = 1$ বিন্দুটি বক্রতার বিন্দু।

আবার, $x = -1$ বৃহত্তম বিন্দু, $x = 3$ ক্ষুদ্রতম বিন্দু এবং $x = 1$ বক্রতার বিন্দু হওয়ায় বলা যায়, বক্রতার বিন্দু বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বিন্দুর মাঝখানে অবস্থিত।

উদাহরণ–22. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ ফাংশনটির চরম বিন্দুগুলি নির্ণয় কর এবং চরমমানগুলিও বাহির কর। **[NUH(NM)–2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

এবং $f''(x) = 12x - 6$

আমরা জানি, চরম বিন্দুতে $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$
$$\therefore x = -1, 2$$

এখন, $f''(-1) = -18$ এবং $f''(2) = 18$

$\therefore x = -1$ বিন্দুতে ফাংশনটির গরিষ্ঠমান এবং $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটির লঘিষ্ঠমান আছে। অর্থাৎ $x = -1$ ও $x = 2$ চরম বিন্দুসমূহ, যেখানে চরমমান সমূহ

$$f(-1) = 7 \text{ এবং } f(2) = -20.$$

উদাহরণ–23. $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}$ ফাংশনের গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর। **[RUH–1988]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}$ $\therefore f'(x) = x^4 - x^3$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x-1) = 0 \therefore x = 0, 1$

এখন $f''(x) = 4x^3 - 3x^2$, $f'''(x) = 12x^2 - 6x$, $f^{v}(x) = 24x - 6$

$\therefore x = 0$ বিন্দুতে $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$ এবং $f^{v}(0) = -6$ অর্থাৎ $f^{v}(0) < 0$

সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান আছে যেখানে গরিষ্ঠমান $f(0) = 0$

$x = 1$ বিন্দুতে $f''(1) = 1 \Rightarrow f''(1) > 0$

সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান আছে যেখানে লঘিষ্ঠমান

$$f(1) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20}.$$

উদাহরণ–24. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ ফাংশনের লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠমান নির্ণয় কর। **[DUH–1983]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$.

$\therefore f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$, $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$

এবং $f'''(x) = 60x^2 - 120x + 30$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 3x^2 = 0$ $\therefore x = 0, 1, 3$

এখন $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 30 \neq 0$। সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের গরিষ্ঠমান অথবা লঘিষ্ঠমান নাই। $f''(1) = 20 - 60 + 30 = -10 < 0$। সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর গরিষ্ঠমান আছে। যেখানে গরিষ্ঠমান $f(1) = 1 - 5 + 5 - 1 = 0$ এবং $f''(3) = 20.27 - 60.9 + 30.3 = 90 > 0$

সুতরাং $x = 3$ বিন্দুতে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠমান আছে যেখানে লঘিষ্ঠমান $f(3) = -28$.

উদাহরণ–25. $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{36}{2-x}$ ফাংশনের লঘিষ্ঠমান ও গরিষ্ঠমান নির্ণয় কর।

[DUH–1982]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{36}{2-x}$

$\therefore f'(x) = \frac{-4}{x^2} + \frac{36}{(2-x)^2}$ এবং $f''(x) = \frac{8}{x^3} + \frac{72}{(2-x)^3}$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4}{x^2} + \frac{36}{(2-x)^2} = 0$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2}, -1$$

এখন $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 8.2^3 + 72.\frac{8}{27}$ $\therefore f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

সুতরাং $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান আছে যেখানে লঘিষ্ঠমান $f\left(\frac{1}{2}\right) = 32$.

আবার $f''(-1) = -8 + \frac{72}{27} = -\frac{16}{3} < 0$

সুতরাং $x = -1$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনের গরিষ্ঠমান আছে যেখানে গরিষ্ঠমান $(-1) = 8$.

উদাহরণ–26. $\frac{(x+1)(x+4)}{(x-1)(x-4)}$ এর গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর।

[DUH–1978]

সামধান ঃ ধরি $f(x) = \frac{(x+1)(x+4)}{(x-1)(x-4)} = 1 - \frac{10}{3(x-1)} + \frac{40}{3(x-4)}$

$\therefore f'(x) = \frac{10}{3(x-1)^2} - \frac{40}{3(x-4)^2}$ এবং $f''(x) = -\frac{20}{3(x-1)^3} + \frac{80}{3(x-4)^3}$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্টমানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{4}{(x-4)^2}$ $\therefore x = 2, -2$

এখন $f''(2) = -10 \Rightarrow f''(2) < 0$। সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের গরিষ্ঠমান আছে। যেখানে গরিষ্ঠমান $f(2) = -9$। আবার $f''(-2) = \frac{20}{81} - \frac{20}{162} = \frac{20}{162} > 0$। সুতরাং $x = -2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের লঘিষ্ঠমান আছে। যেখানে লঘিষ্ঠমান $f(-2) = -\frac{1}{9}$.

উদাহরণ–27. $5x^6 - 18x^5 + 15x^4 - 10$ এর গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = 5x^6 - 18x^5 + 15x^4 - 10$

$\therefore f'(x) = 30x^5 - 90x^4 + 60x^3 \qquad f''(x) = 150x^4 - 360x^3 + 180x^2$

$f'''(x) = 600x^3 - 1080x^2 + 360x$ এবং $f^{iv}(x) = 1800x^2 - 2160x + 360$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow 30x^5 - 90x^4 + 60x^3 = 0 \quad \therefore x = 0, 1, 2$

এখন $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$ এবং $f^{iv}(0) = 360 > 0$। সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ লঘিষ্ঠমান আছে যেখানে লঘিষ্ঠমান $f(0) = -10$। আবার $f''(1) = -30 < 0$, সুতরাং $x = 1$ বিন্দু $f(x)$ ফাংশনের গরিষ্ঠমান আছে, যেখানে গরিষ্টমান $f(1) = -8$ এবং $f''(2) = 240 > 0$, সুতরাং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠমান আছে এবং লঘিষ্ঠমান $f(2) = -26$.

উদাহরণ–28. $xy = 4$ হইলে $4x + 9y$ এর গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $xy = 4 \quad \therefore y = \frac{4}{x}$

ধরি $u = 4x + 9y = 4x + \frac{36}{x} \quad \therefore \frac{du}{dx} = 4 - \frac{36}{x^2}$ এবং $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{72}{x^3}$ লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠমানের জন্য $\frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \quad \therefore x = -3, 3$। যখন $x = -3$ তখন $\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{72}{27} < 0$। সুতরাং $x = -3$ বিন্দুতে u এর গরিষ্ঠমান আছে। যেখানে u এর গরিষ্ঠমান $u = -24$। যখন $x = 3$ তখন $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{72}{27} > 0$। সুতরাং $x = 3$ বিন্দুতে u এর লঘিষ্ঠমান আছে, যেখানে লগিষ্ঠমান $u = 24$.

উদাহরণ–29. $4e^{2x} + 9e^{-2x}$ ফাংশনের লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর। **[JUH–1982]**

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = 4e^{2x} + 9e^{-2x}$

$\therefore f'(x) = 8e^{2x} - 18e^{-2x}$ এবং $f''(x) = 16e^{2x} + 36e^{-2x}$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow 8e^{2x} - 18e^{-2x} = 0$

$$\Rightarrow e^{2x} = \frac{3}{2} \qquad \therefore x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore f''\left(\frac{1}{2} ln \frac{3}{2}\right) = 16\left(\frac{3}{2}\right) + 36\left(\frac{2}{3}\right) = 48 \quad \therefore f''\left(\frac{1}{2} ln \frac{3}{2}\right) > 0$$

সুতরাং $x = \frac{1}{2} ln \frac{3}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনের লঘিষ্ঠমান আছে যেখানে লঘিষ্ঠমান

$$f\left(\frac{1}{2} ln \frac{3}{2}\right) = 12.$$

উদাহরণ–30. দেখাও যে $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ এর জন্য $x^2 ln\left(\frac{1}{x}\right)$ গরিষ্ঠ। **[RUH–1990]**

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = x^2 ln\left(\frac{1}{x}\right) = -x^2 ln x$

$\therefore f'(x) = -2x ln x - x$ এবং $f''(x) = -2 ln x - 3$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মানের জন্য $f'(x) = 0$

$\Rightarrow -2x ln x - x = 0 \Rightarrow x(ln x^2 + 1) = 0 \quad \therefore x = 0, \frac{1}{\sqrt{e}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ বিন্দুতে $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -2\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -2 < 0$

সুতরাং $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ এর জন্য $x^2 ln\left(\frac{1}{x}\right)$ গরিষ্ঠ।

উদাহরণ–31. দেখাও যে $x = -1$ বিন্দুতে $y = xe^x$ বক্ররেখার লঘিষ্ঠ কোটি আছে। **[RUH–1966]**

সমাধান ঃ $y = xe^x \Rightarrow f(x) = xe^x$

$\therefore f'(x) = e^x(x + 1)$ এবং $f''(x) = e^x + e^x(x + 1)$

লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠমানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x + 1) = 0$

$\therefore x = -1 \quad \therefore f''(-1) = \frac{1}{e} > 0$

সুতরাং $x = -1$ বিন্দুতে $y = xe^x$ বক্ররেখায় লঘিষ্ঠ কোটি আছে।

উদাহরণ–32. দেখাও যে $x = \frac{\pi}{6}$ বিন্দুতে $\sqrt{3} \sin x + 3 \cos x$ গরিষ্ঠ।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \sqrt{3} \sin x + 3 \cos x$

$\therefore f'(x) = \sqrt{3} \cos x - 3 \sin x$ এবং $f''(x) = -\sqrt{3} \sin x - 3 \cos x$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore x = \frac{\pi}{6}$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) < 0$। সুতরাং $x = \frac{\pi}{6}$ বিন্দুতে প্রদত্ত রাশি গরিষ্ঠ।

উদাহরণ–33. দেখাও যে $x = \frac{\pi}{3}$ এর জন্য $\sin^3 x . \cos x$ গরিষ্ঠ।

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \sin^3 x \cos x$

$\therefore f'(x) = 3 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x = \sin^2 x(4\cos^2 x - 1)$

এবং $f''(x) = 2 \sin x \cos x(4 \cos^2 x - 1) - 8 \cos x \sin^3 x$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 < 0$। সুতরাং $x = \frac{\pi}{3}$ এর জন্য $\sin^3 x \cos x$ গরিষ্ঠ।

উদাহরণ-34. দেখাও যে $y^2 = (x-a)^2(x-b)$ এর ইনফ্লেকশন বিন্দু $3x + a = 4b$ রেখার উপর অবস্থিত। **[DUH-1977, 1981]**

সমাধান ঃ $y^2 = (x-a)^2(x-b) \Rightarrow y = (x-a)\sqrt{x-b}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x-a-2b}{2(x-b)^{1/2}}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x+a-4b}{4(x-b)^{3/2}}$

ইনফ্লেকশন বিন্দুর জন্য $\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow 3x + a - 4b = 0$

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের ইনফ্লেকশন বিন্দু $3x + a = 4b$ রেখার উপর অবস্থিত।

উদাহরণ-35. 100 মিটার পরিসীমা বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কখন গরিষ্ঠ হইবে? **[NUH(NM)-2007]**

সমাধান ঃ মনে করি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার

$\therefore 2(x+y) = 100$

$\Rightarrow x + y = 50$

$\Rightarrow y = 50 - x$

এখন, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $s = xy$

$= x(50-x)$

$\therefore \frac{ds}{dx} = 50 - 2x$

এবং $\frac{d^2s}{dx^2} = -2$

এখানে, $x = 25$ এর জন্য $\frac{ds}{dx} = 0$ এবং $\frac{d^2s}{dx^2} < 0$

$\therefore x = 25$ এর জন্য s এর মান গরিষ্ঠ হবে।

এইক্ষেত্রে $y = 50 - 25 = 25$

$\therefore x = y = 25$ অর্থাৎ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান হলে s এর মান গরিষ্ঠ হবে।

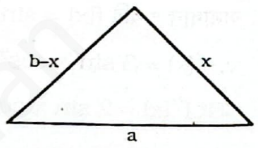
সুতরাং আয়তক্ষেত্রটি বর্গক্ষেত্র হলে উহার ক্ষেত্রফল গরিষ্ঠ হবে।

উদাহরণ-36. নির্দিষ্ট ভূমি বিশিষ্ঠ কোন ত্রিভূজের অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্ঠি ও নির্দিষ্ট। দেখাও যে ঐ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হইবে যখন ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান। **[DUH-1964]**

সমাধান ঃ মনে করি ত্রিভূজের ভূমির দৈর্ঘ্য a এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি b.

উহাদের একটির দৈর্ঘ্য x হইলে অপরটির দৈর্ঘ্য $b - x$

যদি ত্রিভুজের পরিসীমা 2s হয় তবে



$2s = a + x + b - x \quad \therefore s = \frac{a+b}{2}$

$\therefore$ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল $A = \sqrt{s(s-a)(s-x)(s-b+x)}$

$\Rightarrow A = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a+b-2x}{2}\right)\left(\frac{a-b+2x}{2}\right)}$

$\therefore A^2 = \frac{b^2-a^2}{4} \cdot \frac{a^2-(2x-b)^2}{4}$

x এর সম্পর্কে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $2A.\frac{dA}{dx} = -\frac{b^2-a^2}{4}(2x-b)$

আবার x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$2\left(\frac{dA}{dx}\right)^2 + 2A\frac{d^2A}{dx^2} = -\frac{b^2-a^2}{2} \quad \ldots\ldots (1)$$

ক্ষেত্রফল A বৃহত্তম হইবে যদি $\frac{dA}{dx} = 0$ হয় $\Rightarrow 2x - b = 0 \quad \therefore x = \frac{b}{2}$

$(1) \Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} = -\frac{b^2-a^2}{4A}$ যখন $x = \frac{b}{2} \quad \therefore \frac{d^2A}{dx^2} < 0 \quad [\because b > a]$

সুতরাং $x = \frac{b}{2}$ এর জন্য ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হয়।

এইক্ষেত্রে অপর বাহুর দৈর্ঘ্য $= b - x = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$

সুতরাং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হইলে বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হয়।

উদাহরণ-37. দেখাও যে $2\pi a^2$ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি খাড়া সিলিন্ডারের বৃহত্তম আয়তন $\frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

সমাধান ঃ মনে করি সিলিন্ডারের উচ্চতা h এবং ব্যাসার্ধ r

$\therefore$ সিলিন্ডারের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

দেওয়া আছে ক্ষেত্রফল $2\pi a^2 \quad \therefore 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi a^2 \Rightarrow rh = a^2 - r^2$

এখন সিলিন্ডারের আয়তন $V = \pi r^2 h = \pi r(rh) = \pi r(a^2 - r^2)$

$\therefore \frac{dV}{dr} = \pi a^2 - 3\pi r^2$ এবং $\frac{d^2v}{dr^2} = -6\pi r$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মানের জন্য $\frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow \pi a^2 - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{3} \quad \therefore r = \frac{a}{\sqrt{3}}$

যখন $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$ তখন $\frac{d^2v}{dr^2} = -6\pi\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) < 0$

সুতরাং $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$ এর জন্য সিলিন্ডারের আয়তন বৃহত্তম হয়।

$\therefore$ বৃহত্তম আয়তন $V = \pi r(a^2 - r^2) = \pi . \frac{a}{\sqrt{3}}\left(a^2 - \frac{a^2}{3}\right) = \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}}$

উদাহরণ–38. নির্দিষ্ট আয়তন বিশিষ্ট দুই প্রান্ত আবদ্ধ একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার নির্মান করিতে হইবে। দেখাও যে, পাত্রটি সর্বাপেক্ষা কম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট টিন দ্বারা তৈরী করা হইলে উহার উচ্চতা ভূমির ব্যাসের সমান। **[DUH–1974]**

সমাধান ঃ মনে করি সিলিন্ডারের উচ্চতা h এবং ব্যাসার্ধ r

$\therefore$ সিলিন্ডারের আয়তন $\pi r^2 h = V$ (নির্দিষ্ট) $\Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$

সিলিন্ডারের ক্ষেত্রফল $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \frac{2v}{r}$

$\therefore \frac{ds}{dr} = 4\pi r - \frac{2v}{r^2}$ এবং $\frac{d^2s}{dr^2} = 4\pi + \frac{4v}{r^3}$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠমানের জন্য $\frac{ds}{dr} = 0 \Rightarrow r = \left(\frac{v}{2\pi}\right)^{1/3}$। এইক্ষেত্রে $\frac{d^2s}{dr^2} = 12\pi > 0$

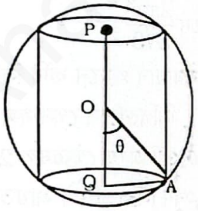
সুতরাং $r = \left(\frac{v}{2\pi}\right)^{1/3}$ এর জন্য সিলিন্ডারের ক্ষেত্রফল লঘিষ্ঠ হইবে।

এখন $v = \pi r^2 h \Rightarrow 2\pi r^3 = \pi r^2 h \quad [\because v = 2\pi r^3] \Rightarrow h = 2r$

সুতরাং কম ক্ষেত্রফলের জন্য উচ্চতা ভূমির ব্যাসের সমান।

উদাহরণ–39. a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের মধ্যে একটি সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে। দেখাও যে সিলিন্ডারের আয়তন বৃহত্তম হইলে উহার ব্যাসার্ধ $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ এবং উচ্চতা $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

সমাধান ঃ মনে করি O কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের মধ্যে একটি সিলিন্ডার স্থাপন করা হইয়াছে যাহার উচ্চতা PQ = h এবং ভূমির ব্যাসার্ধ QA = r.



ΔAQO হইতে পাই $QO = \sqrt{a^2 - r^2}$

এখন $h = PQ = 2.QO = 2\sqrt{a^2 - r^2}$

$\therefore$ সিলিন্ডারের আয়তন $V = \pi r^2 h = 2\pi r^2 \sqrt{a^2 - r^2}$

$\therefore \frac{dv}{dr} = \frac{2\pi(2a^2 r - 3r^3)}{\sqrt{a^2 - r^2}}$ এবং $\frac{d^2v}{dr^2} = \frac{2\pi(2a^2 - 9r^2)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \frac{2\pi(2a^2 r - 3r^3).2r}{2(a^2 - r^2)^{3/2}}$

বৃহত্তম আয়তনের জন্য $\frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow 2a^2 = 3r^2 \quad \therefore r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

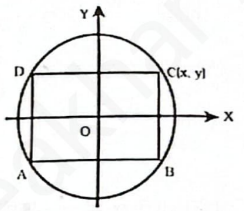
যখন $r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ তখন $\frac{d^2v}{dr^2} < 0$। সুতরাং $r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ এর জন্য আয়তন বৃহত্তম হইবে।

এইক্ষেত্রে উচ্চতা $h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

উদাহরণ–40. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের অন্তর্লিখিত সর্বাপেক্ষা বৃহৎ আয়তক্ষেত্র নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ..... (1)

মনে করি ABCD আয়তক্ষেত্রটি উপবৃত্তটির মধ্যে আছে। মনে করি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য AB = 2x এবং প্রস্থ BC = 2y.



$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A = 2x.2y = 4xy$

$\Rightarrow A = \frac{4b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2}$ [(1) এর সাহায্যে]

$\therefore \frac{dA}{dx} = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ এবং $\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{4bx(2x^2 - 3a^2)}{a(a^2 - x^2)^{3/2}}$

এখন বৃহৎ আয়তক্ষেত্রের জন্য $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

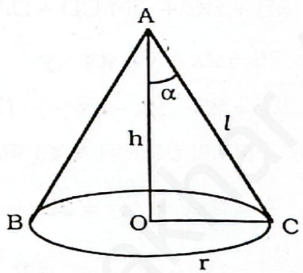
যখন $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ তখন $\frac{d^2A}{dx^2} < 0$

সুতরাং $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ এর জন্য আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হইবে।

$\therefore$ বৃহৎ ক্ষেত্রফল $A = \frac{4b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2} = 4. \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = 2ab$

উদাহরণ–41. দেখাও যে নির্দিষ্ট বক্রতল বিশিষ্ট একটি খাড়া বৃত্তাকার কোণের বৃহত্তম আয়তনের জন্য উহার অর্ধশীর্ষ কোণ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **[DUH–1975]**

সমাধান ঃ মনে করি ABC কোণের উচ্চতা h, ভূমির ব্যাসার্ধ r, অর্ধশীর্ষ কোণ α এবং হেলানো উচ্চতা l.



ΔAOC হইতে পাই $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{l}{r}$

$\therefore l = r \operatorname{cosec}\alpha$ এবং $\cot\alpha = \frac{h}{r}$

$\therefore h = r\cot\alpha$

কোণের বক্রতল $\pi r l = s$ (নির্দিষ্ট)

$\Rightarrow r = \frac{s}{\pi l} = \frac{s}{\pi r \operatorname{cosec}\alpha} \Rightarrow r^2 = \frac{s}{\pi}\sin\alpha \quad \therefore r = \sqrt{\frac{s}{\pi}\sin\alpha}$

এখন কোণের আয়তন $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow v = \frac{1}{3}\pi r^2 . r\cot\alpha$

$= \frac{s^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\sin\alpha}. \cos\alpha = k \sin^{1/2}\alpha \cos\alpha, \; k = \frac{s^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$

$$\therefore \frac{dv}{d\alpha} = k\left\{\frac{\cos^2\alpha}{2\sqrt{\sin\alpha}} - (\sin\alpha)^{3/2}\right\} \text{ এবং}$$

$$\frac{d^2v}{d\alpha^2} = k\left\{\frac{-2\cos\alpha\sin\alpha}{2\sqrt{\sin\alpha}} - \frac{\cos^3\alpha}{4(\sin\alpha)^{3/2}} - \frac{3}{2}(\sin\alpha)^{1/2}\cos\alpha\right\}$$

বৃহত্তম আয়তনের জন্য $\frac{dv}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha \quad \therefore \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

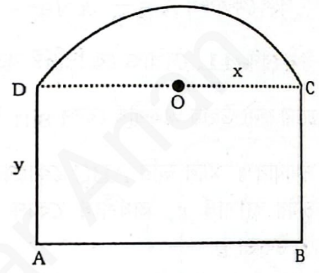
যখন $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ তখন $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$। এইক্ষেত্রে $\frac{d^2v}{da^2} < 0$

সুতরাং $\alpha = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ হইলে কোণের আয়তন বৃহত্তম হইবে।

অর্থাৎ বৃহত্তম কোণের আয়তনের জন্য উহার অর্ধশীর্ষ কোণ $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

উদাহরণ–42. একটি জানালার ফ্রেমের উপরের অংশটুকু অর্ধবৃত্ত। যদি জানালাটির পরিসীমা 25′ হয়, তবে দেখাও যে অর্ধবৃত্তটির ব্যাসার্ধ আয়তক্ষেত্রের উচ্চতার সমান হইলে সর্বাপেক্ষা বেশী পরিমাণ আলো প্রবেশ করিবে।

সমাধান ঃ মনে করি জানালার প্রস্থ 2x, উচ্চতা y তাহা হইলে অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ x হইবে।



জানালার পরিসীমা

= AB + BC + চাপ CD + DA

$\Rightarrow 25 = 2x + y + \pi x + y$

$\therefore 2y = 25 - 2x - \pi x$ ..... (1)

যদি জানালার ক্ষেত্রফল A হয় তবে

$$A = 2xy + \frac{\pi x^2}{2} = 25x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$$

$$\therefore \frac{dA}{dx} = 25 - 4x - \pi x \text{ এবং } \frac{d^2A}{dx^2} = -4 - \pi$$

জানালার বৃহত্তম ক্ষেত্রফলের জন্য $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{4+\pi}$

যেহেতু $\frac{d^2A}{dx^2} < 0$, সুতরাং $x = \frac{25}{4+\pi}$ হইলে জানালার ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হইবে অর্থাৎ বেশী আলো প্রবেশ করিবে। x এর মান (1) এ বসিয়ে পাই $y = \frac{25}{4+\pi} = x$

$\Rightarrow$ আয়তক্ষেত্রের উচ্চতা = অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ।

উদাহরণ–43. একটি ফার্মে উৎপাদিত দ্রব্যের প্রত্যেকটি টাকা 12.00 দরে বিক্রয় করে। x একক উৎপাদিতের ব্যয় $C = 20 + .6x + .01x^2$ হইলে সর্বচ্চ মুনাফা নির্ণয় কর। **[NUH–2006, DUH–1989]**

সমাধান ঃ $C = 20 + .6x + .01x^2 \quad \therefore \frac{dc}{dx} = .6 + .02x$ এবং $\frac{d^2c}{dx^2} = .02$

সর্বনিম্ন ব্যয়ের জন্য $\frac{dc}{dx} = 0 \Rightarrow x = -30$

এইক্ষেত্রে $\frac{d^2c}{dx^2} > 0$। সুতরাং $x = -30$ হইলে ব্যয় সর্বনিম্ন হয়।

$\therefore$ সর্বনিম্ন ব্যয় $c = 20 - 18 + 9 = 11$

$\therefore$ প্রত্যেক দ্রব্যের সর্বচ্চ মুনাফা = 12 – 11 = 1 টাকা।

উদাহরণ–44. একটি আম বাগানে প্রতি একরে 30টি গাছ আছে এবং প্রতি গাছে গড়ে 400 টি আম ধরে। প্রতি একরে অতিরিক্ত একটি গাছের জন্য মোটামুটি 10টি আমের ফলন কমে। আমের সর্বচ্চ ফলন পাওয়ার জন্য প্রতি একরে কতটি গাছ থাকা উচিত? **[DUH–87]**

সমাধান ঃ মনে করি সর্বোচ্চ ফলনের জন্য প্রতি একরে গাছের সংখ্যা 30 + x থাকা দরকার। তাহা হইলে প্রতি গাছের আমের সংখ্যা = 400 – 10x যদি আমের ফলন y হয়, তবে

$$y = (30 + x)(400 - 10x) = 1200 + 100x - 10x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 100 - 20x \text{ এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = -20$$

সর্বোচ্চ ফলনের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 5$

এইক্ষেত্রে $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$। সুতরাং $x = 5$ হইলে ফলন সর্বোচ্চ হইবে।

অর্থাৎ সর্বোচ্চ ফলনের জন্য প্রতি একরে আম গাছের সংখ্যা হইবে = 30 + 5 = 35.

উদাহরণ–45. জনৈক কৃষক 800 ফুট দীর্ঘ (লম্বা) তারের বেড়ার সাহায্যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র ঘিরিয়া ফেলিতে পারে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর। **[NUH–2005, 2009]**

সমাধান ঃ মনে করি, কৃষক 800 ফুট দীর্ঘ তারের সাহায্যে x ফুট দৈর্ঘ্য ও y ফুট প্রস্থ বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র ঘিরিয়া ফেলিতে পারে।

$$\therefore 2(x + y) = 800$$
$$\Rightarrow x + y = 400$$
$$\Rightarrow y = 400 - x$$

এখন, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A = xy$

$$= x(400 - x)$$

$$\therefore \frac{dA}{dx} = 400 - 2x \text{ এবং } \frac{d^2A}{dx^2} = -2$$

এখানে $x = 200$ এর জন্য $\frac{dA}{dx} = 0$ এবং $\frac{d^2A}{dx^2} < 0$

$\therefore x = 200$ এর জন্য A এর মান বৃহত্তম হয়।

এইক্ষেত্রে, $y = 400 - 200 = 200$

সুতরাং কৃষক তারের বেড়া দ্বারা যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র ঘিরিয়া ফেলে তাহার দৈর্ঘ্য 200 ফুট এবং প্রস্থ 200 ফুট।

উদাহরণ–46. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 20; উহাদের একটি সংখ্যার ঘন এবং অপর সংখ্যার গুণফল গরিষ্ঠ হলে সংখ্যা দু'টি নির্ণয় কর। [Sum of two numbers is 20 such that the cube of one multiplied with the other is a maximum. Find the two numbers.] **[NUH–2010(Old)]**

সমাধান ঃ মনে করি একটি সংখ্যা x. তাহলে অপর সংখ্যাটি হবে $20 - x$.

প্রথম সংখ্যার ঘন ও দ্বিতীয় সংখ্যার গুণফল $= x^3(20 - x)$

$= 20x^3 - x^4$.

গুণফল f(x) হলে $f(x) = 20x^3 - x^4$

$\Rightarrow f'(x) = 60x^2 - 4x^3$ এবং $f''(x) = 120x - 12x^2$

এখন $f'(x) = 0$ হলে পাই $60x^2 - 4x^3 = 0$

$\Rightarrow 4x^2(15 - x) = 0$

$\Rightarrow x = 15$, যেহেতু $x = 0$ হতে পারে না।

$x = 15$ হলে $f''(x) = 120.15 - 12.15^2 = -360$

$\therefore$ গুণফল গরিষ্ঠ হবে যখন $x = 15$.

অতএব সংখ্যাদ্বয় 15 ও $20 - 15$ অর্থাৎ 15 ও 5. **(Ans)**

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

7.1. কোন বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by increasing function at a point?)

Ans : যদি $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের ক্ষেত্রে $\lim_{h\to 0_-} f(a + h) < f(x) < \lim_{h\to 0_+} f(a + h)$ হয়, তবে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটিকে ক্রমবর্ধমান ফাংশন বলে।

7.2. কোন শর্তে $y = f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান হইবে? (Which is the condition where is the function $y = f(x)$ increasing at $x = a$?)

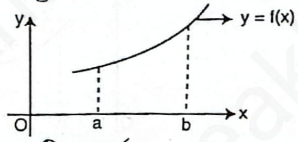
Ans : যদি $f'(a) > 0$ হয় তবে $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান হইবে।

7.3. একটি ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by increasing function in a interval?)

Ans : (a, b) এর অন্তর্গত প্রত্যেক x এর মানের জন্য $f'(x) > 0$ হইলে ঐ ব্যবধিতে $y = f(x)$ ফাংশনটিকে ক্রমবর্ধমান ফাংশন বলে।

7.4. $y = f(x)$ এর একটি নমুনা লেখচিত্র আঁক যেখানে ফাংশনটি (a, b) ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান। (Draw a sample graph of $y = f(x)$ where the function is increasing in the interval (a, b).)

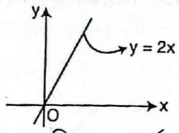
Ans :



চিত্রে (a, b) ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান।

7.5. একটি ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান। (Give an example of a function where the function is increasing in the interval $(-\infty, \infty)$.)

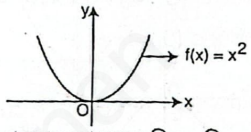
Ans :



$f(x) = 2x$ ফাংশনটি $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান। কারণ $f'(x) = 2 > 0$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$.

7.6. একটি ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে $(0, \infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান। (Give an example of a function where the function is increasing in the interval $(0, \infty)$.)

Ans : $f(x) = x^2$ ফাংশনটি $(0, \infty)$ ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান। কারণ $f'(x) = 2x > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.



7.7. কোন বিন্দুতে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by decreasing function at a point?)

Ans : যদি $x = a$ বিন্দুতে f(x) ফাংশনের ক্ষেত্রে $\lim_{h\to 0_-} f(a + h) > f(a) > \lim_{h\to 0_+} f(a + h)$ হয়, তবে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটিকে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন বলে।

7.8. কোন শর্তে $y = f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে ক্রমহ্রাসমান হইবে? (Which is the condition where the functions is $y = f(x)$ decreasing at $x = a$?)

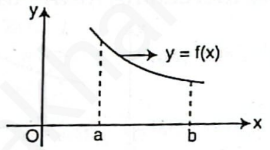
Ans : যদি $f'(a) < 0$ হয় তবে $x = a$ বিন্দুতে $y = f(x)$ ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান হইবে।

7.9. একটি ব্যবধিতে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by decreasing function in a interval?)

Ans : (a, b) এর অন্তর্গত প্রত্যেক x এর মানের জন্য $f'(x) < 0$ হইলে ঐ ব্যবধিতে $y = f(x)$ ফাংশনটিকে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন বলে।

7.10. $y = f(x)$ এর একটি নমুনা লেখচিত্র আঁক যেখানে ফাংশনটি (a, b) ব্যবধিতে ক্রমহ্রাসমান। (Draw a sample graph of $y = f(x)$ where the function is decreasing in the interval (a, b).)

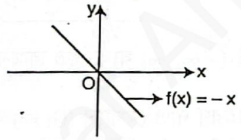
Ans :



চিত্রে (a, b) ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান।

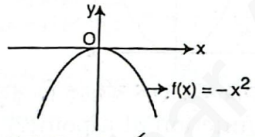
7.11. একটি ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান। (Give an example of a function where the function is decreasing in the interval $(-\infty, \infty)$.)

Ans : $f(x) = -x$ ফাংশনটি $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে অর্থাৎ সর্বত্র ক্রমহ্রাসমান। কারণ $f'(x) = -1 < 0, \forall x \in (-\infty, \infty)$.



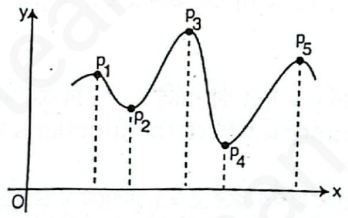
7.12. একটি ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে $(0, \infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান। (Give an example of a function where the function is decreasing in the interval $(0, \infty)$.)

Ans : $f(x) = -x^2$ ফাংশনটি $(0, \infty)$ ব্যবধিতে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন। কারণ $f'(x) = -2x < 0, \forall x \in (0, \infty)$.



7.13. একটি লেখচিত্রের সাহায্যে ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশনের ধারণা দাও। (Give the concept of increasing and decreasing functions by a graph.)

Ans :



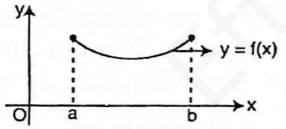
লেখচিত্রে $p_1\ p_2$, $p_3\ p_4$ অংশে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান এবং $p_2\ p_3$, $p_4\ p_5$ অংশে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান। উল্লেখ্য p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 বিন্দুতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান নয়।

7.14. একটি ব্যবধিতে উর্ধ্ব কনকেভ ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by concave up function in a interval?)

Ans : (a, b) এর অন্তর্গত প্রত্যেক x এর মানের জন্য $f'(x)$ ক্রমবর্ধমান হইলে অর্থাৎ $f''(x) > 0$ হইলে ঐ ব্যবধিতে $y = f(x)$ ফাংশনটিকে উর্ধ্ব কনকেভ বলে।

7.15. $y = f(x)$ এর একটি নমুনা লেখচিত্র আঁক যেখানে ফাংশনটি (a, b) ব্যবধিতে উর্ধ্ব কনকেভ। (Draw a sample graph of $y = f(x)$ where the function is concave up in the interval (a, b).)

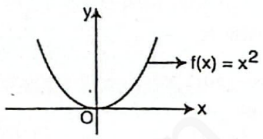
Ans :



চিত্রে (a, b) ব্যবধিতে ফাংশনটি উর্ধ্ব কনকেভ।

7.16. একটি ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি উর্ধ্ব কনকেভ। (Give an example of a function where the function is concave up in the interval $(-\infty, \infty)$.)

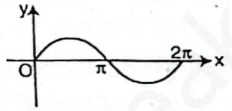
Ans : $f(x) = x^2$ ফাংশনটি $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে উর্ধ্ব কনকেভ। কারণ $f''(x) = 2 > 0$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$.



7.17. দেখাও যে $f(x) = \sin x$ ফাংশনটি $(\pi, 2\pi)$ ব্যবধিতে উর্ধ্ব কনকেভ। (Show that $f(x) = \sin x$ function is concave up in the interval $(\pi, 2\pi)$.)

Ans : প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \sin x$

$\Rightarrow f''(x) = -\sin x$



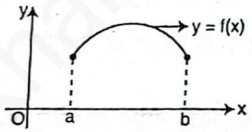
যেহেতু $f''(x) = -\sin x > 0, \forall x \in (\pi, 2\pi)$, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি $(\pi, 2\pi)$ ব্যবধিতে উর্ধ্ব কনকেভ।

7.18. একটি ব্যবধিতে নিম্ন কনকেভ ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by concave down function in the interval?)

Ans : (a, b) এর অন্তর্গত প্রত্যেক x এর মানের জন্য $f'(x)$ ক্রমহ্রাসমান হইলে অর্থাৎ $f''(x) < 0$ হইলে ঐ ব্যবধিতে $y = f(x)$ ফাংশনটিকে নিম্ন কনকেভ বলে।

7.19. $y = f(x)$ এর একটি নমুনা লেখচিত্র আঁক যেখানে ফাংশনটি (a, b) ব্যবধিতে নিম্ন কনকেভ। (Draw a sample grap of $y = f(x)$ where the function is concave down in the interval (a, b).)

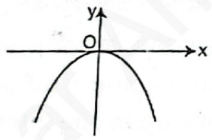
Ans :



চিত্রে (a, b) ব্যবধিতে ফাংশনটি নিম্ন কনকেভ।

7.20. একটি ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি নিম্ন কনকেভ। (Give an example of a function where the function is concave down in the interval $(-\infty, \infty)$.)

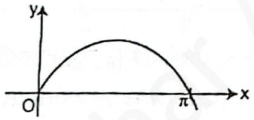
Ans : $f(x) = -x^2$ ফাংশনটি $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে নিম্ন কনকেভ। কারণ $f''(x) = -2 < 0, \forall x \in (-\infty, \infty)$.



7.21. দেখাও যে $f(x) = \sin x$ ফাংশনটি $(0, \pi)$ ব্যবধিতে নিম্ন কনকেভ। (Show that $f(x) = \sin x$ functions is concave down in the interval $(0, \pi)$.)

Ans : প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \sin x$

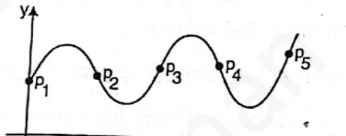
$$\Rightarrow f''(x) = -\sin x$$



যেহেতু $f''(x) = -\sin x < 0, \forall x \in (0, \pi)$, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি $(0, \pi)$ ব্যবধিতে নিম্ন কনকেভ।

7.22. একটি লেখচিত্রের সাহায্যে উর্ধ্ব কনকেভ ও নিম্ন কনকেভ এর ধারণা দাও। (Give the concept of concave up and concave down by a graph.)

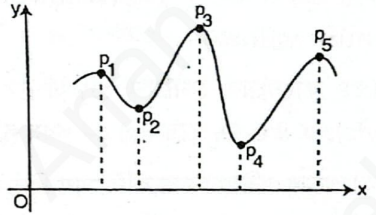
Ans :



লেখচিত্রে $p_1\ p_2$, $p_3\ p_4$ অংশে ফাংশনটি নিম্ন কনকেভ এবং $p_2\ p_3$, $p_4\ p_5$ অংশে ফাংশনটি উর্ধ্ব কনকেভ।

7.23. সন্ধি বিন্দু কি? (What is the critical point?) **[NUH–2010]**

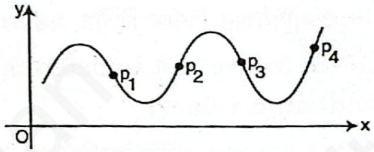
Ans :



চিত্রে উল্লেখিত p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 বিন্দুতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান নয়। বিন্দুগুলোকে সন্ধি বিন্দু বলা হয়। অর্থাৎ পরপর ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান অংশদ্বয়ের মিলন বিন্দুকে সন্ধি বিন্দু বলে। যদি $x = a$ সন্ধি বিন্দু হয় তবে $f'(a) = 0$ হইবে।

7.24. ইনফ্লেকশন বিন্দু কি? (What is the inflection point?)

Ans :



চিত্রে p_1, p_2, p_3, p_4 বিন্দুতে ফাংশনটি উর্ধ্ব কনকেভ বা নিম্ন কনকেভ নয়। বিন্দুগুলিকে ইনফ্লেকশন বিন্দু বলে। অর্থাৎ পরপর উর্ধ্ব কনকেভ ও নিম্ন কনকেভ অংশদ্বয়ের মিলন বিন্দুকে ইনফ্লেকশন বিন্দু বলে। $x = a$ ইনফ্লেকশন বিন্দু হইলে $f''(a) = 0$ হইবে।

7.25. ফাংশনের গরিষ্ঠমান কাকে বলে? (What is the maximum value of a function?)

Ans : $f(x)$ কে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের গরিষ্ঠ মান বলে যদি $f(x) < f(a)$, $\forall x \in (a - h, a + h)$ যেখানে h ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা।

7.26. ফাংশনের লঘিষ্ঠমান কাকে বলে? (What is the minimam value of a function?)

Ans : $f(a)$ কে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের লঘিষ্ঠমান বলে যদি $f(x) > f(a)$, $\forall x \in (a - h, a + h)$ যেখানে h একটি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা।

7.27. চরমমান কি? (What is the extreme value?) **[NUH(NM)–2010]**

Ans : ফাংশনের গরিষ্ঠমান বা লঘিষ্ঠমানকে একত্রে চরমমান বলে।

7.28. পরম গরিষ্ঠমান বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by absolute maximum value?) **[NUH–2010]**

Ans : যদি $f(x)$ ফাংশনের ডোমেন D_f এ c এইরূপ একটি বিন্দু হয় যে, $f(x) \le f(c)$, $\forall x \in D_f$ তবে $f(c)$ কে ফাংশনটির পরম গরিষ্ঠমান বলে।

7.29. পরম লঘিষ্ঠমান বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by absolute minimum value?) **[NUH-2010]**

Ans : যদি $f(x)$ ফাংশনের ডোমেন D_f এ c এইরূপ একটি বিন্দু হয় যে, $f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in D_f$ তবে $f(c)$ কে পরম লঘিষ্ঠমান বলে।

7.30. একটি ফাংশনের গরিষ্ঠমান বা লঘিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত কি? (What is the necessary condition for the existence of maximum value or minimum value of a function?)

Ans : অন্তরীকরণযোগ্য $y = f(x)$ ফাংশনে কোন বিন্দুতে গরিষ্ঠমান বা লঘিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকায় প্রয়োজনীয় শর্ত হইল, ঐ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$.

7.31. গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয়ে দ্বিতীয় অন্তরজ পরীক্ষা কি? (What is the second derivative test to determine the maximum value and minimum value?)

Ans : $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন, $f'(a) = 0$ এবং $f''(a) \neq 0$ হইলে

(i) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের গরিষ্ঠমান $f(a)$ বিদ্যমান থাকিবে যদি $f''(a) < 0$ হয়।

(ii) $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের লঘিষ্ঠমান $f(a)$ বিদ্যমান থাকিবে যদি $f''(a) > 0$ হয়।

7.32. গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয়ের উচ্চতার অন্তরজ পরীক্ষা কি? (What is the heigher derivative test to determine maximum value and minimum value?)

Ans : যদি $f(x)$ ফাংশনের সন্ধি বিন্দু $x = a$ তে $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(r-1)}(a) = 0$ কিন্তু $f^{(r)}(a) \neq 0$ হয়, তবে

(i) r জোড় সংখ্যা এবং $f^{(r)}(a) < 0$ হইলে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের গরিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকিবে।

(ii) r জোড় সংখ্যা এবং $f^{(r)}(a) > 0$ হইলে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের লঘিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকিবে।

(iii) r বেজোড় হইলে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটির কোন লঘিষ্ঠমান বা গরিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকিবে না।

EXERCISE–7

1. দেখাও যে $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন।
2. দেখাও যে $f(x) = 1 - x - x^3$ একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন।
3. দেখাও যে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়।
4. দেখাও যে $x = 2$ বিন্দুতে $f(x) = 1 - x^2$ ফাংশনটি হ্রাস পায়।
5. $f(x) = x^2 - 2x$, $0 \leq x \leq 2$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।
6. নিম্নের ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।
   $f(x) = x^3 - 12x + 5$, $-5 \leq x \leq 5$
7. নিম্নের ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং কোন ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।
   $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $-1 \leq x \leq 4$ **[DUH–1986]**
8. যে সকল ব্যবধিতে $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30$ ফাংশনটির মান বৃদ্ধি পায় এবং হ্রাস পায়, সেই সকল ব্যবধি নির্ণয় কর।
9. যে সকল ব্যবধিতে $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 9$ ফাংশনটির মান বৃদ্ধি পায় এবং হ্রাস পায়, সেই সকল ব্যবধি নির্ণয় কর।
10. নিম্নের ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর।
    $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$
11. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ ফাংশনটির গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর।
    [NUH(NM)–2006, CUH–1985]
12. $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ফাংশনের জন্য $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ ব্যবধির মধ্যে লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। **[DUH–1990]**
13. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ ফাংশনের লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠমান নির্ণয় কর।
    [NUH(NM)–2002, CUH–1989, 1976]
14. দেখাও যে $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 5$ ফাংশনটি গরিষ্ঠমান অথবা লঘিষ্ঠমান কোনটাই নির্দেশ করে না।
15. দেখাও যে $x = 2$ বিন্দুতে $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$ ফাংশনের গরিষ্ঠমান অথবা লঘিষ্ঠমান নাই।
16. দেখাও যে $f(x) = (x-1)^2 (x+1)^3$ ফাংশনটি $x = \frac{1}{5}$ বিন্দুতে গরিষ্ঠ, $x = 1$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠ এবং $x = -1$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠ বা গরিষ্ঠমান নাই। **[RUH–1989]**

17. দেখাও যে $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 10$ ফাংশনটি $x = 1$ বিন্দুতে গরিষ্ঠ $x = 3$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠ এবং $x = 0$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠ বা ঘরিষ্ঠমান নাই। [RUH–1987]

18. দেখাও যে $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফাংশনের একটি গরিষ্ঠমান ও একটি লঘিষ্ঠমান আছে এবং ইহার গরিষ্ঠমান হইতে লঘিষ্ঠমানটি বড়। [DUH–1985, RUH–1983]

19. দেখাও যে $\frac{(2x-1)(x-8)}{(x-1)(x-4)}$ এর গরিষ্ঠমান অপেক্ষা লঘিষ্ঠমান বৃহত্তর। [RUH–1970]

20. দেখাও যে $x = \frac{1}{e}$ এর জন্য x^x লঘিষ্ঠ। [NUH–2008, DUH–1984]

21. দেখাও যে $\frac{x}{\ln x}$ এর লঘিষ্ঠমান e. [RUH–1980]

22. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ ফাংশনের গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর। [NUH(NM)–2004, DUH–1983]

23. $f(x) = 12x^5 - 5x^4 + 40x^3 + 6$ ফাংশনটির গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান যাচাই কর।

24. $f(x) = x^2 + \frac{250}{x}$ ফাংশনটির গরিষ্ঠমান অথবা লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর। [RUH–1963]

25. u এর গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর।
যেখানে $u = \frac{4}{x} + \frac{16}{y}$ এবং $x + y = 2$ [NUH–1996, 2009, RUH–1980]

26. $\frac{x^2}{(a^2 + x^2)^3}$ এর গরিষ্ঠমান নির্ণয় কর। [RUH–1989]

27(i). $(0, 2\pi)$ ব্যবধিতে $x + \sin 2x$ ফাংশনের গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর। [RUH–1970]

(ii). $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ [NUH–2002]

28. $a\cos x + b\sin x$ ফাংশনের গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর। [RUH–1976]

29. $4\sin x\cos^2 x$ এর গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর।

30. $\frac{a^2}{\sin^2 x} + \frac{b^2}{\cos^2 x}$ এর লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর। [JUH–1984]

31. দেখাও যে $x = \frac{\pi}{3}$ বিন্দুতে $\sin x(1 + \cos x)$ এর গরিষ্ঠমান আছে। [RUH–1983]

32. $y = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$ এর লঘিষ্ঠমান নির্ণয় কর। [DUH–1966]

33. $(2, -1)$ বিন্দুতে $y = \frac{ax + b}{(x-1)(x-4)}$ ফাংশনটির মান পরিবর্তিত হইলে a এবং b এর মান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ঐ বিন্দুতে y এর গরিষ্ঠমান আছে। [DUH–1980]

34. যদি একটি ত্রিমাত্রিক ফাংশনের $x = -3$ বিন্দুতে ঘরিষ্ঠমান 15 এবং $x = 1$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান -17 হয়, তবে ফাংশনটি নির্ণয় কর।

35. 10 কে এখন দুই অংশে ভাগ কর যাহাতে উহাদের বর্গের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম হয়। [NUH(NM)–2004]

36. দেখাও যে নির্দিষ্ট পরিসীমা বিশিষ্ট একটি বৃহত্তম আয়তক্ষেত্র একটি বর্গক্ষেত্র হইবে।

37. দেখাও যে নির্দিষ্ট বক্রতল বিশিষ্ট একটি খাড়া বৃত্তাকার কোণের বৃহত্তম আয়তনের জন্য উহার অর্ধশীর্ষ কোণ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ [DUH–1975]

38. একটি গোলক এবং একটি সুষম ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্দিষ্ট। দেখাও যে উহাদের আয়তন সর্বাপেক্ষা কম হইলে গোলকের ব্যাস, ঘনবস্তুর কিনারার দৈর্ঘ্যর সমান হইবে। [DUH–1969]

39. a প্রস্থ বিশিষ্ট করিডোর হইতে b প্রস্থ বিশিষ্ট করিডোর যাহারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত, দিয়া একটি মই আনুভূমিক টানিয়া নিতে হইবে, দেখাও যে মইটির সর্বোচ্চ দৈর্ঘ্য $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$. [DUH–1985]

40. একজন কৃষক সোজা নদীর তীরবর্তী আয়তাকার একটি মাঠকে গরু চরানোর জন্য বেড়া দিতে চাহেন। যদি নদীর তীরবর্তী অংশের জন্য কোন বেড়ার প্রয়োজন না থাকে এবং তাহার নিকট মোট 1600 মিটার দৈর্ঘ্য বেড়া থাকে, তবে তিনি সর্বোচ্চ কত বড় ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট মাঠের বেড়া দিতে পারিবেন? [DUH–1988]

ANSWER–7

5. $0 \le x < 1$ ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং $1 < x \le 2$ ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায়।

6. $-5 \le x < -2$, $2 < x \le 5$ ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় এবং $-2 < x < 2$ ব্যবধিতে হ্রাস পায়।

7. $-1 \le x < 1$ ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং $1 < x \le 4$ ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায়।

8. $-\infty < x < -1$ ও $2 < x < \infty$ ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় এবং $-1 < x < 2$ ব্যবধিতে হ্রাস পায়।

9. $-\infty < x < 0$, $1 < x < 3$ ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং $0 < x < 1$, $3 < x < \infty$ ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায়।

10. $0 < x < \pi$ ব্যবধিতে হ্রাস পায় এবং $\pi < x < 2\pi$ ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায়।

11. $x = -1$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান 17 এবং $x = 3$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান -47.

12. $x = -1$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান 4 এবং $x = 1$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান 0.

13. $x = 1$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান 2 এবং $x = 2$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান 1.

22. $x = 0$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান বা লঘিষ্ঠমান নাই $x = 1$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান 0 এবং $x = 3$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান -28.

23. $x = 0$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান অথবা লঘিষ্ঠমান নাই।

24. $x = 5$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান 75.

25. $x = \frac{2}{3}$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান 18 এবং $x = -2$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান 2.

26. $x = 0$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান 0; $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান $\frac{4}{27a^4}$ এবং $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান $\frac{4}{27a^4}$.

27(i). $x = \frac{\pi}{3}$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $x = \frac{2\pi}{3}$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(ii). $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান 3 এবং $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান $\frac{13}{3}$.

28. $\tan x = \frac{b}{a}$ অর্থাৎ $\sin x = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এবং $\cos x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এর ক্ষেত্রে গরিষ্ঠমান $\sqrt{a^2+b^2}$ আবার $\cos x = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin x = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ এর ক্ষেত্রে লঘিষ্ঠমান $-\sqrt{a^2+b^2}$.

29. $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান 0 এবং $x = \sin^{-1}\frac{1}{3}$ বিন্দুতে গরিষ্ঠমান $\frac{8}{3\sqrt{3}}$.

30. $x = \tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান $(a+b)^2$.

32. $x = 0$ বিন্দুতে লঘিষ্ঠমান a. 33. $a = 1, b = 0$

34. $x^3 + 3x^2 - 9x - 12$ 35. 5, 5

40. 320000 বর্গমিটার।

Chapter–8
অনির্ণেয় আকার
INDETERMINANT FORM

অধ্যায় 2(A) এ আমরা অনির্ণেয় আকার নিয়ে কিছু আলোচনা করিয়াছি। ইহা প্রধানতঃ ৭ শ্রেণীর। কোন বিন্দুতে কোন ফাংশনের লিমিট নির্ণয় করিতে যদি ঐ বিন্দুতে ফাংশনের মানের আকার $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, $\infty \times 0$, $\infty - \infty$, ∞^0 বা 1^∞ এর যেকোন এক বা একাধিক আকারের হয় তবে ফাংশনটিকে ঐ বিন্দুতে অনির্ণেয় আকারের বলা হয়। এই আকারের সমস্যার লিমিট বিদ্যমান থাকিতে পারে নাও থাকিতে পারে। এই জাতীয় সমস্যার লিমিট প্রধানত দুইটি পদ্ধতিতে নির্ণয় করা হয়। তাহা হইল

(1) এল, হসপিটালের নিয়মের সাহায্যে এবং (2) বিস্তার যোগ্য পদ্ধতির সাহায্যে।

কোন বিন্দুতে কোন সমস্যা $\frac{0}{0}$ অথবা $\frac{\infty}{\infty}$ আকারের হইলে উহার লিমিট নির্ণয় অনেক সময় এল হসপিটালের পদ্ধতিতে সহজ হয়। তবে এই পদ্ধতিতেই যে এই জাতীয় সমস্যার লিমিট নির্ণয় করা যাইবে তাহা সত্য নয়।

ঐতিহাসিক নোট ঃ L'Hospital বা L Hospetal বা L Hopital Guillaume Fracois Antoine de Marquis de st Mesmre (1661 – 1704) ফরাসী এক রাজকিয় পরিবারে জন্মগ্রহণ করেন। তিনি একজন বিশ্লেষক ও জ্যামিতিবিদ। তিনি ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাসের প্রথম বই লিখেন। $\frac{0}{0}$ ও $\frac{\infty}{\infty}$ আকারের লিমিট নির্ণয়ের একটি সহজ পদ্ধতির বর্ণনা ও প্রমাণ দেন যাহা হসপিটালের পদ্ধতি নামে খ্যাত। বিখ্যাত গণিতবিদ John Bernoulli (1667 – 1748) ছিলেন তাহার গৃহ শিক্ষক। কথিত আছে তাহার পদ্ধতিটি তাহার গুরু (John-Bernoulli) কর্তৃক আবিষ্কৃত। তাহার গুরুকে একটি বিশেষ ভাতা প্রদান করিবে এই শর্তে এই উপপাদ্যটি তাহার রচিত বইয়ে স্থান দিতে তাহার গুরু রাজী হয়।

8.1. অনির্ণেয় (Indeterminant) $\frac{0}{0}$ আকার ঃ যদি $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হয় তবে $\frac{f(x)}{g(x)}$ কে $x = a$ বিন্দুতে অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকার অথবা $\frac{0}{0}$ আকারের অনির্ণেয় ফর্ম বলে। **[NUH–2002, 2009, BSc(Pass)–2006]**

বিঃদ্রঃ $\frac{0}{0}$ কে অনেক সময় প্রথম আকারের ভাগফর্মের অনির্ণেয় আকার বলে।

8.2. অনির্ণেয় (Indeterminant) $\frac{\infty}{\infty}$ আকার ঃ [BSc(Pass)-2006]

যদি $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ হয় তবে $\frac{f(x)}{g(x)}$ কে $x = a$ বিন্দুতে অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকার অথবা $\frac{\infty}{\infty}$ আকারের অনির্ণেয় ফর্ম বলে।

বিঃদ্র ঃ $\frac{\infty}{\infty}$ কে অনেক সময় দ্বিতীয় আকারের ভাগ ফর্মের অনির্ণেয় আকার বলে।

উপপাদ্য–1. (এল হসপিটালের নিয়ম) যদি কোন ব্যবধির $x = a$ বিন্দুতে

(i) $f(x)$ ও $g(x)$ ফাংশন দুইটি টেইলর ধারায় বিস্তার যোগ্য হয়

(ii) $f(a) = g(a) = 0$ হয় এবং

(iii) $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ বিদ্যমান থাকে

তবে $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

[NUH–02, 03, 04, 08, 09, NUH(NM)–05, 2009, BSc(Pass)–07]

প্রমাণ ঃ টেইলর উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots}{g(a) + hg'(a) + \frac{h^2}{2!}g''(a) + \cdots}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots}{hg'(a) + \frac{h^2}{2!}g''(a) + \cdots} \quad [\because f(a) = g(a) = 0]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a) + \frac{h}{2!}f''(a) + \cdots}{g'(a) + \frac{h}{2!}g''(a) + \cdots} \quad [h \text{ দ্বারা ভাগ করিয়া}]$$

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)} \cdots\cdots (1)$$

কিন্তু $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \cdots\cdots (2)$

এবং $\frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \cdots\cdots (3)$

এখন (1), (2) এবং (3) হইতে পাই $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–1. এল হসপিটালের নিয়মের সাহায্যে দেখাও যে (Using L' Hospital's rule to show that)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = 0$$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 1}\frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{4x^3 - 12x^2 + 12x - 4}{3x^2 - 6x + 3} \left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{12x^2 - 24x + 12}{6x - 6} \left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{24x - 24}{6} = \frac{24 - 24}{6} = \frac{0}{6} = 0.$$

8.3. অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকার এর জন্য এল হসপিটালের নিয়ম (L' Hospital's rule for the indeterminant form $\frac{\infty}{\infty}$)

উপপাদ্য–2. যদি কোন ব্যবধির $x = a$ বিন্দুতে

(i) $f(a) = g(a) = \infty$ হয় এবং (ii) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ বিদ্যমান থাকে

তবে $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

প্রমাণ ঃ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{1/g(x)}{1/f(x)}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}[g(x)]^{-1}}{\frac{d}{dx}[f(x)]^{-1}} \quad [\text{এল হসপিটালের সাহায্যে}]$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{-g'(x)[g(x)]^{-2}}{-f'(x)[f(x)]^{-2}} = \lim_{x\to a}\left\{\frac{g'(x)}{f'(x)}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^2\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^2 \lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

উদাহরণ–2. এল হসপিটালের নিয়মের সাহায্যে দেখাও যে (Using L' Hospital's rule to show that) $\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} = 0$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} = -\lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \cot x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{ আকারের}\right)$

$= -\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x \tan x}{x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= -\lim_{x\to 0_+} \frac{\cos x \tan x + \sin x \sec^2 x}{1} = -(0+0) = 0$

8.4. অনির্ণেয় (Indeterminant) $0.\infty$ আকার ঃ [BSc(Pass)–2006]

যদি $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ হয় তবে $f(x)\,g(x)$ কে $x = a$ বিন্দুতে অনির্ণেয় $0.\infty$ (বা $0\times\infty$) অথবা $\infty.0$ (বা $\infty\times 0$) আকার অথবা $0.\infty$ আকারের অনির্ণেয় ফর্ম বলে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ $0.\infty$ কে অনেক সময় গুণফর্মের অনির্ণেয় আকার বলে।

উদাহরণ–3. দেখাও যে

(i) $\lim_{x\to 0_+} x \ln x = 0$ (ii) $\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\left(\frac{a}{2^x}\right) = a.$ **[RUH–1990]**

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to 0_+} x \ln x$ $(0\times\infty \text{ আকারের})$

$= \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{(1/x)}$ $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0_+} (-x) = 0.$

(ii) $\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\left(\frac{a}{2^x}\right)$ $(\infty.0 \text{ বা } 0.\infty \text{ আকারের})$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(a.2^{-x})}{2^{-x}}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(a.2^{-x}).(-a2^{-x}\ln 2)}{2^{-x}.(-\ln 2)} = a\lim_{x\to\infty} \cos(a.2^{-x})$

$= a\cos 0 = a.1 = a.$

8.5. অনির্ণেয় (Indeterminant) $\infty-\infty$ আকার ঃ [BSc(Pass)–2006]

যদি $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ হয় তবে $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)]$ যখন $\infty-\infty$ (অথবা $-\infty+\infty$) আকারের রাশি তখন $f(x) - g(x)$ কে $x = a$ বিন্দুতে অনির্ণেয় $\infty-\infty$ আকার বা $\infty-\infty$ আকারের অনির্ণেয় ফর্ম বলে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ অনির্ণেয় $\infty-\infty$ আকারকে বিয়োগফলের অনির্ণেয় আকার বলে।

উদাহরণ–4. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right] = \frac{1}{2}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin x}\right) = -\frac{1}{6}.$

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$ $(\infty-\infty \text{ আকারের})$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1/(1+x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.$

(ii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin x}\right)$ $(\infty-\infty \text{ আকারের})$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2\sin x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x\sin x + x^2\cos x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2\cos x + 4\cos x - 4x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x}$

$= \frac{-\cos 0}{2\cos 0 + 4\cos 0 - 0 - 0 - 0} = \frac{-1}{2+4} = -\frac{1}{6}.$

8.6. অনির্ণেয় আকার (Indeterminant form) 0^0, 1^∞ এবং ∞^0 ঃ [BSc(Pass)–2006]

সংজ্ঞা ঃ যদি $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হয়, তবে $[f(x)]^{g(x)}$ কে $x = a$ বিন্দুতে অনির্ণেয় 0^0 আকার অথবা 0^0 আকারের অনির্ণেয় ফর্ম বলে।

সংজ্ঞা ঃ যদি $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ হয় তবে $[f(x)]^{g(x)}$ কে $x = a$ বিন্দুতে অনির্ণেয় 1^∞ আকার অথবা 1^∞ আকারের অনির্ণেয় ফর্ম বলে।

সংজ্ঞা ঃ যদি $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হয় তবে $[f(x)]^{g(x)}$ কে $x = a$ বিন্দুতে অনির্ণেয় ∞^0 আকার অথবা ∞^0 আকারের অনির্ণেয় ফর্ম বলে।

উদাহরণ–5. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0_+} x^{3x} = 1$ (ii) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot x} = 1$

সমাধান ঃ (i) (পদ্ধতি–1) ঃ ধরি $u = \lim_{x\to 0_+} x^{3x}$ (0^0 আকারের)

এখন উভয় পক্ষে ln নিয়া পাই $ln\, u = \lim_{x\to 0_+} 3x\, ln\, x$ ($0.\infty$ আকারের)

$$= \lim_{x\to 0_+} \frac{3\, ln\, x}{1/x} \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0_+} \frac{3/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0_+} (-3x) = 0 \Rightarrow u = e^0 = 1.$$

(পদ্ধতি–2) ঃ $\lim_{x\to 0_+} x^{3x} = \lim_{x\to 0_+} e^{3x\, ln\, x}$

$$= e^{\lim_{x\to 0_+} 3x\, ln\, x} \quad [e \text{ এর ঘাত } 0.\infty \text{ আকারের}]$$

$$= e^{\lim_{x\to 0_+} \frac{3\, ln\, x}{1/x}} \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ আকারের}\right)$$

$$= e^{\lim_{x\to 0_+} \frac{3/x}{-1/x^2}} = e^{\lim_{x\to 0_+} (-3x)} = e^0 = 1$$

(ii) ধরি $u = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot x}$ (1^∞ আকারের)

এখন উভয় পক্ষে ln নিয়া পাই $ln\, u = \lim_{x\to 0} \cot x\, ln \cos x$ ($\infty.0$ আকারের)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{ln \cos x}{\tan x} \left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x/\cos x}{\sec^2 x} = \frac{-0/1}{1} = 0 \Rightarrow u = e^0 = 1$$

8.7. বিস্তার যোগ্য পদ্ধতি (Expansion Method) ঃ কোন কোন অনির্ণেয় আকারের ফাংশন সংশ্লিষ্ট কিছু কিছু সহজ বিস্তার যোগ্য রাশি সমূহকে বিস্তার করিয়া লিমিট নির্ণয় করা যায়।

নিম্নে ঐ সমস্ত সহজ বিস্তার যোগ্য কিছু কিছু রাশির বিস্তারসহ প্রদত্ত হইল ঃ

(i) $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + a^{n-1})$

(ii) $(x^n + a^n) = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3} + a^2 - \cdots + a^{n-1})$

যেখানে $n \in \mathbb{N}$ এবং n বেজোড়

(iii) $(a + x)^n = a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + \cdots + x^n$ যেখানে $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} x^3 + \cdots$

যেখানে n বিয়োগ বোধক পূর্ণসংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ সংখ্যা এবং $|x| < |a|$.

(v) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ (vi) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

(vii) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ (viii) $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$

(ix) $a^x = 1 + x\, ln\, a + \frac{x^2}{2!} (ln\, a)^2 + \frac{x^3}{3!} (ln\, a)^3 + \cdots$

(x) $a^{-x} = 1 - x\, ln\, a + \frac{x^2}{2!} (ln\, a)^2 - \frac{x^3}{3!} (ln\, a)^3 + \cdots$

(xi) $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

(xii) $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

(xiii) $ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ যেখানে $-1 < x \le 1$

(xiv) $ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$ যেখানে $-1 \le x < 1$

(xv) $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ যেখানে $-1 < x \le 1$

(xvi) $\sin^{-1}x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots$

উপরের (iv) হইতে প্রাপ্ত আরো কিছু সূত্র

(iv)a $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ যেখানে $|x| < 1$

(iv)b $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ যেখানে $|x| < 1$

(iv)c $(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ যেখানে $|x| < 1$

(iv)d $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$ যেখানে $|x| < 1$

(iv)e $(1 - x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots$ যেখানে $|x| < 1$

(iv)f $(1 + x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \cdots$ যেখানে $|x| < 1$.

উদাহরণ-6. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4} = \frac{1}{2}$.

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)}{x^4}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2!}-\frac{x^8}{4!}+\cdots}{x^4}$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots\right) = \frac{1}{2}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ-7. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin x^2}{x^6} = \frac{1}{6}$.

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin x^2}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\left(x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\cdots\right)}{x^6}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{3!}-\frac{x^{10}}{5!}-\cdots}{x^6} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^4}{5!}-\cdots\right) = \frac{1}{6}$.

উদাহরণ-8. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{x^2} = 2$.

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots\right)-\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots\right)}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(x^2+\frac{x^6}{3!}+\cdots\right)}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} 2\left(1+\frac{x^4}{3!}+\cdots\right) = 2$.

উদাহরণ-9. মান নির্ণয় কর $\lim_{\theta\to\pi/4} \frac{\sqrt{2}-\cos\theta-\sin\theta}{(4\theta-\pi)^2}$.

[NUH-1996, RUH-1982]

সমাধান ঃ $\lim_{\theta\to\pi/4} \frac{\sqrt{2}-\cos\theta-\sin\theta}{(4\theta-\pi)^2}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{\theta\to\pi/4} \frac{\sin\theta-\cos\theta}{8(4\theta-\pi)}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{\theta\to\pi/4} \frac{\cos\theta+\sin\theta}{32} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}{32} = \frac{1/\sqrt{2}+1/\sqrt{2}}{32} = \frac{1}{16\sqrt{2}}$.

উদাহরণ-10. মান নির্ণয় কর $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$. **[DUH-1983]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x\tan x+\sin x}{6x}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x+\cos x}{6} = \frac{0+2+1}{6} = \frac{1}{2}$.

উদাহরণ-11. মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$. **[NUH-10, DUH-75]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin x}\cos x}{1-\cos x}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin x}\cos^2 x+e^{\sin x}\sin x}{\sin x}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin x}\cos^2 x}{\sin x} + \lim_{x\to 0} e^{\sin x}$ [প্রথম লিমিটটি $\frac{0}{0}$ আকারের

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin x}\cos^3 x+2e^{\sin x}\cos x\sin x}{\cos x} + e^0$

$= \frac{1-1+0}{1}+1 = 1$.

উদাহরণ–**12.** দেখাও যে (Show that) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} + 2\sin x - 4x}{x^5} = \frac{1}{30}$$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} + 2\sin x - 4x}{x^5}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) + 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) - 4x}{x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\left(\frac{x^5}{5!} + x^5 \text{ এর অধিক ঘাত বিশিষ্ট পদসমূহ}\right)}{x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} 4\left(\frac{1}{5!} + x \text{ সম্বলিত পদসমূহ}\right)$$

$$= \frac{4}{5!} = \frac{1}{30}.$$

উদাহরণ–**13.** দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^{2x}} = 0$ **[DUH–1990]** (ii) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^x} = 0$ **[DUH–1964]**

(iii) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x} = 0$ **[RUH–1961]**

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{2e^{2x}}$ $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{ আকারের}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{4e^{2x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{6}{8e^x} = \frac{6}{8e^\infty} = \frac{6}{8\infty} = 0.$$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^3}{e^x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{ আকারের}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{24x}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{24}{e^x} = \frac{24}{e^\infty} = \frac{24}{\infty} = 0.$$

(iii) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x} = 0$ ..... (1)

শর্ত-**1** ঃ যদি $n < 0$ হয় তবে $\lim_{x\to\infty} x^n = 0$। সুতরাং $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x} = \dfrac{0}{e^\infty} = \dfrac{0}{\infty} = 0.$

শর্ত-**2** ঃ যদি $n = 0$ হয় তবে $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{e^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

শর্ত-**3** ঃ যদি $n > 0$ হয় তবে $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{r-n}}{r!}} = \frac{1}{\infty} \quad \left[\because \sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{r-n}}{r!} \to \infty \text{ যখন } x \to \infty\right] = 0.$$

উদাহরণ–**14.** দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ (ii) $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

[DUH–85, 91, 03] **[DUH–1991]**

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ [1^∞ আকারের]

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}} \quad \left(e \text{ এর ঘাত } \frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{1}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}} = e^{1/1} = e.$$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (1^∞ আকারের)

$$= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+1/x)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln(1+1/x)} \quad (e \text{ এর ঘাত } \infty \times 0 \text{ আকারের})$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}} \quad \left(e \text{ এর ঘাত } \frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-1/x^2/(1+1/x)}{-1/x^2}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x}} = e^{1/1} = e.$$

উদাহরণ–15. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}=e^2$ (ii) $\lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{1/x}=e.$

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$ (1^∞ আকারের)

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{ln(x+e^x)}{x}} \quad \left(e \text{ এর ঘাত } \frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e^{\frac{1+1}{0+1}}=e^2.$$

(ii) $\lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{1/x}$ (1^∞ আকারের)

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{ln(1+x+x^2)}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x+x^2)}{x}} \quad \left(e \text{ এর ঘাত } \frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1+2x}{1+x+x^2}}=e.$$

উদাহরণ–16. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot x}=1$ (ii) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}=e^{-1/2}$

[NUH–1999, DUH–1980, RUH–1978, CUH–1980]

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot x}$ (1^∞ আকারের)

$$=\lim_{x\to 0} e^{\cot x\, ln\cos x}=e^{\lim_{x\to 0}\cot x\, ln\cos x} \quad (e \text{ এর ঘাত } \infty\times 0 \text{ আকারের})$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{ln\cos x}{\tan x}} \quad \left(e \text{ এর ঘাত } \frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x/\cos x}{\sec^2 x}}=e^{\lim_{x\to 0}(-\sin x\cos x)}=e^0=1$$

(ii) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$ (1^∞ আকারের)

$$=\lim_{x\to 0} e^{\cot^2 x\, ln\cos x}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{ln\cos x}{\tan^2 x}} \quad \left(e \text{ এর ঘাত } \frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x/\cos x}{2\tan x\sec^2 x}}=e^{\lim_{x\to 0}-1/2\cos^2 x}=e^{-1/2}.$$

উদাহরণ–17. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=-\frac{1}{2}e$ **[RUH–1983, 1992]**

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{x^a-a^x}{x^x-a^a}=\frac{1-ln\,a}{1+ln\,a}.$

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{ln(1+x)}{x}}-e}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)}-e\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots}-e\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e}{x}\left(e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e}{x}\left[1+\left(\frac{-x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots\right)^2-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e}{x}\left[x\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\cdots\right)+\frac{x^2}{2!}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\cdots\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\lim_{x\to 0} e\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\cdots\right)+\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\cdots\right)^2+\cdots\right]=-\frac{1}{2}e.$$

(ii) $\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{x^x-a^a}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$$=\lim_{x\to a}\frac{D_x x^a-D_x a^x}{D_x x^x-D_x a^a}\left[D_x=\frac{d}{dx}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^a D_x(a\,ln\,x)-a^x\,ln\,a}{x^x D_x(x\,ln\,x)-0}=\lim_{x\to a}\frac{x^a.\frac{a}{x}-a^x\,ln\,a}{x^x\left(\frac{x}{x}+ln\,x\right)}$$

$$=\frac{a^a.\frac{a}{a}-a^a\,ln\,a}{a^a(1+ln\,a)}=\frac{1-ln\,a}{1+ln\,a}.$$

উদাহরণ–18. মান নির্ণয় কর $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$. **[RUH–1978]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$ ($\infty-\infty$ আকারের)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{\sin x + x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0+0}{1+1-0} = 0.$$

উদাহরণ–19. মান নির্ণয় কর $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{ln(x-1)}\right]$. **[NUH–1995]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{ln(x-1)}\right]$ $(\infty - \infty$ আকারের)

$$= \lim_{x\to 2} \frac{ln(x-1) - x + 2}{(x-2)\,ln\,(x-1)} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1/(x-1) - 1}{(x-2)/(x-1) + ln(x-1)} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1 - x + 1}{(x-2) + (x-1)\,ln(x-1)} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{1 + ln(x-1) + (x-1)/(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2 + ln(x-1)} = -\frac{1}{2}.$$

উদাহরণ–20. মান নির্ণয় কর (Find the value) :

(i) $\lim_{x\to 0_+} x^x$ (ii) $\lim_{x\to 0_+} x^{1/x}$ **[DUH–1932, 1982]**

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to 0_+} x^x$ $(0^0$ আকারের)

$$= \lim_{x\to 0_+} e^{x\,ln\,x} = e^{\lim\limits_{x\to 0_+} x\,ln\,x} \quad \ldots\ldots (1)$$

এখানে $\lim_{x\to 0_+} x\,ln\,x$ $(0\times\infty$ আকারের)

$$= \lim_{x\to 0_+} \frac{ln\,x}{1/x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0_+} (-x) = 0$$

সুতরাং (1) $\Rightarrow \lim_{x\to 0_+} x^x = e^0 = 1$

(ii) $\lim_{x\to 0_+} x^{1/x}$ (0^∞ আকারের যাহা অনির্ণেয় আকারের নয়)

$$= \lim_{x\to 0_+} e^{\frac{1}{x}ln\,x} = e^{\lim\limits_{x\to 0_+}\frac{1}{x}ln\,x}$$

$$= e^{\infty\times(-\infty)} \left[\because \lim_{x\to 0_+}\frac{1}{x} = \infty \text{ এবং } \lim_{x\to 0_+} ln\,x = -\infty\right]$$

$$= e^{-\infty} = 0.$$

উদাহরণ–21. মান নির্ণয় কর $\lim_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\tan x}$.

[DUH–2003, RUH–1986, KUET–1994]

সমাধান ঃ $\lim_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\tan x}$ $(1^\infty$ আকারের)

$$= \lim_{x\to \pi/2} e^{\tan x\,ln\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to \pi/2} \tan x\,ln\sin x} \quad \ldots\ldots (1)$$

এখানে $\lim_{x\to \pi/2} \tan x\,ln\sin x$ $(\infty\times 0$ আকারের)

$$= \lim_{x\to \pi/2} \frac{ln\sin x}{\cot x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x/\sin x}{-\,\mathrm{cosec}^2 x} = \lim_{x\to \pi/2} (-\sin x\cos x) = 0$$

সুতরাং (1) $\Rightarrow \lim_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1.$

উদাহরণ–22. মান নির্ণয় কর (Find the value) :

(i) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$ **[BSc(Pass)–08, RUH–80, 83, RUS–89, JUH–91]**

(ii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$ (iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^3}$

[NUH–93, NUH(NM)–02, DUH–49, 62, 77, KUET–95]

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x - x^3/3! + x^5/5! - \cdots}{x}\right)^{1/x}$

$= \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^{1/x}$

[x^2 এর অধিকঘাত বিশিষ্ট পদ সমূহকে বর্জন করে]

$= \lim_{x\to 0}\left\{\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^{-6/x^2}\right\}^{-x/6} = \lim_{x\to 0} e^{-x/6} = e^0 = 1.$

(ii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^{1/x^2}$ [(1) দেখ]

$= \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^{1/x^2}$ [x^2 এর অধিক ঘাত পদসমূহকে বর্জন করে]

$= \lim_{x\to 0}\left\{\left(1 - \frac{x}{6}\right)^{-6/x^2}\right\}^{-1/6} = e^{-1/6}.$

(iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^3} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^{1/x^3}$ [(ii) দেখ]

$= \lim_{x\to 0}\left\{\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^{-6/x^2}\right\}^{-1/6x} = \lim_{x\to 0} e^{-1/6x} = e^{-\infty} = 0.$

উদাহরণ-23. মান নির্ণয় কর (Find the value) :

(i) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x}$ **[DUH-1968, RUH-1987, CUH-1990]**

(ii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ **[DUH-62, RUH-90, JUH-90]**

(iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^3}$ **[RUH-1988, CUH-1991]**

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x + 1/3x^3 + 2/15x^5 + \cdots}{x}\right)^{1/x}$

$= \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + \cdots\right)^{1/x}$

$= \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^{1/x}$ [x^2 এর অধিক ঘাত সমূহকে বর্জন করিয়া]

$= \lim_{x\to 0}\left\{\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{3/x^2}\right\}^{x/3} = \lim_{x\to 0} e^{x/3}$ [$\because \lim_{x\to 0}(1+z)^{1/z} = e$]

$= e^0 = 1.$

(ii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + \cdots\right)^{1/x^2}$ [(i) দেখ]

$= \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{1/x^2}$ [x^2 এর অধিক ঘাত সমূহকে বর্ণনা করিয়া]

$= \lim_{x\to 0}\left\{\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{3/x^2}\right\}^{1/3} = e^{1/3}$ [$\because \lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z} = e$]

(iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^3} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^{1/x}$ [(i) দেখ]

$= \lim_{x\to 0}\left\{\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^{3/x^2}\right\}^{1/3x} = \lim_{x\to 0} e^{1/3x} = e^{\infty} = \infty.$

উদাহরণ-24. মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x\to 0_+}\frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{1}{2}ex}{x^2}$. **[RUS-88]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{1}{2}}{x^2}e^x = \lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x\ln(1+x)} - e + \frac{1}{2}ex}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x(x - x^2/2 + x^3/3 - \cdots)} - e + \frac{1}{2}ex}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{(1 - x/2 + x^2/3 - \ldots)} - e + \frac{1}{2}}{x^2}e^x = \lim_{x\to 0}\frac{e^1 e^{(-x/2 + x^2/3 - \ldots)} - e + \frac{1}{2}ex}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{e[1 + (-x/2 + x^2/3 -) + \frac{1}{2}(-x/2 + x^2/3 - \ldots)^2 - 1 + x/2]}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{e\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right)x^2 + x^2 \text{ এর অধিক ঘাত যুক্ত পদসমূহ}}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} e^{\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)+x \text{ কে ধারনকারী পদসমূহ}\right]}$

$= \frac{11e}{24}$.

উদাহরণ–25. দেখাও যে $\lim_{x\to 0_+} x \ln \sin x = 0$. **[DUH–1985]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0_+} x \ln \sin x$ $(0\times\infty$ আকারের)

$= \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln \sin x}{(1/x)}$ $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0_+} \frac{\cos x/\sin x}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x^2}{\tan x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0_+} \frac{2x}{\sec^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$

উদাহরণ–26. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} \cot x \ln \frac{1-x}{1+x} = -2$

[NUH–03, 08, DUHT–89, RUH–87, CUH–77]

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \cot x \ln \frac{1-x}{1+x}$ $(\infty\times 0$ আকারের)

$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{\tan x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\cdot\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}}{\sec^2 x} = \frac{(1/1).\left(\frac{-1-1}{1}\right)}{1} = -2.$

উদাহরণ–27. দেখাও যে $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan^{-1}x}\right)=0.$

[NUH(NM)–2009, NUS–97, DUH–68]

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan^{-1}x}\right)$ $(\infty-\infty$ আকারের)

$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}x - x}{x\tan^{-1}x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x^2)-1}{\tan^{-1}x + x/(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1-x^2}{(1+x^2)\tan^{-1}x + x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{(1+x^2)\tan^{-1}x + x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{(1+x^2)/(1+x^2) + 2x\tan^{-1}x + 1} = \frac{0}{1+0+1} = 0.$

উদাহরণ–28. দেখাও যে ঃ $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{1}{2}$

[DUH–1966, 1973, CUH–1979]

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ $(\infty-\infty$ আকারের)

$= \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 1} \frac{x/x + \ln x - 1}{\ln x + (x-1)/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x\ln x + x - 1}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + x/x}{\ln x + x/x + 1} = \frac{0+1}{0+1+1} = \frac{1}{2}.$

উদাহরণ–29. দেখাও যে $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\frac{1}{2}$. **[RUH–1989]**

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$ $(\infty-\infty$ আকারের)

$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + (x+1)/(x+1) - 1}{\ln(1+x) + x/(1+x)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)\ln(1+x) + x}$ $\left(\frac{0}{0} \text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + (1+x)/(1+x)}{\ln(1+x) + (1+x)/(1+x) + 1}$

$= \frac{\ln 1 + 1}{\ln 1 + 1 + 1} = \frac{0+1}{0+1+1} = \frac{1}{2}.$

উদাহরণ–30. দেখাও যে (i) $\lim_{x\to 0_+} \log_{x^2} x = \frac{1}{2}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \log_{\cos x} \cos 2x = 4$

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to 0_+} \ln_{x^2} x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\ln x^2}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{2x/x^2} = \frac{1}{2}.$

(ii) $\lim_{x\to 0} \log_{\cos x} \cos 2x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x/\cos 2x}{-\sin x/\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\tan 2x}{\tan x}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sec^2 2x}{\sec^2 x} = \frac{4.1}{1} = 4.$

উদাহরণ–31. দেখাও যে (i) $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)} = e$ **[DUH–68, 79, RUH–83]**

(ii) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$ (iii) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \sqrt{ab}$

[NU(NM) 2004, DUH–1998]

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$ $(1^{\pm\infty}\text{ আকারের})$

$= \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}}$ $\left(e\text{ এর ঘাত }\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$= e^{\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}} = e^1 = e.$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ (1^∞ আকারের)

$= \lim_{x\to\infty} e^{x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln(1+a/x)}$ (e এর ঘাত $\infty\times 0$ আকারের)

$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+a/x)}{1/x}}$ $\left(e\text{ এর ঘাত }\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1/(1+a/x).(-a/x^2)}{(-1/x^2)}} = e^{-a\lim_{x\to\infty} 1/(1+a/x)} = e^{-a(1/1)} = e^{-a}.$

(iii) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ $(1^{\pm\infty}\text{ আকারের})$

$= \lim_{x\to 0} e^{1/x \ln\frac{a^x+b^x}{2}}$

$= e^{\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)/x}$ $\left(e\text{ এর ঘাত }\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{a^x+b^x}\cdot\frac{1}{2}(a^x\ln a + b^x\ln b)}{1}} = e^{1/2(\ln a+\ln b)}$

$= e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$

উদাহরণ–32. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$ (ii) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x^2} = 1$

[DUH–1984, KUET–1997]

সমাধান ঃ (i) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ $(\infty^0\text{ আকারের})$

$= \lim_{x\to\infty} e^{\ln x/x} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln x/x}$ $\left(e\text{ এর ঘাত }\frac{\infty}{\infty}\text{ আকারের}\right)$

$= e^{\lim_{x\to\infty}(1/x)/1} = e^0 = 1.$

(ii) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x^2}$ $(\infty^0\text{ আকারের})$

$= \lim_{x\to\infty} e^{\ln x/x^2} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln x/x^2}$ $\left(e\text{ এর ঘাত }\frac{\infty}{\infty}\text{ আকারের}\right)$

$= e^{\lim_{x\to\infty}(1/x)/2x} = e^{\lim_{x\to\infty}1/2x^2} = e^0 = 1.$

উদাহরণ–33. যদি $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + a\sin x}{x^3}$ বিদ্যমান থাকে তবে a এর মান এবং লিমিট নির্ণয় কর। **[DUHT–1989]**

সমাধান ঃ **(পদ্ধতি–1)** ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + a\sin x}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots + a\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(2+a)x - \frac{1}{6}(8+a)x^3 + \frac{1}{120}(32+a)x^5 - \cdots}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(2+a) - \frac{1}{6}(8+a)x^2 + \frac{1}{120}(32+a)x^4 - \cdots}{x^2}$ ..... (1)

(1) এর হর $x^2 = 0$ যখন $x \to 0$. সুতরাং (1) এর লিমিট বিদ্যমান থাকিবে যদি ইহা লব = 0 হয় যখন $x \to 0$ কিন্তু ইহা সম্ভব যখন $2 + a = 0$ অর্থাৎ যখন $a = -2$.

এখন $a = -2$ হইলে

$$(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}\cdot 6x^2 + \frac{1}{120}\cdot 30x^4 - \dots}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-1 + \frac{1}{4}x^2 - \cdots\right) = -1.$$

(পদ্ধতি-2) ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + a\sin x}{x^3}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x + a\cos x}{3x^2} \dots\dots (1) \text{ (এল হসপিটালের নিয়ম অনুসারে)}$$

(1) এর হর $3x^2 = 0$ যখন $x \to 0$. সুতরাং (1) এর লিমিট বিদ্যমান থাকিবে যখন লব = 0 যখন $x \to 0$. কিন্তু ইহা সম্ভব যখন $2\cos 2x + a\cos x = 0$ যখন $x \to 0$. অর্থাৎ যখন $2 + a = 0$ অর্থাৎ যখন $a = -2$.

এখন $a = -2$ হইলে

$$(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2\cos x}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin 2x + 2\sin x}{6x} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos 2x + 2\cos x}{6} = \frac{-8+2}{6} = -1.$$

উদাহরণ-34. যদি $\lim_{x\to 0} \frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x\sin x} = 2$ হয় তবে a, b, c এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-1978]**

সমাধান ঃ (পদ্ধতি-1) ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x\sin x} = 2 \dots\dots (1)$

এখানে (1) এর হর $x\sin x = 0$ যখন $x \to 0$. এখন যেহেতু (1) এর লিমিট বিদ্যমান। সুতরাং ইহার লব $ae^x - b\cos x + ce^{-x} = 0$ হইবে যখন $x \to 0$ অর্থাৎ যখন $a - b + c = 0 \dots\dots (2)$

এখন (2) শর্তে (1) এর বামপক্ষ $\frac{0}{0}$ আকারের হইবে। সুতরাং

$$\lim_{x\to 0} \frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x\sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{ae^x + b\sin x - ce^{-x}}{\sin x + x\cos x} \dots\dots (3)$$

আবার (3) এর হর $\sin x + x\cos x = 0$ যখন $x \to 0$. সুতরাং আগের মত (3) এর লব $ae^x + b\sin x - ce^{-x} = 0$ হইবে যখন $x \to 0$ অর্থাৎ যখন $a - c = 0 \dots\dots (4)$

এখন (4) শর্তে (3) $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{ae^x + b\sin x - ce^{-x}}{\sin x + x\cos x}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ আকারের}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{ae^x + b\cos x + ce^{-x}}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{a+b+c}{2}$$

কিন্তু শর্তানুসারে $\frac{a+b+c}{2} = 2 \Rightarrow a + b + c = 4 \dots\dots (5)$

এখন (2), (4) এবং (5) সমাধান করিয়া পাই $a = 1, b = 2, c = 1$

(পদ্ধতি-2) ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) - b\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + c\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots\right)}{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(a - b + c) + (a - c)x + \frac{1}{2}(a + b + c)x^2 + x^2 \text{ এর অধিক ঘাতযুক্ত পদ সমূহ}}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)}$$

এখন ইহার মান = 2 হইবে যদি $a - b + c = 0$, $a - c = 0$, $\frac{a+b+c}{2} = 2$ হয়। এখন ইহাদেরকে সমাধান করিয়া পাই $a = 1, b = 2, c = 1$.

উদাহরণ-35. মান নির্ণয় কর (Find the values) :

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{1 - x^2}{1 - \ln x}$ **[NUH-2004]**

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x\sin x}$ **[NUH(NM)-2007]**

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \sin^{-1} x}{x^2}$ **[BSc(Pass)-2008]**

(iv) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right]$ **[NUH(NM)-2005]**

সমাধান ঃ **(i)** $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-\ln x}$ $\left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right]$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{d}{dx}(1-x^2)}{\frac{d}{dx}(1-\ln x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-2x}{-\frac{1}{x}} = 2$$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin x}$ $\left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{e^x - e^{-x} + 2\sin x}{x\cos x + \sin x}\right] \left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2\cos x}{-x\sin x + \cos x + \cos x} = \frac{4}{2} = 2$$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \sin^{-1} x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x^4}{40} + \cdots\right) = 1$$

(iv) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right)^2}{x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \left(x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \frac{2x^6}{5!} \cdots\right)}{x^4\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5!}x \cdots\right)}{x^4\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5!}x \cdots}{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)^2} = \frac{1}{3}$$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

8.1. অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate $\frac{0}{0}$ form?) **[NUH-2010]**

Ans : যদি $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হয়, তবে $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ কে অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকার বলে।

8.2. অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকারের একটি উদাহরণ দাও। (Give an example of indeterminate $\frac{0}{0}$ form.)

Ans : $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ এর অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকার বিদ্যমান।

8.3. অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ form?)

Ans : যদি $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ হয়, তবে $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ কে অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকার বলে।

8.4. অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকারের উদাহরণ দাও। (Give an example of indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ form.)

Ans : $\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{1/x}$ এর অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকার বিদ্যমান।

8.5. অনির্ণেয় $0\cdot\infty$ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate $0\cdot\infty$ form.)

Ans : $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ হয়, তবে $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ কে অনির্ণেয় $0\cdot\infty$ আকার বলে।

8.6. অনির্ণেয় $0\cdot\infty$ আকারের উদাহরণ দাও। (Give an example of indeterminate $0\cdot\infty$ form.)

Ans : $\lim_{x\to 0_+} x\ln x$ এর অনির্ণেয় $0\cdot\infty$ আকার বিদ্যমান।

8.7. অনির্ণেয় $\infty - \infty$ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by $\infty - \infty$ form?)

Ans : যদি $\left(\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ এবং } \lim_{x\to a} g(x) = \infty\right)$ অথবা

$\left(\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \text{ এবং } \lim_{x\to a} g(x) = -\infty\right)$ হয়, তবে

$\lim_{x\to a} (f(x) - g(x))$ কে অনির্ণেয় $\infty - \infty$ আকার বলে।

8.8. অনির্ণেয় $\infty - \infty$ আকারের উদাহরণ দাও। (Give an example of indeterminate $\infty - \infty$ form.)

Ans : $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right]$ এর অনির্ণেয় $\infty - \infty$ আবার বিদ্যমান।

8.9. অনির্ণেয় 1^∞ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate 1^∞ form?)

Ans : যদি $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ হয় তবে $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ কে অনির্ণেয় 1^∞ আকার বলে।

8.10. অনির্ণেয় 1^∞ আকারের উদাহরণ দাও। (Give an example of indeterminate 1^∞ form.)

Ans : $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$ এর অনির্ণেয় 1^∞ আকার বিদ্যমান।

8.11. অনির্ণেয় 0^∞ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate 0^∞ form?)

Ans : যদি $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ হয় তবে $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ কে অনির্ণেয় 0^∞ আকার বলে।

8.12. অনির্ণেয় 0^∞ আকারের উদাহরণ দাও। (Give an example of indeterminale 0^∞ form.)

Ans : $\lim_{x\to 0} x^{1/x}$ এর অনির্ণেয় 0^∞ আকার বিদ্যমান।

8.13. অনির্ণেয় ∞^0 আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate ∞^0 form?)

Ans : যদি $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হয়, তবে $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ কে অনির্ণেয় ∞^0 আকার বলে।

8.14. অনির্ণেয় ∞^0 আকারের উদাহরণ দাও। (Give an example of indeterminate ∞^0 form.)

Ans : $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ এর অনির্ণেয় ∞^0 আকার বিদ্যমান।

8.15. অনির্ণেয় 0^0 আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate 0^0 form?)

Ans : যদি $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হয়, তবে $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ কে অনির্ণেয় 0^0 আকার বলে।

8.16. অনির্ণেয় 0^0 আকারের উদাহরণ দাও। (Give an example of indeterminate 0^0 form.)

Ans : $\lim_{x\to 0} x^x$ এর অনির্ণেয় 0^0 আকার বিদ্যমান।

8.17. অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকারের জন্য ল'পিটালের নিয়মের বর্ণনা দাও। (State the L'Hopital's rule for the indeterminate $\frac{0}{0}$ form.)

Ans : যদি $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ এবং $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ বিদ্যমান থাকে তবে

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

8.18. অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকারের জন্য ল'পিটালের নিয়মের বর্ণনা দাও। (State the L'Hopital's rule for the indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ form.)

Ans : যদি $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ হয় তবে

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \left[\text{যখন } \frac{f'(a)}{g'(a)} \text{ বিদ্যমান থাকে}\right]$$

EXERCISE–8

1. এল হসপিটালের নিয়মের সাহায্যে দেখাও যে (Using L' Hospital's rule to show that) :

(i) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ (ii) $\lim_{x\to 1}\frac{x^8-1}{x-1}=8$

(iii) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}=\frac{5}{4}$ (iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$

[RUH–1965]

(v) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{12}-1}{x}=12$ (vi) $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sqrt{2+x}-2}=-4$

(vii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. এল হসপিটালের নিয়মের সাহায্যে দেখাও যে (Using L' Hospital's rule to show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}=ln\,5$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}-8}{x}=16$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}ax}{\sin^{-1}ax}=1$ (iv) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\frac{1}{4}$

3. এল হসপিটালের নিয়মের সাহায্যে দেখাও যে (Using L' Hospital's rule to show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=na^{n-1}$

(iii) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}+\frac{x^3-27}{x^2-9}\right)=\frac{21}{2}$ (iv) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=2$

[NUH–2002]

4. এল হসপিটালের নিয়মের সাহায্যে দেখাও যে (Using L' Hospital's rule to show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{a^{ax}-a^{bx}}{x}=(a-b)ln\,a$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\pm 1$

5. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x^2}=\frac{\pi}{2}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin 5x}=\frac{2}{5}$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{1-\cos \pi x}=\frac{1}{\pi^2}$ (iv) $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{3x^4}=\frac{1}{36}$

6. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin hx-\sin x}{x^3}=\frac{1}{3}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin 2x}=0$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2-\sin^2 x}{x^2}=0$ (iv) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4e^{4-x}}{\sin \pi x}=\frac{5}{\pi}$

7. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{ln\,x}=1$ (ii) $\lim_{x\to \infty}\frac{e^{5/x}-1}{\sin(1/x)}=5$

(iii) $\lim_{x\to 0_+}\frac{\sin^{-1}x}{\sin^2 3x}=\infty$ (iv) $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{e^{5x}\sin 2x}=\frac{1}{2}$

(v) $\lim_{x\to \infty}\frac{\tan^2(1/x)}{ln^2(1+a/x)}=\frac{1}{a^2}$

8. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan 2x-2x}=\frac{1}{16}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x\sin(\sin x)}=\frac{1}{2}$

(iii) $\lim_{x\to \pi}\frac{(\pi-x)^2}{ln\cos 2x}=-\frac{1}{2}$ (iv) $\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x\sin(\pi/x)}=\frac{1}{\pi}$

9. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-\sin ax}{a\tan x-\tan ax}=-\frac{1}{2}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x-x}{\sin^3 x}=\frac{1}{6}$

(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{x\sin x}=2$ (iv) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x\sin^3 x}=\frac{1}{12}$

(v) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\frac{1}{3}$.

10. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-x}{1-\cos x}=-1$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{ln\cos x}{ln(1-x^2)}=\frac{1}{2}$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x) - x\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

(iv) $\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1 - x\, ln\, 3}{x^2} = \frac{(ln\, 3)^2}{2}$

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1.$

11. দেখাও যে (i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$ (ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^8 + x^3 + 1} = \infty$

12. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{e^x + x - 2} = 0$ (ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 1$

13. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0} x^5 ln\, x = 0$ (ii) $\lim_{x\to 0} x^n ln\, x = 0$ $(n > 0)$

14. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to\infty} (x+4)^{1/x^2} = 1$ (ii) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{5}{2x}\right)^x = e^{5/2}$

(iii) $\lim_{x\to 0} (x + 3^x)^{1/x} = 3e$ (iv) $\lim_{x\to 0_+} (1 + x^2)^{1/x^2} = e$

(v) $\lim_{x\to 0} (x + e^x)^{1/x} = e^2.$

15. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0} (1 + \sin x)^{\text{cosec } x} = e$ (ii) $\lim_{x\to \pi/2} (1 + \cos x)^{\text{sec } x} = e$

(iii) $\lim_{x\to\infty} x\left(\tan^{-1} x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ (iv) $\lim_{x\to 2} (x-2)\tan\frac{\pi x}{4} = -\frac{4}{\pi}$

(v) $\lim_{x\to 0} \left(2\,\text{cosec}^2 x - \frac{1}{1-\cos x}\right) = \frac{1}{2}.$

16. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{xe^{\pi x}}\right) = \pi$ (ii) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \frac{1}{2}$

(iii) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{ln\, x}\right) = \frac{1}{2}$

(iv) $\lim_{x\to 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{ln(x-1)}\right] = -\frac{1}{2}.$

17. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0_+} \frac{ln \sin x}{ln \sin 2x} = 1$ (ii) $\lim_{x\to 1_-} \frac{ln(1-x)}{ln \cos \frac{\pi x}{2}} = 1$

(iii) $\lim_{x\to \pi/2_+} \frac{\tan x}{ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \infty$ (iv) $\lim_{x\to\infty} \frac{x(ln\, x)^3}{1 + x + x^2} = 0$

(v) $\lim_{x\to\infty} \frac{2\, ln(x + e^x)}{x} = 2$ (vi) $\lim_{x\to 1_-} \frac{ln(1-x)}{\cot \pi x} = 0$

18. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0_+} \log_x \tan x = 1$ (ii) $\lim_{x\to 0} \log_{\tan^2 x} \tan^2 2x = 1$

19. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_{\sin^2 x} \cos x}{\log_{\sin^2 x} \cos \frac{1}{2}x} = 4$ (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_{\sec x/2} \cos x}{\log_{\sec x} \cos \frac{x}{2}} = 16$

20. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 1_+} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + ln\, x}{1 - \sqrt{2x - x^2}} = -1$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1-x) + \cos hx - 1 + x}{x^2} = 0$

(iv) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1 - x\, ln\, a}{x^2} = \frac{(ln\, a)^2}{2}$ (v) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - ln(e + ex)}{x^2} = 1.$

21. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + ln\frac{1-x}{e}}{\tan x - x} = -\frac{1}{2}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^2 + x\, ln(1-x)} = -\frac{2}{3}$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{\tan x - x} = -\frac{1}{2}$

(iv) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin^{-1}x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{6}$ **[NUH-2002, 2009, BSc (Pass)-2006]**

22. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 1/2} \frac{\cos^2 \pi x}{e^{2x} - 2ex} = \frac{\pi^2}{2e}$

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}x}{x^n - e^{\sin \ln x}} = \frac{1}{2(1-n)}$ (iii) $\lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{x}\tan x}{(e^x - 1)^{3/2}} = 1$

23. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \sin^{-1}x - x^2}{x^5} = \frac{1}{18}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ **[NUH(NM)-2008]**

24.(i) যদি $\lim_{x\to 0} \frac{ae^{-x} + be^x - c\cos x}{x \sin x} = 2$ হয় তবে দেখাও যে

$a = 1, b = 1, c = 2.$

(ii) যদি $\lim_{x\to 0} \frac{a\sin 2x - \sin 3x}{x^3} = \frac{5}{2}$ হয় তবে দেখাও যে $a = \frac{3}{2}$.

(iii) যদি $\lim_{x\to 0} \frac{x(1 + a\cos x) - b\sin x}{x^3} = 1$ হয় তবে দেখাও যে

$a = -\frac{5}{2}$ এবং $b = -\frac{3}{2}$.

(iv) যদি $\lim_{x\to 0} \frac{x(1 - a\cos x) + b\sin x}{x^3} = \frac{1}{3}$ হয় তবে দেখাও যে

$a = \frac{1}{2}, \ b = -\frac{1}{2}$.

(v) যদি $\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + x^3 + b\sin x - cx}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 \ln(1+x)} = \frac{3}{40}$ হয় তবে দেখাও যে ঃ

$a = 0, b = 6, c = 6.$

25. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n}$ $(a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$

$$= \begin{cases} \infty & \text{যখন } m > n \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{যখন } m = n \\ 0 & \text{যখন } m < n \end{cases}$$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a_1^{1/x} + a_2^{1/x} + \cdots + a_n^{1/x}}{n}\right)^{nx} = a_1 a_2 \cdots a_n.$

26. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0_+} x^{3x} = 1$ (ii) $\lim_{x\to 0_+} x^{2\sin x} = 1$

(iii) $\lim_{x\to 1_-} (1-x^2)^{1/\ln(1-x)} = e$ (iv) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} = 1$

(v) $\lim_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\tan^2 x} \Rightarrow e^{-1/2}$ (vi) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x} = 1$

(vii) $\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{1}{x}\right)^{2\sin x} = 1$ (viii) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right)^{1/x} = 1.$

27. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \ln(1+x)}{\ln(1+\sin x)} = 1$

(ii) $\lim_{x\to 1_+} \frac{(x-1)^{3/2} + x^{3/2} - 1}{(x^2-1)^{3/2} - x + 1} = -\frac{3}{2}$

(iii) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{3}$

(iv) $\lim_{x\to a_+} \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)}$ $(a > 0)$

(v) $\lim_{x\to\infty} a^x \sin \frac{b}{a^x} = 0$ যখন $0 < a < 1$

(vi) $\lim_{x\to\infty} a^x \sin \frac{b}{a^x} = b, \ a > 1$

(vii) $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x+x^2)+ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}=1$

(viii) $\lim_{x\to \pi/2}\left[\left(\frac{\pi-2x}{2\sin 2x}\right)^2-\sqrt{\frac{2+\cos 2x-\sin x}{x\sin 2x+x\cos x}}\right]=\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$

(ix) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^4\sin x}\left(\frac{3\sin x-\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}\right)^4=16$

(x) $\lim_{x\to a_+}\left\{\sqrt{a^2-x^2}\cot\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)\right\}=\frac{4a}{\pi}$.

28. দেখাও যে $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. ইহার সাহায্যে আরো দেখাও যে

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^{-1}x}$ এবং $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x\sin^{-1}x}=1$.

29. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin 2x\sin 3x}=\frac{1}{6}$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x\sin 2x\sin 3x}=\frac{1}{6}$.

30. দেখাও যে (Show that) :

(i) $\lim_{x\to \pi/2}\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)ln\sin x}{e^{\cos x}-1+ln\left(1+x-\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right]=1$

(ii) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}+\left(\frac{\sin 2x+2\sin^2 x-2\sin x}{\cos x-\cos^2 x}\right)^2\right]=\frac{33}{2}$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1}$.

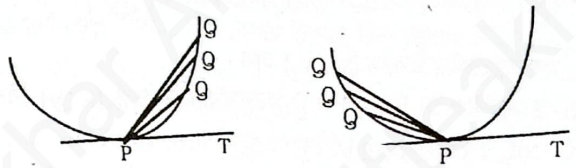
———×———

Chapter–9(A)

স্পর্শক এবং অভিলম্ব (কার্তেসীয় আকারে)

TANGENTS AND NORMALS (IN CARTESIAN)

9.A.1. স্পর্শক (Tangents) :

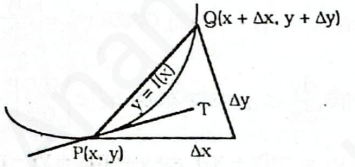


যদি $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ P বিন্দুতে PQ ছেদক সরলরেখার সীমান্ত অবস্থানের সরল রেখা PT হয় যখন $Q\to P$ (বক্ররেখা বরাবর উভয় দিক হইতে) তবে PT কে P বিন্দুতে ঐ বক্ররেখার স্পর্শ রেখা (tangent line) বা সংক্ষেপে স্পর্শক বলে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ Tangent শব্দটি সম্ভবতঃ ল্যাটিন শব্দ tangere "to touch" অথবা tangentis "touching" শব্দ হইতে উৎপত্তি হইয়াছে।

9.A.2. স্পর্শকের সমীকরণ (Equation of a Tangent) ঃ এখানে আমরা $y = f(x)$ আকারের প্রকাশ্য (explict) সম্পর্ক, $f(x, y) = 0$ আকারের অপ্রকাশ্য বা অব্যক্ত সম্পর্ক এবং $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ আকারের প্যারামেট্রিক (Parametric) সম্পর্ক সমূহের উপরস্থ বিন্দুতে স্পর্শক নির্ণয়ের পদ্ধতি নিয়া বিভিন্ন উপপাদ্য এবং উদাহরণের মাধ্যমে আলোচনা করিব।

উপপাদ্য–1. দেখাও যে $y = f(x)$ বক্র রেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$. যেখানে (X, Y) হইল চলমান বিন্দু।



প্রমাণ ঃ ধরি $y = f(x)$ বক্ররেখার উপর দুটি অতি সন্নিকস্থ বিন্দু $P(x, y)$ এবং $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

এখানে PQ জ্যা এর ঢাল $=\frac{y+\Delta y-y}{x+\Delta x-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

সুতরাং PQ জ্যা এর সমীকরণ $Y-y=\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x)$

এখন বক্ররেখার বরাবর $Q\to P$ হইলে অর্থাৎ $\Delta x\to 0$ হইলে PQ এর লিমিটিং অবস্থান PT হইবে যা P বিন্দুতে PT স্পর্শক হইবে। সুতরাং P বিন্দুতে। অর্থাৎ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $Y-y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}(X-x)\Rightarrow Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$.

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ $y = f(x)$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে ঢাল $m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

সংজ্ঞা ঃ $y = f(x)$ অথবা $f(x, y) = 0$ অথবা $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ আকারের যে কোন বক্ররেখার উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ যেখানে } m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)}$$

অর্থাৎ m হল বক্ররেখার উপরস্থ (x_1, y_1) ঢাল।

উপপাদ্য–2. দেখাও যে $f(x, y) = 0$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $(X - x)f_x + (Y - y)f_y = 0$.

প্রমাণ ঃ $f(x, y) = 0 \Rightarrow df = 0$ যেখানে $f = f(x, y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

$$\Rightarrow f_x\, dx + f_y\, dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

এখন (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \Rightarrow Y - y = -\frac{f_x}{f_y}(X - x)$$

$$\Rightarrow (Y - y)f_y = -(X - x)f_x \Rightarrow (X - x)\, f_x + (Y - y)f_y = 0$$

উপপাদ্য–3. দেখাও যে কোন সরলরেখার উপরস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক ঐ সরলরেখা নিজেই।

প্রমাণ ঃ (i) ধরি সরলরেখাটি $y = mx + c$ ..... (1)

আবার ধরি (1) এর উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = m'(x - x_1) \text{ ..... (2) যেখানে } m' = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)}$$

এখন (1) হইতে পাই $\frac{dy}{dx} = m$, তাহা হইলে $m' = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = m$

সুতরাং (2) $\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y = mx + y_1 - mx_1$ ..... (3)

এখন যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি (1) এর উপরস্থ সেহেতু

$$y_1 = mx_1 + c \Rightarrow y_1 - mx_1 = c$$

সুতরাং (3) $\Rightarrow y = mx + c$

অতএব (1) এর উপরস্থ যেকোন বিন্দুতে স্পর্শক (1) নিজেই।

(ii) ধরি সরল রেখাটি $ax + by + c = 0$ ..... (1)

এখন (1) হইতে পাই $a + b\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} \Rightarrow m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = -\frac{a}{b}$$

এখন (1) এর উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = -\frac{a}{b}(x - x_1)$$

$\Rightarrow b(y - y_1) = -a(x - x_1) \Rightarrow ax + by = ax_1 + by_1$

$\Rightarrow ax + by + c = ax_1 + by_1 + c$ ..... (2) [উভয় পক্ষে c যোগ করিয়া]

এখন যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি সরলরেখার উপরস্থ বিন্দু সেহেতু

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \text{ ..... (3)}$$

সুতরাং (2) $\Rightarrow ax + by + c = 0$ [(3) দ্বারা]

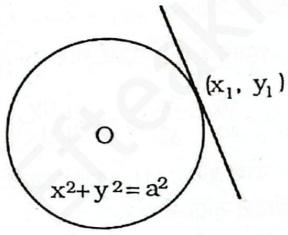
অতএব (1) এর উপরস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক (1) নিজেই।

সুতরাং কোন সরলরেখা যে কোন আকারেই হউক না কেন তাহার উপরস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক সে নিজেই।

উপপাদ্য–4. দেখাও যে $x^2 + y^2 = a^2$ ..... (1) বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1 + yy_1 = a^2$.

প্রমাণ ঃ ধরি (1) বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$ ..... (2)

যেখানে $m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)}$



এখন (1) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = -\frac{x_1}{y_1} \text{ ..... (3)}$$

তাহা হইলে (2) $\Rightarrow y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$ [(3) দ্বারা]

$$\Rightarrow yy_1 - y_1^2 = -(xx_1 - x_1^2) \Rightarrow xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 \text{ ..... (4)}$$

আবার যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি (1) বৃত্তের উপর অবস্থিত সেহেতু $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ .... (5)

সুতরাং (4) $\Rightarrow xx_1 + yy_1 = a^2$ [(5) হইতে]

ইহাই নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ।

উপপাদ্য–5. দেখাও যে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (1) বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$.

প্রমাণ ঃ ধরি (1) বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ ..... (2)}$$

এখন (1) হইতে পাই $2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$

[অন্তরণ করিয়া x এর সাপেক্ষে]

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x + g}{y + f} \Rightarrow m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f} \text{ ..... (3)}$$

তাহা হইলে (2) $\Rightarrow y - y_1 = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}(x - x_1)$ [(3) দ্বারা]

$\Rightarrow (y - y_1)(y_1 + f) = -(x_1 + g)(x - x_1)$

$\Rightarrow yy_1 - y_1^2 + fy - fy_1 = -xx_1 + x_1^2 - gx + gx_1$

$\Rightarrow xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$ ..... (4)

এখন (4) এর উভয় পক্ষে $gx_1 + fy_1 + c$ যোগ করিয়া পাই

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ ..... (5)

আবার যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি (1) বৃত্তের উপর অবস্থিত সেহেতু

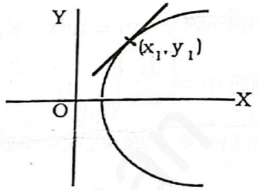
$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ ..... (6)

সুতরাং (5) $\Rightarrow xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ [(6) দ্বারা]

ইহাই নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ।

উপপাদ্য–6. দেখাও যে $y^2 = 4ax$ ..... (1) প্যারাবোলার উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$.

প্রমাণ ঃ (1) হইতে পাই $2y\frac{dy}{dx} = 4a$



$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} \Rightarrow m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = \frac{2a}{y_1}$

তাহা হইলে (1) এর উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$

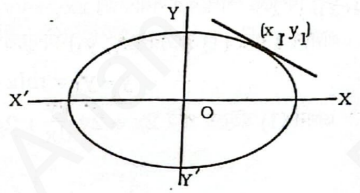
$\Rightarrow yy_1 - y_1^2 = 2a(x - x_1)$

$\Rightarrow yy_1 = 2a(x + x_1) + y_1^2 - 4ax_1$

$\Rightarrow yy_1 = 2a(x + x_1)$ [যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি (1) এর উপরস্থ]

উপপাদ্য–7. দেখাও যে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$..... (1) ইলিপসের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

প্রমাণ ঃ (1) হইতে পাই



$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{y}{b^2}}$

$\Rightarrow m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = -\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{y_1}{b^2}}$

সুতরাং (1) এর উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - y_1 = m(x - x_1), y - y_1 = -\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{y_1}{b^2}}(x - x_1)$

$\Rightarrow \frac{y_1}{b^2}(y - y_1) = -\frac{x_1}{a^2}(x - x_1) \Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$

$\Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ [যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি (1) এর উপরস্থ]

উপপাদ্য–8. দেখাও যে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ..... (1) হাইপ্যারাবোলার উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

প্রমাণ ঃ (1) হইতে পাই

$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{y}{b^2}}$, সুতরাং $m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = \frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{y_1}{b^2}}$.

এখন (1) এর উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = \frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{y_1}{b^2}}(x - x_1)$

$\Rightarrow \frac{y_1}{b^2}(y - y_1) = \frac{x_1}{a^2}(x - x_1) \Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b}$

$\Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ [যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি (1) এর উপর অবস্থিত]

9.A.3. প্যারামেট্রিক আকারের ফাংশনের স্পর্শকের সমীকরণ (Equation of a Tangent of a Function in Parametric Form) ঃ

উপপাদ্য–9. দেখাও যে $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ বক্ররেখার উপরস্থ t বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\{Y - \psi(t)\}\phi'(t) = \{X - \phi(t)\}\psi'(t)$.

প্রমাণ ঃ এখানে $\frac{dx}{dt} = \phi'(t), \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$ এবং $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$

সুতরাং প্রদত্ত বক্ররেখার (x, y) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ

$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \Rightarrow Y - y = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}(X - x)$

$\Rightarrow \{Y - y\}\phi'(t) = \{X - x\}\psi'(t) \Rightarrow \{Y - \psi(t)\}\phi'(t) = \{X - \phi(t)\}\psi'(t)$

ইহাই বক্ররেখার উপরস্থ t বিন্দুতে নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ।

9.A.4. মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ (Equation of a Tangent at the Origin) ঃ

উপপাদ্য–10. দেখাও যে মূল বিন্দুগামী $y = f(x)$ বক্ররেখার ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $Y = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(0,0)} X$

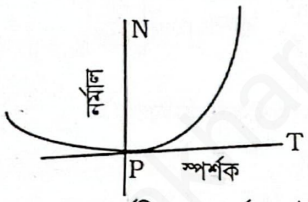
প্রমাণ ঃ (x, y) বিন্দুগামী প্রদত্ত বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ

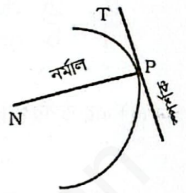
$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \cdots (1)$$

এখন $x = 0, y = 0$ হইলে $(1) \Rightarrow Y = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(0,0)} X$

সংজ্ঞা ঃ মূলবিন্দুগামী কোন মূলদীয় বীজগণিতীয় বক্ররেখার ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল তার সর্ব নিম্নঘাতের রাশির শূন্যের সাথে সমীকৃত অংশটুকু।

9.A.5. নর্মাল বা অভিলম্ব (Normals) :





কোন বক্ররেখার স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব সরলরেখাকে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখার নর্মাল (normal) বলে।

সুতরাং কোন বক্ররেখার স্পর্শ বিন্দুতে স্পর্শক এবং নর্মাল পরস্পর লম্ব। এখন আমরা জানি $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ $P(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $m = \frac{dy}{dx}$. তাহা হইলে ঐ বক্ররেখার উপরস্থ $P(x, y)$ বিন্দুতে নর্মালের ঢাল $-\frac{1}{m} = -\frac{dx}{dy}$ হইবে।

9.A.6. প্রকাশ্য এবং অপ্রকাশ্য আকারের ফাংশনের নর্মালের সমীকরণ (Equation of Normals of Functions of Explicit and Implict Forms) ঃ

উপপাদ্য–11. দেখাও যে $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0$

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

যেখানে স্পর্শকের ঢাল $m = \frac{dy}{dx}$. তাহা হইলে বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে নর্মালের ঢাল $-\frac{1}{m}$ হইবে যেখানে $m = \frac{dy}{dx}$.

সুতরাং নির্ণেয় নর্মালের সমীকরণ $Y - y = -\frac{1}{m}(X - x)$

$$\Rightarrow X - x + m(Y - y) = 0$$

$$\Rightarrow X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0$$

উপপাদ্য–12. দেখাও যে $f(x, y) = 0$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $\frac{X - x}{f_x} = \frac{Y - y}{f_y}$

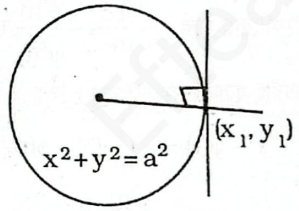
প্রমাণ ঃ প্রদত্ত বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $m = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$ তাহা হইলে বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে নর্মালের ঢাল $-\frac{1}{m} = \frac{f_y}{f_x}$ হইবে।

সুতরাং নির্ণেয় নর্মালের সমীকরণ

$$Y - y = -\frac{1}{m}(X - x) \Rightarrow Y - y = \frac{f_y}{f_x}(X - x) \Rightarrow \frac{X - x}{f_x} = \frac{Y - y}{f_y}$$

উপপাদ্য–13. দেখাও যে $x^2 + y^2 = a^2$ ..... (1) বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $xy_1 - yx_1 = 0$.

প্রমাণ ঃ ধরি (1) বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ



$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1) \cdots\cdots (2)$$

যেখানে $m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)}$

এখন (1) হইতে পাই $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীরকণ করিয়া]

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = -\frac{x_1}{y_1} \cdots\cdots (3)$$

তাহা হইলে $(2) \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$ [(3) দ্বারা]

$$\Rightarrow yx_1 - x_1y_1 = xy_1 - x_1y_1$$

$$\Rightarrow xy_1 - yx_1 = 0$$

ইহাই নির্ণেয় নর্মালের সমীকরণ।

উপপাদ্য–14. দেখাও যে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ..... (1) বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $\frac{y - y_1}{y_1 + f} = \frac{x - x_1}{x_1 + g}$.

প্রমাণ ঃ ধরি (1) বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1) \cdots\cdots (2) \text{ যেখানে } m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)}$$

এখন (1) হইতে পাই $2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+8}{y+f} \Rightarrow m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = -\frac{x_1+g}{y_1+f} \quad \cdots\cdots (3)$$

তাহা হইলে (2) $\Rightarrow y - y_1 = \frac{y_1+f}{x_1+g}(x - x_1)$ [(3) দ্বারা]

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{y_1+f} = \frac{x-x_1}{x_1+g}$$ ইহাই নির্ণেয় নর্মালের সমীকরণ।

9.A.7. প্যারামেট্রিক্স আকারের ফাংশনের নর্মালের সমীকরণ (Equation of a Normal of a Function in Parametric Form) ঃ

উপপাদ্য–15. দেখাও যে $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ বক্ররেখার উপরস্থ t বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $\{X - \phi(t)\}\phi'(t) + \{Y - \psi(t)\}\psi'(t) = 0$.

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত বক্ররেখার t বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $m = \frac{dy}{dt} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$. তাহা হইলে t বিন্দুতে নর্মালের ঢাল $-\frac{1}{m} = -\frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}$ হইবে।

সুতরাং বক্ররেখার উপরস্থ t বিন্দুতে নির্ণেয় নর্মালের সমীকরণ

$$Y - \psi(t) = -\frac{1}{m}\{X - \phi(t)\}$$

$$\Rightarrow Y - \psi(t) = -\frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}\{X - \phi(t) \Rightarrow \{X - \phi(t)\}\phi'(t) + \{Y - \psi(t)\}\psi'(t) = 0.$$

উদাহরণমালা

উদাহরণ–1. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ ..... (1) বক্ররেখার যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের এবং y অক্ষের সমান্তরাল ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 - 4\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow (y-2)\frac{dy}{dx} + x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y-2}$$

এখন স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হইলে $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{y-2} = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

এখন $x = 1$ হইলে (1) $\Rightarrow 1 + y^2 - 2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y = 0$

$$\Rightarrow y(y-4) = 0 \Rightarrow y = 0, y = 4$$

সুতরাং প্রদত্ত বক্ররেখার (1, 0) এবং (1, 4) বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল।

আবার স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল হইলে তাহা x অক্ষের উপর লম্ব হইবে। সুতরাং

$$\frac{dy}{dx} = \infty \Rightarrow \frac{1-x}{y-2} = \infty \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

এখন $y = 2$ হইলে (1) $\Rightarrow x^2 + 4 - 2x - 8 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3, -1$$

সুতরাং প্রদত্ত বক্ররেখার (3, 2) এবং (–1, 2) বিন্দুতে স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল।

উদাহরণ–2. $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্ররেখার $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^3 + y^3 = 3axy$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3ay + 3ax\frac{dy}{dx} \quad \left[\frac{d}{dx} \text{প্রয়োগ করে}\right]$$

$$\Rightarrow (3y^2 - 3ax)\frac{dy}{dx} = 3ay - 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

এখন $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ বিন্দুতে ঢাল $m = \frac{dy}{dx} = \frac{a.\frac{3a}{2} - \left(\frac{3a}{2}\right)^2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a.\frac{3a}{2}} = -1$

সুতরাং প্রদত্ত বক্ররেখার $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - \frac{3a}{2} = m\left(x - \frac{3a}{2}\right) \Rightarrow y - \frac{3a}{2} = -1\left(x - \frac{3a}{2}\right) \Rightarrow x + y = 3a$$

অভিলম্বের সমীকরণ $y - \frac{3a}{2} = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{3a}{2}\right) \Rightarrow y - \frac{3a}{2} = -\frac{1}{(-1)}\left(x - \frac{3a}{2}\right)$

$$\Rightarrow y - \frac{3a}{2} = x - \frac{3a}{2} \Rightarrow x - y = 0.$$

উদাহরণ–3. $x = e^t \sin t$, $y = e^{-t}\cos t$ বক্ররেখার $t = \pi$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[DUH–1985]**

সমাধান ঃ $x = e^t \sin t$, $y = e^{-t}\cos t$

তাহা হইলে $\frac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t$ $\frac{dy}{dt} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{e^{-t}(\sin t + \cos t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = -e^{-2t} \qquad \therefore m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=\pi} = -e^{-2\pi}$$

আবার $t = \pi$ হইলে $x = e^{\pi}\sin\pi = 0$ এবং $y = e^{-\pi}\cos\pi = -e^{-\pi}$

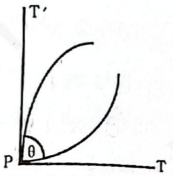
সুতরাং $(0, -e^{-\pi})$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y + e^{-\pi} = m(x - 0) \Rightarrow y + e^{-\pi} = -e^{-2\pi}x \Rightarrow x + ye^{2\pi} + e^{\pi} = 0$$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ $y + e^{-\pi} = -\frac{1}{m}(x - 0) \Rightarrow y + e^{-\pi} = \frac{1}{e^{-2\pi}}x$

$$\Rightarrow x - e^{-2\pi}y - e^{-3\pi} = 0$$

9.A.8. দুইটি ছেদিত বক্ররেখার অন্তর্গত কোণ (Angle between two Intersecting Straight Lines) ঃ



দুইটি ছেদিত বক্ররেখার ছেদ বিন্দুতে কোণ বলতে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাদ্বয়ের স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে বুঝায়। চিত্রে $y = f(x)$ এবং $y = F(x)$ বক্ররেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু P তে কোণ বলিতে PT এবং PT′ স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যে কোণ $\angle T'PT = \theta$ কে বুঝায়।

উপপাদ্য–16. যদি $y = f(x)$ ..... (1) এবং $y = F(x)$ ..... (2) বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে (x, y) বিন্দুতে ছেদ করে এবং ঐ ছেদ বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যে কোণ θ হয় তবে দেখাও যে $\theta = \tan^{-1}\frac{f'(x) \backsim F'(x)}{1 + f'(x)\,F'(x)}$

প্রমাণ ঃ ধরি বক্ররেখা (1) এবং (2) এর ছেদবিন্দু (x, y) এ স্পর্শকদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে m_1 এবং m_2. তাহা হইলে $m_1 = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ এবং $m_2 = \frac{dy}{dx} = F'(x)$

সুতরাং $\tan\theta = \frac{m_1 \backsim m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{f'(x) \backsim F'(x)}{1 + f'(x)\,F'(x)}$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{f'(x) \backsim F'(x)}{1 + f'(x)\,F'(x)} \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ (i) (1) এবং (2) বক্ররেখা দুইটি (x, y) বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করিবে যদি $\theta = 0$ হয়। তাহা হইলে $\tan 0 = 0 = \frac{f'(x) \backsim F'(x)}{1 + f'(x)\,F'(x)} \Rightarrow f'(x) = F'(x)$

(ii) (1) এবং (2) বক্ররেখা দুইটি (x, y) বিন্দুতে পরস্পর লম্ব হইবে যদি $\theta = \frac{\pi}{2}$ হয়।

তাহা হইলে $\tan\frac{\pi}{2} = \infty = \frac{f'(x) \backsim F'(x)}{1 + f'(x)\,F'(x)} \Rightarrow 1 + f'(x)\,F'(x) = 0$

$$\Rightarrow f'(x)\,F'(x) = -1$$

উদাহরণ–4. $y = 2x^2$ ..... (1) এবং $y = x^2 + 1$ ..... (2) বক্ররেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে উহাদের মধ্যে কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (1) এবং (2) হইতে আমরা পাই $2x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

সুতরাং (1) এবং (2) পরস্পরকে (1, 2) এবং (–1, 2) বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

ধরি (1) এবং (2) এর মধ্যে ছেদ বিন্দু (1, 2) এ কোণ θ_1.

তাহা হইলে $\theta_1 = \left[\tan^{-1}\frac{f'(x) \backsim F'(x)}{1 + f'(x)\,F'(x)}\right]_{(1,2)} = \left[\tan^{-1}\frac{4x - 2x}{1 + 4x.2x}\right]_{(1,2)}$

$$= \left[\tan^{-1}\frac{2x}{1 + 8x^2}\right]_{x=1} = \tan^{-1}\frac{2.1}{1 + 8.1} = \tan^{-1}\frac{2}{9}$$

আবার ধরি (1) এবং (2) এর মধ্যে ছেদবিন্দু (–1, 2) এ কোণ θ_2. তাহা হইলে

$$\theta_2 = \left[\tan^{-1}\frac{2x}{1 + 8x^2}\right]_{x=-1} = \tan^{-1}\frac{-2}{9}.$$

উপপাদ্য–17. যদি $f(x, y) = 0$ ..... (1) এবং $F(x, y) = 0$ ..... (2) বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে (x, y) বিন্দুতে ছেদ করে এবং ঐ ছেদ বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যে কোণ θ হয় তবে দেখাও যে $\theta = \tan^{-1}\frac{f_x F_y \backsim F_x f_y}{f_x F_x + f_y F_y}$

প্রমাণ ঃ ধরি বক্ররেখা (1) এবং (2) এর ছেদ বিন্দু (x, y) এ স্পর্শকদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে m_1 এবং m_2. তাহা হইলে $m_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$ এবং $m_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

সুতরাং $\tan\theta = \frac{m_1 \backsim m_2}{1 + m_1 m_2} = \tan^{-1}\frac{-\frac{f_x}{f_y} \backsim \left(-\frac{F_x}{F_y}\right)}{1 + \frac{f_x}{f_y}\frac{F_x}{F_y}}$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{f_x F_y \backsim F_x f_y}{f_x F_x + f_y F_y}. \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ (i) (1) এবং (2) বক্ররেখা দুইটি (x, y) বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করিবে যদি $\theta = 0$ হয়। তাহা হইলে

$$\tan 0 = 0 = \frac{f_x F_y \backsim F_x f_y}{f_x F_x + f_y F_y} \Rightarrow f_x F_y = F_x f_y \Rightarrow \frac{f_x}{F_x} = \frac{f_y}{F_y}.$$

(ii) (1) এবং (2) বক্ররেখাদ্বয় (x, y) বিন্দুতে পরস্পর লম্ব হইবে যদি $\theta = \frac{\pi}{2}$ হয়। তাহা হইলে $\tan\frac{\pi}{2} = \infty = \frac{f_x F_y \backsim F_x f_y}{f_x F_x + f_y F_y} \Rightarrow f_x F_x + f_y F_y = 0$

উদাহরণ–5. দেখাও $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ..... (1) এবং

$$x^2\sec^2\alpha - y^2\operatorname{cosec}^2\alpha - a^2 + b^2 = 0 \text{ ..... (2)}$$

বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ বিন্দু $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ এ লম্বভাবে ছেদ করে।

সমাধান ঃ ইহা স্পষ্ট যে (1) এবং (2) পরস্পরকে $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$

এবং $F(x, y) = x^2 \sec^2\alpha - y^2 \operatorname{cosec}^2\alpha - a^2 + b^2$. তাহা হইলে

$$f_x = \frac{2x}{a^2},\ f_y = \frac{2y}{b^2},\ F_x = 2x \sec^2\alpha,\ F_y = -2y \operatorname{cosec}^2\alpha$$

এখানে $f_x F_x + f_y F_y = \frac{2x}{a^2} \cdot 2x \sec^2\alpha - \frac{2y}{b^2} \cdot 2y \operatorname{cosec}^2\alpha$

$$= \frac{4x^2}{a^2} \sec^2\alpha - \frac{4y^2}{b^2} \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$= \frac{4}{a^2} (a \cos\alpha)^2 \sec^2\alpha - \frac{4}{b^2} (b \sin\alpha)^2 \operatorname{cosec}^2\alpha = 0$$

সুতরাং (1) এবং (2) বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে $(a \cos\alpha; b \sin\alpha)$ বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে।

উদাহরণ–6. দেখাও যে $\frac{x^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda_1} - 1 = 0$ ..... (1)

এবং $\frac{x^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda_2} - 1 = 0$ ..... (2) বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে (x, y) বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে।

সমাধান ঃ ধরি $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda_1} - 1$

এবং $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2 + \lambda_2} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda_2} - 1$

তাহা হইলে $f_x = \frac{2x}{a^2 + \lambda_1}$, $f_y = \frac{2y}{b^2 + \lambda_1}$, $F_x = \frac{2x}{a^2 + \lambda_2}$, $F_y = \frac{2y}{b^2 + \lambda_2}$.

এখন (1) এবং (2) বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে (x, y) বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিবে যদি $f_x F_x + f_y F_y = 0$ হয়।

অর্থাৎ যদি $\frac{4x^2}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)} + \frac{4y^2}{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)} = 0$ হয়।

অর্থাৎ যদি $(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)x^2 + (a^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)y^2 = 0$ ..... (3) হয়।

এখন (1) – (2) $\Rightarrow \left(\frac{1}{a^2 + \lambda_1} - \frac{1}{a^2 + \lambda_2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2 + \lambda_1} - \frac{1}{b^2 + \lambda_2}\right)y^2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{(a^2 + \lambda_2) - (a^2 + \lambda_1)}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)} x^2 + \frac{(b^2 + \lambda_2) - (b^2 + \lambda_1)}{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)} y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)} x^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)} y^2 = 0$$

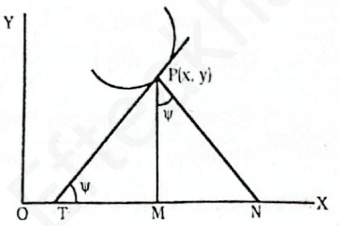
$$\Rightarrow (b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)x^2 + (a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)y^2 = 0$$

ইহা (3) এর সমতুল্য।

সুতরাং (1) এবং (2) বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে (x, y) বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে।

9.A.9. উপস্পর্শক, উপঅভিলম্ব বা উপনর্মাল এবং স্পর্শক ও অভিলম্বের দৈর্ঘ্য (Subtangent, Subnormal and Lengths of Tangent and Normal) ঃ

ধরি $y = f(x, y)$ বক্ররেখার উপর একটি বিন্দু P(x, y). এখন P বিন্দুতে PT স্পর্শক এবং PN নর্মাল আঁকি যাহা x অক্ষকে যথাক্রমে T এবং N বিন্দুতে ছেদ করে। আবার P বিন্দু হইতে x অক্ষের উপর PM লম্ব টানি যাহা x অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করে।



x অক্ষ বরাবর স্পর্শক PT এর লম্ব অভিক্ষেপ TM কে উপস্পর্শক এবং নর্মাল PN এর লম্ব অভিক্ষেপ MN কে উপঅভিলম্ব বা উপনর্মাল বলে। এখন যদি PT স্পর্শক x অক্ষের সাথে ψ কোণ উৎপন্ন করে তবে $\angle PTM = \angle MPN = \psi$.

উপস্পর্শক TM ঃ $\frac{TM}{PM} = \cot\psi$ [চিত্র হইতে]

$$\Rightarrow TM = PM \cot\psi = \frac{PM}{\tan\psi} = \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{y}{y_1}$$

যেখানে $PM = y$ এবং $\tan\psi = \frac{dy}{dx} = y_1$.

উপঅভিলম্ব MN ঃ $\frac{MN}{PM} = \tan\psi$ [চিত্র হইতে]

$$\Rightarrow MN = PM \tan\psi = y\frac{dy}{dx} = yy_1$$

স্পর্শক PT এর দৈর্ঘ্য ঃ $PT = \sqrt{PM^2 + TM^2}$ [চিত্র হইতে]

$$= \sqrt{(yy_1)^2 + \left(\frac{y}{y_1}\right)^2} = \frac{y}{y_1}\sqrt{1 + y_1^2}$$

অভিলম্ব PN এর দৈর্ঘ্য ঃ $PN = \sqrt{PM^2 + MN^2}$ [চিত্র হইতে]

$$= \sqrt{y^2 + (yy_1)^2} = y\sqrt{1 + y_1^2}.$$

উদাহরণ–7. প্রমাণ কর যে কোন বক্ররেখার জন্য $\frac{\text{উপস্পর্শক}}{\text{উপঅভিলম্ব}} = \left(\frac{\text{স্পর্শকের দৈর্ঘ্য}}{\text{অভিলম্বের দৈর্ঘ্য}}\right)^2$

সমাধান ঃ আমরা জানি উপস্পর্শক $= \frac{y}{y_1}$ এবং উপঅভিলম্ব $= yy_1$

$$\frac{\text{উপস্পর্শক}}{\text{উপঅভিলম্ব}} = \frac{\frac{y}{y_1}}{yy_1} = \left(\frac{1}{y_1}\right)^2$$

আবার আমরা জানি, স্পর্শকের দৈর্ঘ্য = \F(y,y$_1$) \R(1 + y$_{\S(2,1)}$) এবং অভিলম্বের দৈর্ঘ্য = $y\sqrt{1+y_1^2}$

$$\left(\frac{\text{স্পর্শকের দৈর্ঘ্য}}{\text{অভিলম্বের দৈর্ঘ্য}}\right)^2 = \left\{\frac{\frac{y}{y_1}\sqrt{1+y_1^2}}{y\sqrt{1+y_1^2}}\right\}^2 = \left(\frac{1}{y_1}\right)^2$$

সুতরাং $\frac{\text{উপস্পর্শক}}{\text{উপঅভিলম্ব}} = \left(\frac{\text{স্পর্শকের দৈর্ঘ্য}}{\text{অভিলম্বের দৈর্ঘ্য}}\right)^2$.

উদাহরণ–8. $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ বক্ররেখার t বিন্দুতে উপস্পর্শক, উপ অভিলম্ব, স্পর্শকের দৈর্ঘ্য অভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং স্পর্শক দ্বারা অক্ষদ্বয়ে খন্ডিত অংশ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে $\frac{dx}{dt} = a(1 + \cos t)$ এবং $\frac{dy}{dt} = a \sin t$.

তাহা হইলে $y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a(1+\cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2\cos^2 \frac{t}{2}} = \tan \frac{t}{2}$

এখানে উপস্পর্শক $\frac{y}{y_1} = \frac{a(1-\cos t)}{\tan \frac{t}{2}} = \frac{2a \sin^2 \frac{t}{2}}{\tan \frac{t}{2}} = a \sin t$

উপঅভিলম্ব $= yy_1 = a(1 - \cos t) \tan \frac{t}{2} = 2a \sin^2 \frac{t}{2} \tan \frac{t}{2}$

স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \frac{y}{y_1}\sqrt{1+y_1^2} = a \sin t \sqrt{1+\tan^2 \frac{t}{2}} = 2a \sin \frac{t}{2}$

অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= y\sqrt{1+y_1^2} = 2a \sin^2 \frac{t}{2} \sec \frac{t}{2} = 2a \sin \frac{t}{2} \tan \frac{t}{2}$.

স্পর্শক দ্বারা x অক্ষে খন্ডিত অংশ $= x - \frac{y}{y_1} = a(t + \sin t) - a \sin t = at$

স্পর্শকের দ্বারা y অক্ষে খন্ডিত অংশ

$$= y - xy_1 = a(1 - \cos t) - a(t + \sin t) \tan \frac{t}{2}$$

$$= 2a \sin^2 \frac{t}{2} - at \tan \frac{t}{2} - 2a \sin^2 \frac{t}{2} = -at \tan \frac{t}{2}.$$

উদাহরণ–9. $ax^2 + by^2 = 1$ এবং $a'x^2 + b'y^2 = 1$ বক্র রেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করিলে দেখাও যে $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$. **[NUH–96, DUH–77, 85]**

সমাধান ঃ $ax^2 + by^2 = 1$ ..... (1) এবং $a'x^2 + b'y^2 = 1$ ..... (2)

এখন x এর সাপেক্ষে অন্তরণ করিলে (1) $\Rightarrow 2ax + 2by\frac{dy}{dx} = 0$ ..... (3)

এবং (2) $\Rightarrow 2a'x + 2b'y\frac{dy}{dx} = 0$ ..... (4)

(3) হইতে $m_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{by}$ এবং (4) হইতে $m_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{a'x}{b'y}$

এখন (1) এবং (2) লম্বভাবে ছেদ করিলে $m_1 m_2 = -1$

$$\Rightarrow \left(-\frac{ax}{by}\right)\left(-\frac{a'x}{b'y}\right) = -1$$

$$\Rightarrow aa'x^2 = -bb'y^2 \text{ ..... (5)}$$

আবার (2) – (1) $\Rightarrow (a' - a)x^2 + (b' - b)y^2 = 0$

$$\Rightarrow (a' - a)x^2 = -(b' - b)y^2 \text{ ..... (6)}$$

(6) কে (5) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\frac{a'-a}{aa'} = \frac{b'-b}{bb'} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ–10. $x^2 + 2y^2 = 3$ বক্ররেখার (1, – 1) বিন্দুতে উহার স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। মোটামুটি লেখচিত্র অংকন কর। **[DUH–1988]**

সমাধান ঃ (প্রথম অংশ) ঃ দেওয়া আছে $x^2 + 2y^2 = 3$ ..... (1)

এখন (1) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া আমরা পাই $2x + 4y\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore m = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{4y} = \frac{1}{2} \text{ [(1, –1) বিন্দুতে]}$$

সুতরাং প্রদত্ত বক্ররেখার (1, –1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণের

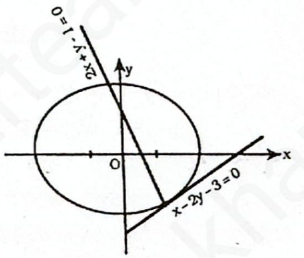
$$y + 1 = m(x - 1) \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x - 2y - 3 = 0$$

আবার প্রদত্ত বক্ররেখার (1, – 1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y + 1 = -\frac{1}{m}(x - 1) \Rightarrow y + 1 = -2(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

(দ্বিতীয় অংশ) ঃ $x^2 + 2y^2 = 3$

$\Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3/2} = 1$, ইহা একটি ইলিপসের সমীকরণ।



এখানে $a^2 = 3$, $b^2 = \frac{3}{2}$ এবং ইহার কেন্দ্র = (0, 0)

সুতরাং $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$ এবং ইহার উৎকেন্দ্রতা

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{3}{(3/2)}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

উদাহরণ–11. যদি $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ এবং $\frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{d}=1$ বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে তবে দেখাও যে $a-b=c-d$. **[RUH–1987, RUS–1988]**

সমাধান ঃ $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ ..... (1) এবং $\frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{d}=1$ ..... (2)

এখন (1) হইতে পাই $\frac{2x}{a}+\frac{2y}{b}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow m_1=\frac{dy}{dx}=-\frac{x/a}{y/b}$

আবার (2) হইতে পাই $\frac{2x}{c}+\frac{2y}{d}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow m_2=\frac{dy}{dx}=-\frac{x/c}{y/d}$

এখন (1) এবং (2) লম্বভাবে ছেদ করিলে

$$m_1m_2=-1 \Rightarrow \frac{x^2/ac}{y^2/bd}=-1 \Rightarrow \frac{x^2}{ac}=-\frac{y^2}{bd} \text{ ..... (3)}$$

আবার (1) – (2) $\Rightarrow \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)x^2=-\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)y^2$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{ac}x^2=-\frac{d-b}{bd}y^2 \text{ ..... (4)}$$

এখন (4) কে (3) দ্বারা ভাগ করিলে পাই $c-a=d-b \Rightarrow a-b=c-d$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ–12. দেখাও যে $y^2=4a\left\{x+a\sin\left(\frac{x}{a}\right)\right\}$ বক্ররেখার উপরস্থ যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক রেখাগুলো x অক্ষের সমান্তরাল ঐ সমস্ত বিন্দুগুলো একটি প্যারাবোলার উপর অবস্থান করে। **[DUH–1982, RUH–1982]**

সমাধান ঃ $y^2=4a\left\{x+a\sin\left(\frac{x}{a}\right)\right\}$ ..... (1)

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=4a\left\{1+a\cos\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}\left\{1+\cos\left(\frac{x}{a}\right)\right\} \text{ ..... (2)}$$

এখন যে সমস্ত বিন্দুতে (1) এর স্পর্শক সমূহ x অক্ষের সমান্তরাল ঐ সমস্ত বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=0$. সুতরাং (2) হইতে পাই $1+\cos\left(\frac{x}{a}\right)=0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{a}\right)=-1$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{a}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{x}{a}\right)}=\sqrt{1-1}=0$$

সুতরাং (1) $\Rightarrow y^2=4a\{x+a.0\}$

$\Rightarrow y^2=4ax$, ইহা একটি প্যারাবোলার সমীকরণ নির্দেশ করে।

সুতরাং (1) এর যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x অক্ষের সমান্তরাল তাহা $y^2=4ax$ প্যারাবোলার উপর অবস্থিত।

উদাহরণ–13. মূল বিন্দু হইতে $y=\sin x$ বক্ররেখার উপর স্পর্শক সমূহ টানা হইয়াছে। দেখাও যে ঐ স্পর্শ বিন্দুগুলো $x^2y^2=x^2-y^2$ বক্ররেখার উপর অবস্থিত। **[RUH–1984]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $y=\sin x$ ..... (1)

এখন (1) এর উপর (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x) \Rightarrow Y-y=\frac{d}{dx}(\sin x)(X-x)$$

$$\Rightarrow Y-y=\cos x(X-x) \text{ ..... (2)}$$

এখন (2) মূলবিন্দু [(X, Y) = (0, 0)] গামী হইলে পাই

$$0-y=\cos x(0-x) \Rightarrow y=x\cos x \Rightarrow \frac{y}{x}=\cos x \text{ ..... (3)}$$

এখন (1) এবং (3) বর্গকরে যোগ করিয়া পাই

$$y^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\sin^2x+\cos^2x=1$$

$\Rightarrow x^2y^2+y^2=x^2 \Rightarrow x^2y^2=x^2-y^2$ [প্রমাণিত]

সুতরাং মূলবিন্দু হইতে $y=\sin x$ বক্ররেখার উপর টানা স্পর্শকগুলোর স্পর্শ বিন্দুগুলো $x^2y^2=x^2-y^2$ বক্র রেখার উপর অবস্থান করে।

উদাহরণ–14. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ..... (1) বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে অভিলম্ব রেখা x অক্ষের সাথে ϕ কোণ উৎপন্ন করিলে দেখাও যে উহার সমীকরণ

$y\cos\phi-x\sin\phi=a\cos 2\phi$. **[NUH–1979, RUH–1968]**

সমাধান ঃ (1) হইতে পাই

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow m=\frac{dy}{dx}=-\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

(x, y) বিন্দুতে (1) এর অভিলম্ব x অক্ষের সাথে ϕ কোন উৎপন্ন করিলে শর্তানুসারে $\tan\phi=-\frac{1}{m}=\frac{x^{1/3}}{y^{1/3}}$

$$\therefore \sin\phi=\frac{x^{1/3}}{\sqrt{x^{2/3}+y^{2/3}}}=\frac{x^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}}}=\frac{x^{1/3}}{a^{1/3}} \text{ ..... (2)}$$

$$\text{এবং } \cos\phi=\frac{y^{1/3}}{\sqrt{x^{2/3}+y^{2/3}}}=\frac{y^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}}}=\frac{y^{1/3}}{a^{1/3}} \text{ ..... (3)}$$

এখন (2) হইতে পাই $x=a\sin^3\phi$ এবং (3) হইতে পাই $y=a\cos^3\phi$.

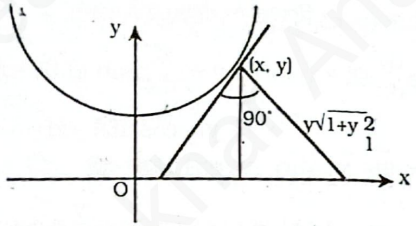
L. H. S. $=y\cos\phi-x\sin\phi$

$=a\cos^4\phi-a\sin^4\phi$ [x এবং y এর মান বসায়ে]

$=a(\cos^2\phi+\cos^2\phi)(\cos^2\phi-\sin^2\phi)=a\cos 2\phi=$ R. H. S.

উদাহরণ–15. দেখাও যে ক্যাটেনারী $y=c\cosh\frac{x}{c}$ এর (x, y) বিন্দুতে x অক্ষ ও বক্ররেখাটির মধ্যবর্তী অভিলম্বের অংশ $\frac{y^2}{c}$. **[RUH–1974, 1985, CUH–1982]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে



$$y = c\cosh\frac{x}{c} \Rightarrow y_1 = \frac{dy}{dx} = c\sinh\frac{x}{c}\cdot\frac{1}{c} = \sinh\frac{x}{c}$$

সুতরাং নির্ণেয় অভিলম্বের অংশ $= y\sqrt{1+y_1^2} = y\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{c}}$

$$= y\cosh\frac{x}{c} = y.\frac{y}{c} = \frac{y^2}{c}. \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

উদাহরণ–16. $lx + my = 1$ সরলরেখাটি $(ax)^n + (by)^n = 1$ ..... (1) বক্ররেখাকে স্পর্শ করিলে দেখাও যে $\left(\frac{l}{a}\right)^{n/n-1} + \left(\frac{m}{b}\right)^{n/n-1} = 1$ **[RUH–1985]**

সমাধান ঃ (1) হইতে পাই $na^n x^{n-1} + nb^n y^{n-1}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{a^n x^{n-1}}{b^n y^{n-1}}$

এখন (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$

$$\Rightarrow Y - y = -\frac{a^n x^{n-1}}{b^n y^{n-1}}(X - x)$$

$$\Rightarrow (Y - y)b^n y^{n-1} = -a^n x^{n-1}(X - x)$$

$$\Rightarrow a^n x^{n-1}X + b^n y^{n-1}Y = (ax)^n + (by)^n$$

$$\Rightarrow a^n x^{n-1}X + b^n y^{n-1}Y = 1 \text{ ..... (2) [(1) হইতে]}$$

ইহা $lX + mY = 1$ ..... (3) এর সমতুল্য

এখন (2) এবং (3) হইতে পাই $\frac{l}{a^n x^{n-1}} = \frac{m}{b^n y^{n-1}} = 1$

$$\Rightarrow \frac{l/a}{(ax)^{n-1}} = \frac{m/b}{(by)^{n-1}} = 1 \Rightarrow \frac{l}{a} = (ax)^{n-1},\ \frac{m}{b} = (by)^{n-1}$$

$$\therefore \left(\frac{l}{a}\right)^{n/n-1} + \left(\frac{m}{b}\right)^{n/n-1} = (ax)^n + (by)^n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{l}{a}\right)^{n/n-1} + \left(\frac{m}{b}\right)^{n/n-1} = 1 \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

উদাহরণ–17. যদি $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$ ..... (1) বক্র রেখাকে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ..... (2) সরলরেখাটি স্পর্শ করে তবে দেখাও যে $(a\cos\alpha)^{m/m-1} + (b\sin\alpha)^{m/m-1} = p^{m/m-1}$ **[NUH(NM)–02, DUH–75, 85, CUH–86]**

সমাধান ঃ ধরি $f(x, y) = \frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} - 1 = 0.$

তাহা হইলে $f_x = \frac{mx^{m-1}}{a^m}$ এবং $f_y = \frac{my^{m-1}}{b^m}$.

এখন (1) এর (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$(X - x)f_x + (Y - y)f_y = 0 \Rightarrow (X - x)\frac{mx^{m-1}}{a^m} + (Y - y)\frac{my^{m-1}}{b^m} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Xx^{m-1}}{a^m} + \frac{Yy^{m-1}}{b^m} = \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m$$

$$\Rightarrow \frac{Xx^{m-1}}{a^m} + \frac{Yy^{m-1}}{b^m} = 1 \text{..... (3) [(1) এর সাহায্যে]}$$

আবার (2) এর (X, Y) চলকে সমীকরণ হল $X\cos\alpha + Y\sin\alpha = p$ ..... (4)

(3) এবং (4) এর উভয়ে (x, y) বিন্দুতে (1) এর স্পর্শক নির্দেশ করে। সুতরাং ইহারা একই সরল রেখা নির্দেশ করে এবং ইহারা সমতুল্য। এখন (3) এবং (4) তুলনা করিয়া পাই

$$\frac{\cos\alpha}{\left(\frac{x^{m-1}}{a^m}\right)} + \frac{\sin\alpha}{\left(\frac{y^{m-1}}{b^m}\right)} = \frac{p}{1} \Rightarrow \frac{a\cos\alpha}{\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1}} = \frac{b\sin\alpha}{\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}} = p$$

$$\Rightarrow a\cos\alpha = p\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1},\ b\sin\alpha = p\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}$$

সুতরাং $(a\cos\alpha)^{m/m-1} + (b\sin\alpha)^{m/m-1} = p^{m/m-1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m\right]$

$\Rightarrow (a\cos\alpha)^{m/m-1} + (b\sin\alpha)^{m/m-1} = p^{m/m-1}$. (প্রমাণিত)

উদাহরণ–18. $x^3 + y^3 = a^3$ বক্র রেখাটির (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি পুনরায় (x_2, y_2) বিন্দুতে ছেদ করিলে দেখাও যে $\frac{x_2}{x_1} + \frac{y_2}{y_2} = -1$. **[DUH–1996, 1985]**

সমাধান ঃ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি $x^3 + y^3 = a^3$ ..... (1) বক্র রেখার উপর অবস্থিত হইলে পাই $x_1^3 + y_1^3 = a^3$ ..... (2) এবং $x_2^3 + y_2^3 = a^3$ ..... (3)

এখন (1) কে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow m = \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2} = -\frac{x_1^2}{y_1^2} \text{ [}(x_1, y_1) \text{ বিন্দুতে]}$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\Rightarrow y - y_1 = -\frac{x_1^2}{y_1^2}(x - x_1) \Rightarrow x_1^2 x + y_1^2 y = x_1^3 + y_1^3$$

$$\Rightarrow xx_1^2 + yy_1^2 = a^3 \text{ ..... (4) [(2) হইতে]}$$

এখন (4) যদি (1) কে (x_2, y_2) বিন্দুতে ছেদ করে।

তবে $x_2 x_1^2 + y_2 y_1^2 = a^2$ ..... (5)

$(5) - (2) \Rightarrow (x_2 - x_1)x_1^2 + (y_2 - y_1)y_1^2 = 0$

$$\Rightarrow (x_2 - x_1)x_1^2 = -(y_2 - y_1)y_1^2) \text{ ..... (6)}$$

আবার (3) – (2) $\Rightarrow x_2^3 - x_1^3 + y_2^3 - y_1^3 = 0$

$\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)$

$= -(y_2 - y_1)(y_2^2 + y_2y_1 + y_1^2)$ ..... (7)

এখন (6) দ্বারা (7) কে ভাগ করিয়া পাই

$$\frac{x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2}{x_1^2} = \frac{y_2^2 + y_2y_1 + y_1^2}{y_1^2} \Rightarrow \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_1} + 1 = \frac{y_2^2}{y_1^2} + \frac{y_2}{y_1} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_2^2}{x_1^2} - \frac{y_2^2}{y_1^2} + \frac{x_2}{x_1} - \frac{y_2}{y_1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{y_2}{y_1}\right)\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{y_2}{y_1} + 1\right) = 0$$

$\Rightarrow \frac{x_2}{x_1} + \frac{y_2}{y_1} = -1$ [$\because (x_1, y_1)$ এবং (x_2, y_2) দুইটি ভিন্ন বিন্দু] (প্রমাণিত)

উদাহরণ–19. দেখাও যে $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ বক্ররেখার উপরস্থ (a, b) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $\frac{x-a}{b} = \frac{y-b}{a}$. **[NU: 1993]**

সমাধান ঃ $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$

$$\therefore n\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{a} + n\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{b}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}{\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}} \Rightarrow m\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(a,b)} = -\frac{b}{a}\frac{\left(\frac{a}{a}\right)^{n-1}}{\left(\frac{b}{b}\right)^{n-1}} = -\frac{b}{a}$$

সুতরাং (a, b) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$

$$\Rightarrow y - b = \frac{a}{b}(x - a) \Rightarrow \frac{x-a}{b} = \frac{y-b}{a}.$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ–20. দেখাও যে $x^{m+n} = a^{m-n}y^{2n}$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে উপস্পর্শকের m তম ঘাত উপঅভিলম্বের n ঘাতের সমানুপাতিক।

সমাধান ঃ $x^{m+n} = a^{m-n}y^{2n}$ ..... (1)

$\Rightarrow (m + n)\log x = (m - n)\log a + 2n \log y$ [log নিয়া]

$$\therefore \frac{m+n}{x} = \frac{2n}{y}\frac{dy}{dx} \Rightarrow y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{m+n}{2n}\cdot\frac{y}{x}$$

$$\therefore \text{উপস্পর্শক} = \frac{y}{y_1} = \frac{2n}{m+n}x \text{ এবং উপনর্মাল} = yy_1 = \frac{m+n}{2n}\frac{y^2}{x}$$

তাহা হইলে $\frac{(\text{উপস্পর্শক})^m}{(\text{উপনর্মাল})^n} = \frac{\left(\frac{2n}{m+n}x\right)^m}{\left(\frac{m+n}{2n}\frac{y^2}{x}\right)^n} = \left(\frac{2n}{m+n}\right)^{m+n}\frac{x^{m+n}}{y^{2n}}$

$$= \left(\frac{2n}{m+n}\right)^{m+n} \cdot a^{m-n} \quad [(1) \text{ হইতে}]$$

= ধ্রুবক।

সুতরাং উপস্পর্শকের m তম ঘাত উপঅভিলম্বের n তম ঘাতের সমানুপাতিক।

উদাহরণ–21. দেখাও যে, $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুর স্পর্শকের যে অংশটুকু অক্ষদ্বয় দ্বারা খণ্ডিত, উহার দৈর্ঘ্য ধ্রুবক। স্পর্শক ও অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[NUH–2006]**

সমাধান ঃ ধরি $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3}$

$$\therefore f_x = \frac{2}{3}x^{-1/3}, \quad f_y = \frac{2}{3}y^{-1/3}$$

এখন (x_1, y_1) বিন্দুতে প্রদত্ত বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ,

$$(x - x_1)\frac{2}{3}x_1^{-1/3} + (y - y_1)\frac{2}{3}y_1^{-2/3} = 0$$

$$\Rightarrow x\,x_1^{-1/3} + y\,y_1^{-1/3} = a^{2/3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a^{2/3}x_1^{1/3}} + \frac{y}{a^{2/3}y_1^{1/3}} = 1$$

স্পর্শকটি অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে $A(a^{2/3}x_1^{1/3}, 0)$ ও $B(0, a^{2/3}y_1^{1/3})$ বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং অক্ষ দ্বারা স্পর্শকের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য,

$$AB = \sqrt{(a^{2/3}x_1^{1/3})^2 + (a^{2/3}y_1^{1/3})^2}$$

$$= \sqrt{a^{4/3}(x_1^{2/3} + y_1^{2/3})} = \sqrt{a^{4/3}a^{2/3}} = a \text{ (ধ্রুবক)}$$

আবার, স্পর্শক এবং অক্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta AOB = \frac{1}{2} \cdot a^{2/3}x_1^{1/3} \cdot a^{2/3}y_1^{1/3} = \frac{1}{2}a(a\,x_1\,y_1)^{1/3}$$

উদাহরণ–22. কার্ভ $y = x^2 + 2x + 1$ এর (1, 4) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–2003]**

সমাধান ঃ $y = x^2 + 2x + 1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x + 2$$

(1, 4) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার ঢাল, $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,4)} = 4$

এখন, (1, 4) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার সমীকরণ, $y - 4 = m(x - 1)$

$$\Rightarrow y - 4 = 4(x - 1)$$

$$\Rightarrow 4x - y = 0$$

উদাহরণ-23. $y(x - 2)(x - 3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে। সেই বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[NUH-2007]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ, $y(x - 2)(x - 3) - x + 7 = 0$ ..... (1)

(1) বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে। সেই বন্দুতে $y = 0$

$\therefore$ (1) $\Rightarrow x = 7$

$\therefore$ (1) বক্ররেখাটি x অক্ষকে (7, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, (7, 0) বিন্দুতে (1) বক্ররেখার স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

(1) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই,

$$\frac{dy}{dx}(x - 2)(x - 3) + y(x - 3) + y(x - 2) - 1 = 0$$

(7, 0) বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} \cdot 20 - 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{20}$$

$\therefore$ (7, 0) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{1}{20}$

এবং (7, 0) বিন্দুতে অভিলম্ব রেখার ঢাল, $m_2 = -20$

সুতরাং (7, 0) বিন্দুতে (1) বক্ররেখার স্পর্শক রেখার সমীকরণ,

$$y - 0 = m_1(x - 7)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{20}(x - 7)$$

$$\Rightarrow 20y = x - 7$$

$$\Rightarrow x - 20y - 7 = 0$$

আবার, (7, 0) বিন্দুতে (1) বক্ররেখার অভিলম্ব রেখার সমীকরণ,

$$y - 0 = m_2(x - 7)$$

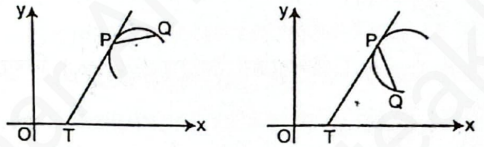
$$\Rightarrow y = -20(x - 7)$$

$$\Rightarrow 20x + y - 140 = 0.$$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

9.A.1. স্পর্শ রেখা কাকে বলে? (What is called tangent line?)

Ans :



মনে করি $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ P ও Q দুইটি নিকটবর্তী বিন্দু। যদি $Q \to P$ হয় তবে PQ সরলরেখার সীমাস্থ অবস্থানের সরলরেখা PT কে P বিন্দুতে ঐ বক্ররেখার স্পর্শ রেখা বা সংক্ষেপে স্পর্শক বলে।

9.A.2. $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ লিখ। [Write the equation of tangent at (x_1, y_1) of the curve $y = f(x)$.] **[NUH-2010]**

Ans : $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$ যেখানে (x, y) হইল স্পর্শকের উপরস্থ যে কোন বিন্দু।

9.A.3. কোন সরলরেখার উপরস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক বলিতে কি বুঝ? [What do you mean by the tangent of a straight line at any point?]

Ans : কোন সরলরেখার উপরস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক ঐ সরলরেখা নিজেই।

9.A.4. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কত? [What is the equation of tangent at (x_1, y_1) of the circle $x^2 + y^2 = a^2$?]

Ans : $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1 + yy_1 = a^2$.

9.A.5. $y^2 = 4ax$ প্যারাবোলার উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কত? [What is the equation of tangent at (x_1, y_1) of the parabola $y^2 = 4ax$?]

Ans : $y^2 = 4ax$ প্যারাবোলার উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$.

9.A.6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কত? [What is the equation of tangent at (x_1, y_1) of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$?]

Ans : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$.

9.A.7. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ হাইপারবোলার উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কত? [What is the equation of tangent at (x_1, y_1) of the hyparbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$?]

Ans : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ হাইপারবোলার উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$.

9.A.8. মূলবিন্দুতে $x^2+y^2+x+y=0$ এর স্পর্শকের সমীকরণ কত? [What is the equation of tangent at origin of $x^2+y^2+x+y=0$?]

Ans : মূলবিন্দুতে প্রদত্ত বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ $x+y=0$

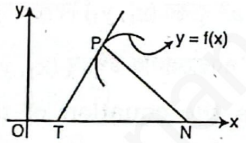
(সর্বনিম্ন ঘাতের পদ = 0 ধরিয়া)

9.A.9. অভিলম্ব কি? (What is normal?)

Ans : কোন বক্ররেখার স্পর্শকের উপর স্পর্শবিন্দুতে অংকিত লম্ব সরলরেখাকে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখার অভিলম্ব বলে।

9.A.10. $y = f(x)$ এর নমুনা লেখচিত্র এবং অভিলম্ব আঁক। (Draw the sample graph of $y = f(x)$ and its normal.)

Ans :



চিত্রে PT স্পর্শকের উপর স্পর্শ বিন্দু P তে PN লম্ব।

$\therefore$ $y = f(x)$ রেখার P বিন্দুতে PN একটি অভিলম্ব।

9.A.11. $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ লিখ। [Write the equation of normal at (x, y) of the curve $y = f(x)$.]

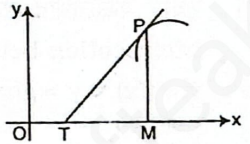
Ans : $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0$ যেখানে (X, Y) হইল অভিলম্বের উপরস্থ যে কোন বিন্দু।

9.A.12. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ কত? [What is the equation of normal at (x_1, y_1) of the circle $x^2+y^2=a^2$?]

Ans : $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $xy_1 - x_1 y = 0$.

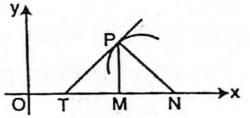
9.A.13. উপস্পর্শক কি? [What is subtangent?]

Ans : $y = f(x)$ বক্ররেখার P বিন্দুতে PT স্পর্শক x অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করিলে x অক্ষ বরাবর PT এর লম্ব অভিক্ষেপ TM কে উপস্পর্শক বলে।



9.A.14. উপঅভিলম্ব কি? [What is subnormal?]

Ans : $y = f(x)$ বক্ররেখার P বিন্দুতে PN অভিলম্ব x অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করিলে x অক্ষ বরাবর PN এর লম্ব অভিক্ষেপ MN কে উপঅভিলম্ব বলে।



9.A.15. উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত? [What is the length of subtangent?]

Ans : $y = f(x)$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুর সাপেক্ষে উপ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \frac{y}{y_1}$ যেখানে $y_1 = \frac{dy}{dx}$.

9.A.16. উপঅভিলম্বের দৈর্ঘ্য কত? [What is the length of subnormal?]

Ans : $y = f(x)$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুর সাপেক্ষে উপঅভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= yy_1$ যেখানে $y_1 = \frac{dy}{dx}$.

9.A.17. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য বলিতে কি বুঝ? [What do you mean by the length of tangent?]

Ans : স্পর্শক ও x অক্ষের ছেদ বিন্দু হইতে স্পর্শ বিন্দু পর্যন্ত দূরত্বকে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য বলা হয়।

9.A.18. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত? [What is the length of tangent?]

Ans : $y = f(x)$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুর সাপেক্ষে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \frac{y}{y_1}\sqrt{1+y_1^2}$

যেখানে $y_1 = \frac{dy}{dx}$.

9.A.19. অভিলম্বের দৈর্ঘ্য বলিতে কি বুঝ? [What do you mean by the length of normal?]

Ans : অভিলম্ব ও x অক্ষের ছেদ বিন্দু হইতে স্পর্শ বিন্দু পর্যন্ত দৈর্ঘকে অভিলম্ব দৈর্ঘ্য বলা হয়।

9.A.20. অভিলম্বের দৈর্ঘ্য কত? [What is the length of normal?]

Ans : $y = f(x)$ বক্ররেখার অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= y\sqrt{1+y_1^2}$ যেখানে $y_1 = \frac{dy}{dx}$.

9.A.21. দুইটি বক্ররেখার অন্তর্গত কোণ সংজ্ঞায়িত কর। [Define angle of intersection between two curves.] **[NUH–2010]**

Ans : $y = f(x)$ ও $y = g(x)$ বক্ররেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ কে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$\theta = \tan^{-1}\frac{f'(x) \sim g'(x)}{1 + f'(x)\, g'(x)}$$

9.A.22. $y = f(x)$ এবং $y = g(x)$ বক্ররেখাদ্বয় লম্ব হওয়ার শর্ত কি? [What is the condition of perpendicularity of two curves $y = f(x)$ and $y = g(x)$?]

Ans : $y = f(x)$ এবং $y = g(x)$ বক্ররেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত ঃ

$$f'(x)\, g'(x) = -1.$$

EXERCISE–9(A)

1. দেখাও যে বক্ররেখা

(i) $y = x^2$ এর (2, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y = 4x - 4$ এবং নর্মালের সমীকরণ $4y + x = 18$.

(ii) $x^2 - y^2 = 3$ এর (2, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y = 2x - 3$ এবং নর্মালের সমীকরণ $x + 2y = 4$.

(iii) $y^2 = 4ax$ এর (a, 2a) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x - y + a = 0$ এবং নর্মালের সমীকরণ $x + y - 3a = 0$.

(iv) $xy = a^2$ এর (a, a) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x + y = 2a$ এবং নর্মালের সমীকরণ $x - y = 0$.

(v) $x^2 + y^2 = 25$ এর (3, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $3x - 4y = 25$ এবং নর্মালের সমীকরণ $4x + 3y = 0$.

(vi) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ এর (3, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x + y - 7 = 0$ এবং নর্মালের সমীকরণ $x - y + 1 = 0$.

2. দেখাও যে বক্ররেখা

(i) $x^2 + y^2 = 100$ এর (6, 8) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $3x + 4y = 50$ এবং নর্মালের সমীকরণ $4x - 3y = 0$.

(ii) $y = 2x^2 - 3x - 1$ এর (1, –2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x - y = 3$ এবং নর্মালের সমীকরণ $x + y + 1 = 0$.

(iii) $x^3 + y^3 = 3xy$ এর $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x + y = 3$ এবং নর্মালের সমীকরণ $y = x$.

(iv) $x^2 - y^2 = 9$ এর (5, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $5x - 4y = 9$ এবং নর্মালের সমীকরণ $4x + 5y = 40$.

3. দেখাও যে বক্ররেখা

(i) $9x^2 - 4y^2 = 108$ এর (4, 3) বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $x + 3y = 13$.

(ii) $y = 2\sin x + \sin 2x$ এর $x = \frac{\pi}{3}$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $2y = 3\sqrt{3}$.

(iii) $y = \cot x$ এর $x = \frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $4x - 8y = \pi - 8$.

(iv) $y = \frac{2x+1}{3-x}$ এর (2, 5) বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $x + 7y = 37$.

4. দেখাও যে বক্ররেখা

(i) $y = x^2 - 5x + 6$ এর $x = 1$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $3x + y = 5$ এবং নর্মালের সমীকরণ $x - 3y + 5 = 0$.

(ii) $y = ax^2 + bx + c$ এর $x = 1$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - (2a + b)x + a - c = 0$ এবং নর্মালের সমীকরণ $x + (2a + b)y = 1 + (2a + b)(a + b + c)$.

(iii) $2x^2 + 3y^2 = 5$ এর (1, –1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $2x - 3y = 5$ এবং নর্মালের সমীকরণ $3x + 2y = 1$

(iv) $5x^2 - 4y^2 = 1$ এর (1, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $5x - 4y = 1$ এবং নর্মালের সমীকরণ $4x + 5y = 9$.

(v) $xy = 6$ এর (3, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $2x + 3y = 12$ এবং নর্মালের সমীকরণ $3x - 2y = 5$.

5. দেখাও যে নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি বক্ররেখা জোট পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

(i) $\begin{cases} xy = c \\ x^2 - y^2 = a^2 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y = cx \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} y^2 = 4ax \\ 2x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = c \\ y = x^3 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} y = e^{-2x} \\ y^2 = x + c \end{cases}$ (vi) $\begin{cases} e^x + e^{-y} = a^2 \\ e^{-x} - e^y = c \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 2 = 0 \\ 3x^2y - y^3 - 2 = 0 \end{cases}$ (viii) $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{13} = 1 \end{cases}$

(ix) $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 45 \\ x^2 - 4y^2 = 5 \end{cases}$ (x) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 20 \\ 4y^2 - x^2 = 8 \end{cases}$

6. দেখাও যে $ax + by = 1$ সরলরেখাটি

(i) $(lx)^2 + (my)^2 = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করিলে $\left(\frac{a}{l}\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 = 1$.

(ii) $(lx)^3 + (my)^3 = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করিলে $\left(\frac{a}{l}\right)^{3/2} + \left(\frac{b}{m}\right)^{3/2} = 1$.

(iii) $(lx)^n + (my)^n = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করিলে $\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{b}{m}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$.

7. যদি $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সরলরেখাটি

(i) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করে তবে দেখাও যে $(a \cos \alpha)^2 + (b \sin \alpha)^2 = p^2$.

(ii) $\left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} + \left(\frac{y}{b}\right)^{3/2} = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করে তবে দেখাও যে $(a \cos \alpha)^3 + (b \sin \alpha)^3 = p^3$.

(iii) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n+1}{n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n+1}{n}} = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করে তবে দেখাও যে $(a \cos \alpha)^{n+1} + (b \sin \alpha)^{n+1} = p^{n+1}$.

8. যদি $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সরলরেখাটি

(i) $\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{y}{b}\right)^3 = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করে তবে দেখাও যে $(a \cos \alpha)^{3/2} + (b \sin \alpha)^{3/2} = p^{3/2}$.

(ii) $\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করে তবে দেখাও যে $(a \cos \alpha)^{4/3} + (b \sin \alpha)^{4/3} = p^{4/3}$.

(iii) $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করে তবে দেখাও যে $(a \cos \alpha)^{\frac{m}{m-1}} + (b \sin \alpha)^{\frac{m}{m-1}} = p^{\frac{m}{m-1}}$.

9. দেখাও যে θ বিন্দুতে বক্ররেখা

(i) $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ এর স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1$ এবং নর্মালের সমীকরণ $ax \sec \theta - by \operatorname{cosec} \theta = a^2 - b^2$.

(ii) $x = a \cos^3\theta$, $y = b \sin^3\theta$ এর স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{a} \sec \theta + \frac{y}{b} \operatorname{cosec} \theta = 1$ এবং নর্মালের সমীকরণ $ax \cos \theta - by \sin \theta = a^2 \cos^4\theta - b^2 \sin^4\theta$.

10. দেখাও যে $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ সরল রেখা ঃ

(i) বক্ররেখা $x^3y^2 = a^5$ কে স্পর্শ করিলে $p^5m^3n^2 = (m + n)^5 a^5 \cos^3\theta \sin^2\theta$.

(ii) বক্ররেখা $x^2y^3 = a^5$ কে স্পর্শ করিলে $p^5m^2n^3 = (m + n)^5 a^5 \cos^2\theta \sin^3\theta$.

(iii) বক্ররেখা $x^my^n = a^{m+n}$ কে স্পর্শ করিলে $p^{m+n}\, m^m n^n = (m + n)^{m+n}\, a^{m+n} \cos^m\theta \sin^n\theta$.

11. দেখাও যে $2a^2y = x^2 - 3ax^3$ বক্ররেখার (0, 0) এবং (2a, –2a) বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল।

12. দেখাও যে $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ বক্ররেখার $\theta = \frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $bx + ay = \sqrt{2}ab$.

13. দেখাও যে $y = \sec^4\theta$, $x = \tan^4\theta$ বক্ররেখার $\theta = \frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $2x - y + 2 = 0$

14. দেখাও যে $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ বক্ররেখার θ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} = a\theta \sin \frac{\theta}{2}$.



15. দেখাও যে $ay^2 = x^3$ বক্ররেখার (am^2, am^3) বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $2x + 3my = 3am^2 + 3am^4$.

16. দেখাও যে $x = a(2\cos t + \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ বক্ররেখার t বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $x\cos\frac{t}{2} - y\sin\frac{t}{2} = 3a\cos\frac{3t}{2}$. **[RUH-1985]**

17. দেখাও যে $y = (\sin 2x + \cot x + 2)^2$ বক্ররেখার $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $2x - 24y + 96 - \pi = 0$.

18. দেখাও যে $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ বক্ররেখার $t = \pi$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y = 2a$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ $x = a\pi$.

19. $3b^2y = x^3 - 3ax^2$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তা নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\left[(0, 0), \left(2a, -\frac{4a^3}{3b^2}\right)\right]$

20. $xy^2 = 4(4 - x)$ বক্ররেখার (2, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ [x + y = 4]

21. $y = a\,ln\sin x$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর [Y − y = a cot x(X − x)]

22. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তাহা নির্ণয় কর। উত্তর ঃ [(a, 0)]

23. দেখাও যে $x^2 - y^2 = a^2$ এবং $x^2 + y^2 = a^2\sqrt{2}$ বক্ররেখারদ্বয়ের ছেদ বিন্দুতে কোণ $\frac{\pi}{4}$.

24. দেখাও যে $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4by$ প্যারাবোলাদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে কোণ $\tan^{-1}\frac{3(ab)^{1/3}}{2(a^{2/3} + b^{2/3})}$.

25. দেখাও যে $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$ এবং $y^3 - 3xy^2 + 2 = 0$ বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

26. দেখাও যে $x^2 + 4y^2 = 8$ এবং $x^2 - 2y^2 = 4$ বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

27. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ এবং $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1$ বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করিলে দেখাও যে $a - b = \alpha - \beta$.

28. $y = be^{-x/a}$ বক্ররেখাটি y অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে দেখাও যে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $ax - by + b^2 = 0$

29. $2x^2 - y^2 = 14$ বক্ররেখার যে যে বিন্দুতে নর্মাল $x + 3y = 4$ সরলরেখার সমান্তরাল তা নির্ণয় কর। উত্তর ঃ [(3, 2), (−3, −2)]

30. দেখাও যে $x = a\sin^3\theta$, $y = b\cos^3\theta$ বক্ররেখার θ বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $ax\sin\theta - by\cos\theta = a^2\sin^4\theta - b^2\cos^4\theta$.

31. দেখাও যে $x = 3\cos t - \cos^3 t$, $y = 3\sin t - \sin^3 t$ বক্ররেখার t বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $4(x\sin^3 t - y\cos^3 t) + 3\sin 4t = 0$.
আরো দেখাও যে $\theta = \frac{\pi}{4}$ হইলে ঐ নর্মাল মূল বিন্দুগামী।

32. দেখাও যে $ax + by = 1$ সরলরেখাটি $a^{n-1}y = x^n$ বক্ররেখার নর্মাল হইবে যদি $(na)^n = a^{n-1}b(b^2 + na^2)^{n-1}$ শর্তটি পালন করে।

33. দেখাও যে $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার (0, a) বিন্দুতে নর্মাল x অক্ষের সমান্তরাল।

34. দেখাও যে $y = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$ বক্ররেখার নর্মালের দৈর্ঘ্য $\frac{y^2}{a}$ এবং উপনর্মালের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2}a\sinh\frac{2x}{a}$.

35. দেখাও যে $x^{m+n} = a^{m-n}y^{2n}$ বক্ররেখার যেকোন বিন্দুতে
$\frac{\text{উপস্পর্শক}}{\text{উপনর্মাল}} = \frac{4n^2x^2}{(m+n)^2y^2}$.

36. দেখাও যে $xy^n = a^{n+1}$ বক্ররেখার উপঅভিলম্ব ধ্রুবক হইবে যদি $n = -2$ হয়।

37. দেখাও যে কোন বক্ররেখার যেকোন বিন্দুতে $(\sqrt{\text{উপনর্মাল}} \times \text{স্পর্শকের দৈর্ঘ্য})^2 = (\sqrt{\text{উপস্পর্শক}} \times \text{নর্মালের দৈর্ঘ্য})^2$.

38. দেখাও যে কোন প্যারাবোলার যেকোন বিন্দুতে সাবনর্মাল ধ্রুবক এবং সাবট্যানজেন্ট x এর সমানুপাতিক।

39. দেখাও যে $x^2 + 2xy - y^2 + 2ax = 0$ এবং $3y^3 - 2a^2x - 4a^2y + a^3 = 0$ বক্ররেখাদ্বয় ছেদ বিন্দু (a, −a) এ $\tan^{-1}\left(\frac{9}{8}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে।

40. যদি $y = mx$ সরলরেখা $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ বক্ররেখাকে লম্বভাবে ছেদ করে তবে দেখাও যে $hm^2 + (a - b)m - h = 0$.

41. $y = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ বক্ররেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুতে কোণ নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ [$\tan^{-1} 2\sqrt{2}$]

42. দেখাও যে $y^n = ax^{n-1} + x^n$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের x অক্ষে খন্ডিত অংশ $\frac{ax}{(m-1)a + mx}$ এবং y অক্ষে $\frac{ay}{m(a+x)}$.

43. দেখাও যে $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ বক্ররেখার $\theta = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $2x + 2y - a\pi - 4a = 0$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ $2x - 2y - a\pi = 0$.

44. দেখাও যে $x = ae^{\theta}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)$, $y = ae^{\theta}\left(\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\right)$ বক্ররেখার উপরস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের উপর মূলবিন্দু থেকে লম্বের দূরত্ব, নর্মালের উপর লম্বের দূরত্বের $\frac{1}{2}$ গুণ।

45. দেখাও যে $x = ae^{\theta}(\sin\theta - \cos\theta)$, $y = ae^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্ব মূল বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী।

46. দেখাও যে $x^3 - y^2 = 0$ বক্ররেখার $(4m^2, 8m^3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y = 3mx - 4m^3$ এবং ইহা বক্ররেখাকে আবার $(m^2, -m^3)$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং ঐ বিন্দুতে নর্মালের সমীকরণ $2x - 3my = 3m^4 + 2m^2$

47. দেখাও যে $x^2y^2 = a^2(x^2 - a^2)$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে উপঅভিলম্ব x^{-3} এর সমানুপাতিক। **[RUH–1966]**

48. দেখাও যে $e^{y/a} = x^2 - a^2$ বক্ররেখার স্পর্শক এবং উপস্পর্শকের যোগফল xy এর সমানুপাতিক।

49. দেখাও যে $x = a(\theta + \sin\theta\cos\theta)$, $y = a(1 + \sin\theta)^2$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে $\frac{1}{4}(\pi + 2\theta)$ কোণ উৎপন্ন করে।

50. $x^3 + y^3 = 2a^3$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে x অক্ষে খন্ডিত অংশ α এবং y অক্ষে খন্ডিত অংশ β হইলে দেখাও যে $\alpha^{-3/2} + \beta^{-2/3} = 2^{-1/2}a^{-3/2}$.

51. দেখাও যে $y^2 = 4ax$ প্যারাবোলার উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক এবং উপঅভিলম্ব y এর সমানুপাতিক।

52. দেখাও যে $y = a\cos h\frac{x}{a}$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে উপস্পর্শক $= \frac{ay}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ উপঅভিলম্ব $= \frac{y}{a}\sqrt{y^2 - a^2}$, স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ এবং অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{y^2}{a}$.

53. দেখাও যে $x = a + b\log(b + \sqrt{b^2 - y^2}) - \sqrt{b^2 - y^2}$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে উপস্পর্শক এবং উপঅভিলম্বের যোগফল ধ্রুবক।

54. দেখাও যে $4ax = (y^2 - a^2) + 2a\log\frac{a}{y}$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শের দৈর্ঘ্য এবং উপস্পর্শকের বিয়োগফল ধ্রুবক। **[DUH-1960]**

55. দেখাও যে $xy + 2x - y - 5 = 0$ রেখার (2, 1) বিন্দুতে উপস্পর্শক $= \frac{1}{3}$ উপঅভিলম্ব = 3, স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \frac{\sqrt{10}}{3}$ এবং অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{10}$. **[RUH–1963]**

56. দেখাও যে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ইলিপসের যে কোন বিন্দুতে অভিলম্বের দৈর্ঘ্য ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর মূলবিন্দু হইতে লম্বের দূরত্বের বিপরীত মানের সমানুপাতিক।

57. যদি মূলবিন্দু হইতে $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের উপর লম্বের দূরত্ব যথাক্রমে p_1 এবং p_2 হয় তবে দেখাও যে $4p_1^2 + p_2^2 = a^2$.

58. দেখাও যে $y = x^{2/3}$ বক্ররেখার উপরস্থ মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বিদ্যমান। কিন্তু ঢাল বিদ্যমান নয়।

59. দেখাও যে $y = e^{-x/2}$ বক্ররেখার উপরস্থ যে কোন বিন্দুতে কার্তেসীয় উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2. **[RUH–1983]**

60. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $x^2 + y^2 + x + y = 0$ উত্তর ঃ $[x + y = 0]$

(ii) $x^3 + y^3 + 3axy = 0$ উত্তর ঃ $[x = 0, y = 0]$

(iii) $x^3 - y^3 + x^2 - y^2 = 0$ উত্তর ঃ $[x + y = 0, x - y = 0]$

(iv) $x^4 + 4x^3y + 4xy^2 + 4x^2 - y^2 = 0$ উত্তর ঃ $[2x + y = 0, 2x - y = 0]$

(v) $x^5 - 4x^4y + 5x^2y^2 + x(x^2 - y^2) = 0$
উত্তর ঃ $[x = 0, x - y = 0, x + y = 0]$

(vi) $x^8 - y^8 + 6x^5y^2 - 5x^4y^2 + x^4 - y^4 = 0$
উত্তর $[x - y = 0, x + y = 0]$

(vii) $x^5(x^4 - y^4) + x^3(y^4 - x^4) + xy(x^2 - y^2) = 0$
উত্তর ঃ $[x = 0, y = 0, x - y = 0, x + y = 0]$

(viii) $2x^{10} + 3x^9 - 4x^8 + x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 0$
উত্তর ঃ $[x - y = 0]$

61. দেখাও যে $ae^{y/a} = \frac{1}{a}\sec x$ বক্ররেখার জন্য $\frac{ds}{dx} = \sec\left(\frac{x}{a}\right)$ এবং $\frac{ds}{dy} = \operatorname{cosec}\left(\frac{x}{a}\right)$

62. দেখাও যে $y = a\,ln\left(\frac{\sec x}{a}\right)$ বক্ররেখার জন্য $\frac{d^2x^2}{ds^2} = -\frac{1}{2a}\sin\frac{2x}{a}$.

63. দেখাও যে $x = a\cos t, y = b \sin t$ বক্ররেখার জন্য $\frac{ds}{dt} = a\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}$.

64. দেখাও যে $y^2 = x$ বক্ররেখার জন্য $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+4x}{y}}$.

65. দেখাও যে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x = a\sin\phi$ বক্ররেখার জন্য $\frac{ds}{d\phi} = a\sqrt{1 - e^2\sin^2\phi}$

66. দেখাও যে $y = x^2 \sin\frac{1}{x}$ যখন $x \neq 0 = 0$ যখন $x = 0$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y = 0$.

67. দেখাও যে $x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 + y^2}}$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক।

68. দেখাও যে কোন বক্ররেখার উপরস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে উপস্পর্শক এবং উপঅভিলম্ব দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ঐ বিন্দুর কোটির উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

69. দেখাও যে $x = \frac{2at^2}{1+t^2}, y = \frac{2at^3}{1+t^2}$ বক্ররেখার $t = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $13x - 16y = 2a$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ $16x + 13y = 9a$.

70. $ay^2 = x^3$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে অভিলম্ব x অক্ষ এবং y অক্ষে সমান খন্ডিত অংশে ছেদ করিলে দেখাও যে $x = \frac{4}{9}a$.

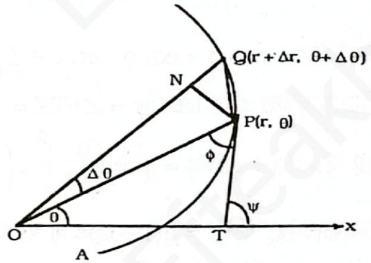
71. যদি $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার উপরস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে $OA + OB = a$.

72. যদি $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ বক্ররেখার উপরস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে $\frac{OA}{a} + \frac{OB}{b} = 1$.

Chapter–9(B)
স্পর্শক এবং অভিলম্ব (পোলার আকারে)
TANGENTS AND NORMALS (IN POLAR)
প্রথম পরিচ্ছেদ

9.B.1. কোন বক্ররেখার উপরস্থ কোন বিন্দুতে স্পর্শক ও ব্যাসার্ধ ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ (Angle between a Tangent and a Radius Vector on a Curve) ঃ যদি $r = f(\theta)$ বক্ররেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শক এবং ব্যাসার্ধ ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ ϕ হয় তবে দেখাও যে $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$, $\sin\phi = r\frac{d\theta}{ds}$, $\cos\phi = \frac{dr}{ds}$

প্রমাণ ঃ ধরি বক্ররেখা $r = f(\theta)$ এর উপর $P(r, \theta)$ একটি বিন্দু এবং P এর কাছাকাছি ঐ বক্ররেখার উপর আরেকটি বিন্দু $Q(r + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$.



ধরি P ও Q বিন্দুগামী ছেদক PQ এবং OQ এর উপর PN লম্ব। চিত্রে $\angle PON = \Delta\theta$, $PN = r\sin\Delta\theta$ এবং $ON = r\cos\Delta\theta$. ধরি ব্যাসার্ধ ভেক্টর OP (=r) এবং স্পর্শক PT এর অন্তর্গত কোণ P বিন্দুতে ϕ অর্থাৎ $\angle OPT = \phi$.

(প্রথম অংশ) ঃ এখন সমকোণি ত্রিভুজ ΔPQN হইতে পাই

$$\tan PQN = \frac{PN}{QN} = \frac{PN}{OQ - ON} = \frac{r\sin\Delta\theta}{r + \Delta r - r\cos\Delta\theta} \quad \cdots\cdots (1)$$

এখন $Q \to P$ হইলে ছেদক $PQ \to$ স্পর্শক PT অর্থাৎ $\Delta r \to 0$, $\Delta\theta \to 0$ এবং $\angle PQN \to \angle OPT = \phi$. তাহা হইলে

$$\tan\phi = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{r\sin\Delta\theta}{r + \Delta r - r\cos\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{r\left\{\Delta\theta - \frac{1}{3!}(\Delta\theta)^3 + \cdots\right\}}{r + \Delta r - r\left\{1 - \frac{1}{2!}(\Delta\theta)^2 + \cdots\right\}}$$

$$= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{r\,\Delta\theta}{r + \Delta r - r} \qquad [\Delta\theta \text{ এর একের অধিক ঘাত সম্বলিত পদসমূহ বর্জন করে}]$$

$$= r\lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)} = r\frac{1}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)} \Rightarrow \tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$$

(দ্বিতীয় অংশ) ঃ ধরি বক্ররেখা $r = f(\theta)$ এর উপরস্থ A বিন্দু হইতে P বিন্দু পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ s এবং P হইতে Q পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য Δs অর্থাৎ চাপ $AP = s$ এবং চাপ $PQ = \Delta s$ তাহা হইলে s অবশ্যই r এবং θ এর ফাংশন।

সুতরাং $\sin PQN = \frac{PN}{PQ} = \frac{r \sin \Delta\theta}{\Delta s} = r\frac{\Delta\theta - \frac{1}{3!}(\Delta\theta)^3 + \cdots}{\Delta s}$ ..... (2)

আবার প্রথম অংশের মত লিমিট প্রয়োগ করিলে পাই

$$\sin \phi = r \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \Rightarrow \sin \phi = r\frac{d\theta}{ds}$$

(তৃতীয় অংশ) ঃ আবার আমরা পাই

$$\cos PQN = \frac{NQ}{PQ} = \frac{r + \Delta r - r\cos\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{r + \Delta r - r\left\{1 - \frac{1}{2!}(\Delta\theta)^2 + \cdots \Delta s\right\}}{\Delta s}$$

এবং উপরের মত লিমিট প্রয়োগ করিয়া পাই $\cos \phi = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \Rightarrow \cos \phi = \frac{dr}{ds}$

অন্যভাবে ঃ $\cos \phi = \cot \phi . \sin \phi = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} . r\frac{d\theta}{ds} = \frac{dr}{ds}$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ (i) চিত্রে $\psi = \angle PTX = \angle POT + \angle OPT \Rightarrow \psi = \theta + \phi$

(ii) $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \Rightarrow \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1$

উদাহরণ–1. যদি $r = a(1 - \cos\theta)$ হয় তবে দেখাও যে $\phi = \frac{1}{2}\theta$.

সমাধান ঃ $r = a(1 - \cos\theta) = 2a\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow ln\, r = ln\, 2a + 2\, ln \sin\frac{\theta}{2}$ [*ln* নিয়ে]

$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = 2.\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ $\left[\frac{d}{d\theta}\text{ প্রয়োগ করিয়া}\right]$

$\Rightarrow r\frac{d\theta}{dr} = \tan\frac{\theta}{2} \Rightarrow \tan\phi = \tan\frac{\theta}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\theta}{2}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–2. যদি $r^n = a^n \cos n\theta$ হয় তবে দেখাও যে $\phi = \frac{\pi}{2} + n\theta$. **[CUH–83]**

সমাধান ঃ $r^n = a^n \cos n\theta$

$\Rightarrow n\, ln\, r = n\, ln\, a + ln \cos n\theta$ [*ln* নিয়া]

$\Rightarrow \frac{n}{r}\frac{dr}{d\theta} = 0 - n\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}$ $\left[\frac{d}{d\theta}\text{ প্রয়োগ করিয়া}\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = -\tan n\theta \Rightarrow r\frac{d\theta}{dr} = -\cot n\theta$

$\Rightarrow \tan\phi = \tan\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right) \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + n\theta$. [প্রমাণিত]

EXERCISE–9(B)
প্রথম পরিচ্ছেদ

○ নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি বক্ররেখার যেকোন বিন্দুতে স্পর্শক ও ব্যাসার্ধ ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ ϕ নির্ণয় কর।

(i) $r = a(1 + \cos\theta)$ উত্তর ঃ $\left[\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right]$

(ii) $r = a\cos\theta$ উত্তর ঃ $\left[\phi = \frac{\pi}{2} + \theta\right]$

(iii) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ উত্তর ঃ $\left[\phi = \frac{\pi}{2} + 2\theta\right]$

(iv) $r\cos\theta = a$ উত্তর ঃ $\left[\phi = \frac{\pi}{2} - \theta\right]$

(v) $r^2\cos 2\theta = a^2$ উত্তর ঃ $\left[\phi = \frac{\pi}{2} - 2\theta\right]$

(vi) $r = \frac{2a}{1 + \cos\theta}$ উত্তর ঃ $\left[\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\theta\right]$

(vii) $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ উত্তর ঃ $[\phi = \alpha]$

(viii) $r = a\sin^2\frac{\theta}{2}$ উত্তর ঃ $\left[\phi = \frac{1}{2}\theta\right]$

(ix) $\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$ উত্তর ঃ $\left[\phi = \pi - \frac{1}{2}\theta\right]$

(x) $r^2 = a^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta)$ উত্তর ঃ $\left[\phi = \frac{\pi}{4} + 2\theta\right]$

(xi) $r^2 = a^n(\cos n\theta + \sin n\theta)$ উত্তর ঃ $\left[\phi = \frac{\pi}{4} + n\theta\right]$

(xii) $r^2 = a^2\sin 2\theta$ উত্তর ঃ $[\phi = 2\theta]$

(xiii) $r^n = a^n \sin n\theta$ উত্তর ঃ $[\phi = n\theta]$

(xiv) $r^2\sin 2\theta = a^2$ উত্তর ঃ $[\phi = \pi - 2\theta]$

(xv) $r^n \sin n\theta = a^n$ উত্তর ঃ $[\phi = \pi - n\theta]$

(xvi) $r^n = a^n \sec(n\theta + \alpha)$ উত্তর ঃ $\left[\phi = \frac{\pi}{2} - (n\theta + \alpha)\right]$

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

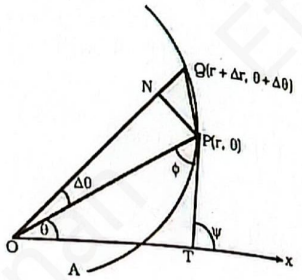
চাপের দৈর্ঘ্য, ট্যানজেন্ট, নর্মাল (পোলার আকারে)

9.B.2. চাপের দৈর্ঘ্যের ডেরিভেটিভ (পোলার আকারে) [Derivative of an Arc tangth (In polar Form)] ঃ

উপপাদ্য–1. দেখাও যে

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

এবং $\frac{ds}{dr}=\sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$



উপরের চিত্র হইতে পাই $PQ^2 = PN^2 + QN^2$

$$= (r\sin\Delta\theta)^2 + (r + \Delta r - r\cos\Delta\theta)^2$$

$$= (r\sin\Delta\theta)^2 + \left(\Delta r + 2r\sin^2\frac{1}{2}\Delta\theta\right)^2$$

এখন উভয় পক্ষকে $(\Delta\theta)^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$$\left(\frac{PQ}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right)^2=\left(r\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right)^2+\left[\frac{\Delta r}{\Delta\theta}+\frac{1}{2}r.\Delta\theta\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\theta}{\frac{1}{2}\Delta\theta}\right)^2\right]^2$$

এখন $Q \to P$ এবং $\Delta\theta \to 0$ লিমিটিং শর্তে আমরা পাই

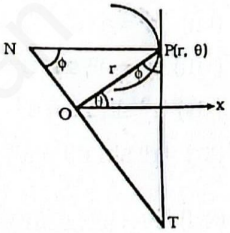
$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2=r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \quad \text{..... (1)} \Rightarrow \frac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \quad \text{..... (2)}$$ [প্রমাণিত]

এখন (2) এর উভয় পক্ষকে $\frac{d\theta}{dr}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই $\frac{ds}{dr}=\sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$ ..... (3)

[প্রমাণিত]

9.B.3. পোলার সাবট্যানজেন্ট এবং সাবনর্মাল (Polar subtangent and polar subnormal) ঃ

ধরি $r = f(\theta)$ বক্ররেখার উপর P বিন্দুতে PT স্পর্শক এবং PN নর্মাল পোল O বিন্দুগামী OP ব্যাসার্ধ ভেক্টরের উপর লম্ব সরলরেখাকে যথাক্রমে T এবং N বিন্দুতে ছেদ করে।



এখানে OT কে পোলার সাবট্যানজেন্ট বা পোলার উপস্পর্শক এবং ON কে পোলার সাবনর্মাল বা পোলার উপঅভিলম্ব বলে।

এখন যেহেতু $\angle OPT = \phi$. সুতরাং পোলার সাবট্যানজেন্ট $OT = OP\tan\phi$

$$= r.\,r\frac{d\theta}{dr} = r^2\frac{d\theta}{dr}$$: আবার যেহেতু $\angle ONP = \phi$

সুতরাং পোলার সাবনর্মাল $ON = OP\cot\phi = r\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ যদি $u=\frac{1}{r}$ হয় তবে $\frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$

তাহা হইলে পোলার সাবট্যানজেন্ট $= r^2\frac{d\theta}{dr}=-\frac{d\theta}{du}$

9.B.4. পোলার ফর্মে স্পর্শকের এবং নর্মালের দৈর্ঘ্য (Length of a Tangent and a Normal in polar Form) ঃ আগের অনুচ্ছেদের চিত্রের ΔOPT হইতে পাই

$$PT^2 = PO^2 + OT^2 = r^2 + \left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right)^2 = r^2\left(1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2\right)$$

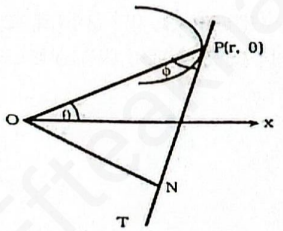
$\therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $PT = r\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$

আবার ঐ একই চিত্রের ΔOPN হইতে পাই $PN^2 = PO^2 + ON^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$

$\therefore$ অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $PN = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

9.B.5. পোল হইতে স্পর্শকের উপর লম্ব (Perpendicular from a pole on a Tangent) ঃ

ধরি বক্ররেখার উপরস্থ P বিন্দুতে PT স্পর্শকের উপর পোল O হইতে লম্বের দৈর্ঘ্য p হইল ON. তাহা হইলে ΔOPN ত্রিভুজ হইতে পাই $ON = OP\sin\phi$



$$\Rightarrow p = r\sin\phi \Rightarrow \frac{1}{p}=\frac{1}{r}\operatorname{cosec}\phi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2}=\frac{1}{r^2}\operatorname{cosec}^2\phi \quad \text{[বর্গ করিয়া]}$$

$$=\frac{1}{r^2}(1+\cot^2\phi)=\frac{1}{r^2}\left\{1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}\Rightarrow\frac{1}{p^2}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \quad \text{..... (1)}$$

এখন $u=\frac{1}{r}$ হইলে $\frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$, তাহা হইলে (1) $\Rightarrow \frac{1}{p^2}=u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$.

উদাহরণ–1. $r = a(1 + \cos\theta)$ বক্ররেখার জন্য দেখাও যে

$$\frac{ds}{d\theta} = 2a\cos\frac{\theta}{2} \text{ এবং } \frac{ds}{dr} = \operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}$$

সমাধান ঃ $r = a(1 + \cos\theta)$, $\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$ এবং $\frac{d\theta}{dr} = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}\theta$

সুতরাং $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}$

$= a\sqrt{1 + 2\cos\theta + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = a\sqrt{2(1+\cos\theta)}$

$= a\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$. [প্রমাণিত]

আবার $\frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2} = \sqrt{1 + \left[a(1+\cos\theta).\frac{-1}{a}\operatorname{cosec}\theta\right]^2}$

$= \sqrt{1 + 4\cos^4\frac{\theta}{2}.\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}.\sec^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{1+\cot^2\frac{\theta}{2}}$

$= \operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–2. দেখাও যে বক্ররেখা $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ এর পোলার সাবট্যানজেন্ট $= r\tan\alpha$ এবং পোলার সাবনর্মাল $= r\cot\alpha$.

সমাধান ঃ $r = ae^{\theta\cot\alpha} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = a\cot\alpha\, e^{\theta\cot\alpha} = r\cot\alpha$

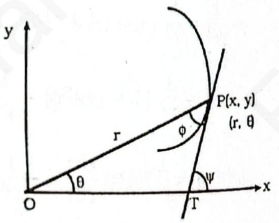
সুতরাং পোলার সাবনর্মাল $= r\cot\alpha$. [প্রমাণিত]

আবার পোলার সাবট্যানজেন্ট $= r^2\frac{d\theta}{dr} = r^2\frac{1}{r\cot\alpha} = r\tan\alpha$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–3. যদি কোন বক্ররেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শক এবং ঐ বিন্দুতে মূলবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ ভেক্টরের মধ্যে কোণ ϕ হয় তবে দেখাও যে

$$\tan\phi = \frac{\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)}{\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)}.$$

সমাধান ঃ ধরি P একটি বক্ররেখার উপরস্থ বিন্দু যার পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) রেডিয়ান ভেক্টর $= OP = r$ এবং $\angle POT = \theta$ যেখানে PT স্পর্শক x অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং ধরি PT স্পর্শক x অক্ষের সাথে ψ কোণ উৎপন্ন করে।



এখন শর্তানুসারে $\angle OPT = \phi$ এবং $\psi = \theta + \phi$

তাহা হইলে $\phi = \psi - \theta \Rightarrow \tan\phi = \tan(\psi - \theta)$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{\tan\psi - \tan\theta}{1 + \tan\psi\tan\theta} \quad \ldots\ldots (1)$$

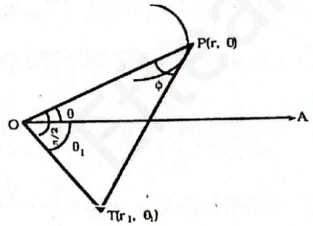
এখানে $\tan\psi = \frac{dy}{dx}$ এবং $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

সুতরাং (1) $\Rightarrow \tan\phi = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{dy}{dx}.\frac{y}{x}} = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x + y\frac{dy}{dx}}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–4. দেখাও যে $\frac{1}{r} + f(\theta) = 0$ বক্ররেখার যেকোন বিন্দুতে সাবট্যান্‌জেন্টের প্রান্ত বিন্দুর সঞ্চার পথ $\frac{1}{r} = f'\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

সমাধান ঃ ধরি $\frac{1}{r} + f(\theta) = 0$ ..... (1)

বক্ররেখার উপর একটি বিন্দু $P(r, \theta)$. আবার ধরি ব্যাসার্ধ ভেক্টর OP এর উপর O বিন্দুতে লম্ব P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক PT কে $T(r_1, \theta_1)$ বিন্দুতে ছেদ করে $OT = r_1$ এবং $\angle POT = \theta_1$.



এখানে পোলার সাবট্যানজেন্ট $= OT = r_1 = r^2\frac{d\theta}{dr}$ ..... (2)

এখন (1) কে θ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = f'(\theta) \Rightarrow r^2\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{f'(\theta)} \quad \ldots (3)$$

এখন (2) এবং (3) হইতে পাই $r_1 = \frac{1}{f'(\theta)} \Rightarrow \frac{1}{r_1} = f'(\theta)$ ..... (4)

আবার $\angle AOT = \theta_1 \Rightarrow \angle POT - \angle POA = \theta_1$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \theta_1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \theta_1$$

এখন (4) $\Rightarrow \frac{1}{r_1} = f'\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)$

সুতরাং (r_1, θ_1) এর সঞ্চার পথ অর্থাৎ সাবট্যানজেন্টের প্রান্ত বিন্দুর সঞ্চার পথ

$$\frac{1}{r} = f'\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

EXERCISE–9(B)
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

1. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ বক্ররেখার জন্য দেখাও যে
$$\frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{\sec 2\theta}$$

2. $r^4 \sec 4\theta = a^4$ বক্ররেখার জন্য দেখাও যে
$$a^8 \frac{d^2r}{ds^2} + 4r^7 = 0$$

3. যে কোন বক্ররেখার জন্য দেখাও যে
$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - p^2}} \text{ এবং } \frac{ds}{d\theta} = \frac{r^2}{p}$$

4. $r = \sin^2\frac{\theta}{2}$ বক্ররেখার জন্য দেখাও যে পোলার সাবট্যানজেন্ট $= \sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$

5. দেখাও যে $\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$ বক্ররেখার জন্য সাবট্যানজেন্ট $= 2a\,\text{cosec}\,\theta$.

6. দেখাও যে $\theta = \cos^{-1}\frac{r}{c} - \frac{\sqrt{c^2 - r^2}}{r}$ বক্ররেখার জন্য পোলার ট্যানজেন্টের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক।

7. দেখাও যে $r = a(1 + \cos\theta)$ বক্ররেখার পোলার ট্যানজেন্টের দৈর্ঘ্য $= 2a\cos^2\frac{1}{2}\theta\,\text{cosec}\,\frac{1}{2}\theta$ এবং পোলার নর্মালের দৈর্ঘ্য $= 2a\cos\frac{1}{2}\theta$.

8. দেখাও যে $r = ae^{c\theta}$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক ব্যাসার্ধ ভেক্টরের সাথে ধ্রুবক কোণ উৎপন্ন করে।

9. দেখাও যে $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ বক্ররেখার পোলার সাবনর্মাল ঐ একই আকারের আরেকটি সমতূল্য বক্ররেখা।

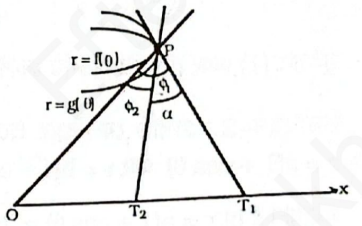
10. দেখাও যে $r(\theta - 1) = a\theta^2$ বক্ররেখার জন্য
$$\frac{a^2}{p^2} = \frac{2}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} + \frac{2}{\theta^4} - \frac{4}{\theta^5} + \frac{4}{\theta^6}.$$

তৃতীয় পরিচ্ছেদ
দুইটি বক্ররেখার অন্তর্গত কোণ (পোলার আকারে)

9.B.6. দুইটি বক্ররেখার অন্তর্গত কোণ (পোলার আকারে) [Angle between two curves (In Polar form)] ঃ

উপপাদ্য ঃ যদি $r = f(\theta)$ এবং $r = g(\theta)$ বক্ররেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α হয় তবে দেখাও যে $\tan\alpha = \dfrac{f(\theta)\,g'(\theta) \frown g(\theta)\,f'(\theta)}{f'(\theta)\,g'(\theta) + f(\theta)\,g(\theta)}$

প্রমাণ ঃ ধরি $r = f(\theta)$ ও $r = g(\theta)$ বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে এবং ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাদ্বয় স্পর্শকদ্বয় হইল PT_1 এবং PT_2. ধরি $\angle OPT_1 = \phi_1$ এবং $\angle OPT_2 = \phi_2$. তাহা হইলে $\alpha = \phi_1 - \phi_2$ সুতরাং $\tan\alpha = \tan(\phi_1 \frown \phi_2)$.



$$= \frac{\tan\phi_1 \frown \tan\phi_2}{1 + \tan\phi_1\tan\phi_2} \quad \ldots\ldots (1)$$

আবার যেহেতু $\tan\phi_1 = r\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)}$ এবং $\tan\phi_2 = r\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{g(\theta)}{g'(\theta)}$ সেহেতু

$$(1) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)} \frown \dfrac{g(\theta)}{g'(\theta)}}{1 + \dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)}\dfrac{g(\theta)}{g'(\theta)}} = \frac{f(\theta)\,g'(\theta) \frown g(\theta)\,f'(\theta)}{f'(\theta)\,g'(\theta) + f(\theta)\,g(\theta)}.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ যদি বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে তবে

$$\phi_1 \frown \phi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ বা } \tan\phi_1\tan\phi_2 = -1.$$

উদাহরণ–1. $r^2\sin 2\theta = a^2$ ..... (1) এবং $r^2\cos 2\theta = b^2$ ..... (2) বক্ররেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (1) $\Rightarrow r^2 = a^2\,\text{cosec}\,2\theta$

$\Rightarrow 2\ln r = 2\ln a + \ln\text{cosec}\,2\theta$ [$\ln$ নিয়া]

$\Rightarrow \dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{d\theta} = -2\dfrac{1}{\text{cosec}\,2\theta}\cdot\text{cosec}\,2\theta\cot 2\theta$ $\left[\dfrac{d}{d\theta}\text{ প্রয়োগ করিয়া}\right]$

$\Rightarrow \dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{d\theta} = -\cot 2\theta$

$\therefore \cot\phi_1 = -\cot 2\theta = \cot(\pi - 2\theta) \Rightarrow \phi_1 = \pi - 2\theta$

আবার (2) $\Rightarrow r^2 = b^2 \sec 2\theta$

$\Rightarrow 2 \log r = 2 \log b + \log \sec 2\theta$ [log নিয়া]

$\Rightarrow \frac{2}{r}\frac{dr}{d\theta} = 2\frac{1}{\sec 2\theta}\sec 2\theta \tan 2\theta \left[\frac{d}{d\theta} \text{ প্রয়োগ করিয়া}\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \tan 2\theta$

$\therefore \cot \phi_2 = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \Rightarrow \phi_2 = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

সুতরাং (1) এবং (2) এর অন্তর্গত কোণ $\phi_1 - \phi_2 = \pi - 2\theta - \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \frac{\pi}{2}$.

উদাহরণ-2. দেখাও যে নিম্নের প্রত্যেক বক্ররেখা যুগল পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে $r = a(1 + \cos\theta)$ এবং $r = b(1 - \cos\theta)$.

সমাধান ঃ (i) $r = a(1 + \cos\theta) = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow ln\, r = ln\, 2a + 2\, ln \cos\frac{\theta}{2}$ [ln নিয়া]

$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = 2.-\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = -\tan\frac{\theta}{2}$ $\left[\frac{d}{d\theta} \text{ প্রয়োগ করিয়া}\right]$

$\therefore \cot\phi_1 = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = -\tan\frac{\theta}{2} = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \phi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ ..... (1)

আবার $r = b(1 - \cos\theta) = 2b\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \log r = \log 2b + 2\log\sin\frac{\theta}{2}$ [log নিয়া]

$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = 2.\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$

$\therefore \cot\phi_2 = \frac{1}{2}\frac{dr}{d\theta} = \cot\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \phi_2 = \frac{\theta}{2}$ ..... (2)

সুতরাং প্রদত্ত বক্ররেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ (1) ও (2) হইতে পাই

$\phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

EXERCISE-9(B)
তৃতীয় পরিচ্ছেদ

1. দেখাও যে নিম্নলিখিত প্রত্যেক বক্ররেখা যুগল পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

(i) $r^2 \sec 2\theta = a^2$ $\quad r^2 \operatorname{cosec} 2\theta = b^2$

(ii) $r^2 = a^2 \operatorname{cosec} 2\theta$ $\quad r^2 = b^2 \sec 2\theta$

(iii) $r^3 \operatorname{cosec} 3\theta = a^3$ $\quad r^3 \sec 3\theta = b^3$

(iv) $r^3 = a^3 \operatorname{cosec} 3\theta$ $\quad r^3 = b^3 \sec 3\theta$

(v) $r^4 = a^4 \cos 4\theta$ $\quad r^4 = b^4 \sin 4\theta$

(vi) $r^4 \sin 4\theta = a^4$ $\quad r^4 \cos 4\theta = b^3$

(vii) $r^n \sec n\theta = a^n$ $\quad r^n \operatorname{cosec} n\theta = b^n$

(viii) $r^n = a^n \operatorname{cosec} n\theta$ $\quad r^n = b^n \sec n\theta$

(ix) $r = \frac{2a}{1 - \cos\theta}$ $\quad r = \frac{2a}{1 + \cos\theta}$

2. দেখাও যে বক্ররেখাদ্বয়

(i) $r = a\cos 2\theta$ এবং $r = a\sin 2\theta$ এর অন্তর্গত কোণ $\tan^{-1}\frac{4}{3}$

(ii) $r = a\theta$ এবং $r\theta = a$ এর অন্তর্গত কোণ $\frac{\pi}{2}$

(iii) $r = ae^{\theta}$ এবং $re^{\theta} = b$ এর অন্তর্গত কোণ $\frac{\pi}{2}$

(iv) $r = 6\cos\theta$ এবং $r = 2(1 + \cos\theta)$ এর অন্তর্গত কোণ $\frac{\pi}{6}$

(v) $r = \frac{a\theta}{1 + \theta}$ এবং $r = \frac{a}{1 + \theta^2}$ এর অন্তর্গত কোণ $\tan^{-1}3$

(vi) $r = a\log\theta$ এবং $r = \frac{a}{\log\theta}$ এর অন্তর্গত কোণ $\tan^{-1}\frac{2e}{e^2 - 1}$

(vii) $r = a\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}$ এবং $r = b\sec^2\frac{\theta}{2}$ এর অন্তর্গত কোণ $\frac{\pi}{2}$

(viii) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ এবং $r = a(1 + \cos\theta)$ এর অন্তর্গত কোণ $3\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}$.

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

পেডাল সমীকরণ (কার্তেশীয় এবং পোলার আকারে)

9.B.7. কার্তেসীয় আকারের সমীকরণ হইতে পেডাল সমীকরণ (Pedal Equation of a Curve in Cartesian Form) ঃ ধরি $f(x, y) = 0$ ..... (1) একটি কোন বক্ররেখার কার্তেসীয় সম্পর্ক। এখন আমরা মূল বিন্দুর সাপেক্ষে (1) এর পেডাল সমীকরণ নির্ণয়ের পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করিবো।

তাহা হইলে ঐ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$X f_x + Y f_y - (x f_x + y f_y) = 0 \text{ ..... (2)}$$

অথবা $(X - x)\frac{dy}{dx} - (Y - y) = 0$ ..... (3) হবে।

এখন মূল বিন্দু হইতে (2) এর উপর লম্বের দূরত্ব p হইলে আমরা পাই

$$p = \left|\frac{-(x f_x + y f_y)}{(f_x)^2 + (f_y)^2}\right| \text{ বা } p^2 = \frac{(x f_x + y f_y)^2}{(f_x)^2 + (f_y)^2} \text{ ..... (4)}$$

আবার আমরা জানি $r^2 = x^2 + y^2$ ..... (5)

এখন (1), (4) এবং (5) হইতে x এবং y অপসারণ করিলে নির্ণেয় পেডাল সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ (i) (3) হইতে p নির্ণয় করিলেও একই ফলাফল পাওয়া যাইবে।

(ii) মূল বিন্দু ছাড়া অন্য বিন্দুর সাপেক্ষে পেডাল সমীকরণ নির্ণয় করা যায় তাহা আমরা উদাহরণে আলোচনা করিবো। তবে অন্য কিছুর উল্লেখ না থাকিলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে আমরা কোন বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ বলিতে মূল বিন্দুর সাপেক্ষেই বুঝিবো।

উদাহরণ–1. প্যারাবোলা $y^2 = 4a(x + a)$ এর পেডাল সমীকরণ নির্ণয় কর।

[RUH–1986, CUH–1981, 1990]

সমাধান ঃ $y^2 = 4a(x + a)$ ..... (1) $\Rightarrow 2yy_1 = 4a$ $\left[\frac{d}{dx} \text{ প্রয়োগ করিয়া}\right]$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{2a}{y}$$

(x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$Y - y = \frac{2a}{y}(X - x) \Rightarrow 2aX - yY + y^2 - 2ax = 0$$

$$\Rightarrow 2aX - yY + 2ax + 4a^2 = 0 \quad \text{[(1) দ্বারা]}$$

এখন (0, 0) বিন্দু হইতে স্পর্শকের উপর লম্ব দূরত্ব

$$p = \frac{2ax + 4a^2}{\sqrt{4a^2 + y^2}} = \frac{2ax + 4a^2}{\sqrt{4a^2 + 4a(x + a)}} \quad \text{[(1) দ্বারা]}$$

$$= \frac{2a(x + 2a)}{2\sqrt{a(x + 2a)}} = \sqrt{a(x + 2a)}$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{a} = x + 2a \text{ ..... (2)}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 4a(x + a) \quad \text{[(1) দ্বারা]}$$

$$= (x + 2a)^2 = \frac{p^4}{a^2} \quad \text{[(2) দ্বারা]}$$

$\Rightarrow p^4 = a^2r^2 \Rightarrow p^2 = ar$ ইহাই নির্ণেয় পেডাল সমীকরণ।

উদাহরণ–2. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ অ্যাসট্রোয়েডের পেডাল সমীকরণ নির্ণয় কর।

[RUH–1985, CUH–1982]

সমাধান ঃ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ..... (1)

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y_1 = 0 \quad \left[\frac{d}{dx} \text{ প্রয়োগ করিয়া}\right]$$

$$\Rightarrow y_1 = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}}$$

(x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$Y - y = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}}(X - x) \Rightarrow x^{-1/3}X + y^{-1/3}Y = x^{2/3} + y^{2/3}$$

$$\Rightarrow -x^{-1/3}X - y^{-1/3}Y + a^{2/3} = 0 \quad \text{[(1) দ্বারা]}$$

এখন মূল বিন্দু (0, 0) হইতে স্পর্শকের উপর লম্বের দূরত্ব

$$p = \frac{a^{2/3}}{\sqrt{x^{-2/3} + y^{-2/3}}} \Rightarrow p^2(x^{-2/3} + y^{-2/3}) = a^{4/3}$$

$$\Rightarrow p^2\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{(xy)^{2/3}} = a^{4/3} \Rightarrow p^2\frac{a^{2/3}}{(xy)^{2/3}} = a^{4/3} \Rightarrow p^2 = (axy)^{2/3} \text{ ..... (2)}$$

আবার আমরা জানি $r^2 = x^2 + y^2$

$$= (x^{2/3})^3 + (y^{2/3})^3 = (x^{2/3} + y^{2/3})^3 - 3x^{2/3}y^{2/3}(x^{2/3} + y^{2/3})$$

$$= (a^{2/3})^3 - 3x^{2/3}y^{2/3}a^{2/3} \quad \text{[(1) দ্বারা]}$$

$$= a^2 - 3(axy)^{2/3} = a^2 - 3p^2 \quad \text{[(2) দ্বারা]}$$

$\Rightarrow r^2 + 3p^2 = a^2$ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

9.B.8. পোলার আকারের সমীকরণ হইতে পেডাল সমীকরণ (Pedal Equation of a curve in Polar Form) ঃ ধরি $f(r, \theta) = 0$ ..... (1) একটি কোন বক্ররেখার পোলার সম্পর্ক। এখন আমরা পোলের সাপেক্ষে (1) এর পেডাল সমীকরণ নির্ণয়ের পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করিবো।

ধরি (1) এর (r, θ) বিন্দুতে স্পর্শকের উপর পোল হইতে লম্বের দূরত্ব হইল p.

আবার আমরা জানি $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$

বা $\cot\phi = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}$ ..... (2)

এবং $p = r\sin\phi$ ..... (3)

এখন (1), (2) এবং (3) হইতে θ এবং ϕ অপসারণ করিলে নির্ণেয় পেডাল সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ কোন কিছুর উল্লেখ না থাকিলে পোলার পদ্ধতিতে পেডাল সমীকরণ বলতে পোলের সাপেক্ষে বুঝায়।

উদাহরণ-3. দেখাও কার্ডিয়োড $r = a(1 + \cos\theta)$ এর পেডাল সমীকরণ $r^3 = 2ap^2$. **[DUH-1974, RUH-1985, CUH-1968]**

সমাধান ঃ $r = a(1 + \cos\theta) = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$ ..... (1)

$\Rightarrow ln\, r = ln\, 2a + 2\, ln\cos\frac{\theta}{2}$ [ln নিয়া]

$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = 2.\frac{-1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$ $\left[\frac{d}{d\theta}\text{ প্রয়োগ করিয়া}\right]$

$\Rightarrow \cot\phi = -\tan\frac{\theta}{2} = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)$

$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

কিন্তু আমরা জানি $p = r\sin\phi = r\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = r\cos\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow p^2 = r^2\cos^2\frac{\theta}{2} = r^2\frac{r}{2a}$ [(1) হইতে]

$\Rightarrow r^3 = 2ap^2$ ইহাই নির্ণেয় পেডাল সমীকরণ।

উদাহরণ-4. $r^n = a^n\cos n\theta$ ..... (1) বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (1) $\Rightarrow n\, ln\, r = n\, ln\, a + ln\cos n\theta$ [ln নিয়া]

$\Rightarrow \frac{n}{r}\frac{dr}{d\theta} = -n\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}$ $\left[\frac{d}{d\theta}\text{ প্রয়োগ করিয়া}\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = -\tan n\theta \Rightarrow \cot\phi = \cot\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right) \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + n\theta$

কিন্তু আমরা জানি $p = r\sin\phi = r\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right) = r\cos n\theta$

$= r.\frac{r^n}{a^n}$ [(1) হইতে]

$\Rightarrow r^{n+1} = a^n p$ ইহাই নির্ণেয় পেডাল সমীকরণ।

EXERCISE-9(B)
চতুর্থ পরিচ্ছেদ

1. দেখাও যে বৃত্ত $x^2 + y^2 = ax$ এর পেডাল সমীকরণ $r^2 = ap$
2. দেখাও যে হাইপারবোলা $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর পেডাল সমীকরণ $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{r^2}{a^2b^2}$
3. দেখাও যে $x = \cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ $r^2 = a^2 - 3p^2$
4. দেখাও যে $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ $\frac{a^2b^2}{p^2} = a^2 + b^2 - r^2$
5. দেখাও যে $x = a\cosh x$, $y = b\sinh x$ বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ $\frac{a^2b^2}{p^2} = a^2 - b^2 + r^2$
6. দেখাও যে $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$ বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{r^2}{a^2b^2}$
7. দেখাও যে $a^2(x^2 + y^2) = x^2y^2$ বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ $\frac{1}{p^2} + \frac{3}{r^2} = \frac{1}{a^2}$
8. দেখাও যে $a(3\cos\theta - \cos^3\theta)$, $y = a(3\sin\theta - \sin^3\theta)$ বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ $3p^2(7a^2 - r^2) = 10a^2 - r^2$

9. দেখাও যে বক্ররেখা

(i)	$r^2 = a^2 \sec 2\theta$	এর	পেডাল	সমীকরণ	$pr = a^2$
(ii)	$r^2 \sec 2\theta = a^2$	,,	,,	,,	$r^3 = pa^2$
(iii)	$r^2 \operatorname{cosec} 2\theta = a^2$	,,	,,	,,	$r^3 = pa^2$
(iv)	$r^2 = a^2 \operatorname{cosec} 2\theta$	,,	,,	,,	$rp = a^2$
(v)	$r^3 = a^3 \sec 3\theta$	,,	,,	,,	$rp = a^2$
(vi)	$r^3 = a^3 \operatorname{cosec} 3\theta$	এর	পেডাল	সমীকরণ	$r^2p = a^3$
(vii)	$r^3 \operatorname{cosec}^3\theta = a^3$	,,	,,	,,	$r^4 = a^3p$
(viii)	$r^5 = a^5 \cos 5\theta$	,,	,,	,,	$r^6 = a^5p$
(ix)	$r^4 \cos 4\theta = a^4$	,,	,,	,,	$r^3p = a^4$
(x)	$r^4 = a^4 \sin 4\theta$	,,	,,	,,	$r^5 = a^4p$
(xi)	$r^n \sec n\theta = a^n$	,,	,,	,,	$r^{n+1} = a^np$
(xii)	$r^n \operatorname{cosec} \theta = a^n$	,,	,,	,,	$r^{n+1} = a^np$
(xiii)	$r^n = a^n \sec n\theta$	,,	,,	,,	$r^{n-1}p = a^n$
(xiv)	$r^n = a^n \operatorname{cosec} n\theta$	,,	,,	,,	$r^{n-1}p = a^n$

10. দেখাও যে বক্ররেখা

(i)	$r = 2a\cos^2\frac{1}{2}\theta$	এর	পেডাল	সমীকরণ	$r^3 = 2ap^2$
(ii)	$r = a\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\theta$	,,	,,	,,	$p^2 = ar$
(iii)	$r(1+\cos 2\theta) = 2a$	,,	,,	,,	$p^2 = ar$
(iv)	$\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$	,,	,,	,,	$p^2 = ar$
(v)	$r = ae^{\theta\tan\alpha}$	,,	,,	,,	$p = r\cos\alpha$
(vi)	$\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$	,,	,,	,,	$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{l^2}\left(e^2 + \frac{2l}{r} - 1\right)$

11. দেখাও যে $a\theta = (r^2 - a^2)^{1/2} - a\cos^{-1}\frac{a}{r}$ বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ $p^2 = r^2 - a^2$

12. $r = ae^{m\theta}$, $r\theta = a$, $r\sin n\theta = a$, $r\sinh n\theta = a$ এবং $r\cosh n\theta = a$ বক্ররেখাগুলোর প্রত্যেকটির পেডাল সমীকরণ নিম্নলিখিত আকারের $\frac{1}{p^2} = \frac{A}{r^2} + B$ যেখানে A এবং B ধ্রুবক।

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

পেডাল সমীকরণ (Pedals Equation)

9.B.9. প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... , n তম ধনাত্মক পেডাল (First, second, third, ... , nth positive pedals) ঃ কোন বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের উপর নির্দিষ্ট কোন বিন্দু হইতে লম্ব আঁকা হইলে ঐ লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথকে ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে মূল বক্ররেখার প্রথম ধনাত্মক পেডাল বলা হয়। নির্দিষ্ট বিন্দু উল্লেখ না থাকিলে মূলবিন্দুই নির্দিষ্ট বিন্দু হইবে।

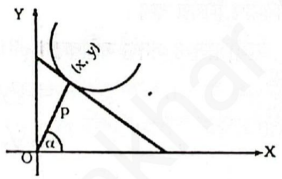
আবার প্রথম ধনাত্মক পেডালের যে কোন বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের উপর নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে লম্ব আঁকা হইলে লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথকে মূল বক্ররেখার দ্বিতীয় ধনাত্মক পেডাল বলা হয়।

অনুরূপভাবে তৃতীয়, 8র্থ, ..., n তম ধনাত্মক পেডাল হইবে। মনে করি f, f_1, f_2, ... , f_n এইরূপ একগুচ্ছ বক্ররেখা যে, f_1, f_2, ... , f_n যথাক্রমে f, f_1, f_2, ... , f_{n-1} এর প্রথম ধনাত্মক পেডাল তবে f_n হইবে f এর n তম ধনাত্মক পেডাল।

9.B.10. ঋনাত্মক পেডাল (Negative Pedals) ঃ কোন বক্ররেখার ধনাত্মক পেডালের সাপেক্ষে ঐ বক্ররেখাকে ঋনাত্মক পেডাল বলা হয় অর্থাৎ f বক্ররেখার n তম ধনাত্মক পেডাল f_n হইলে f_n এর n তম ঋনাতক পেডাল f.

9.B.11. কার্তেসীয় আকারের সমীকরণ হইতে প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ [First positive pedal equation of a curve in cartesian form) ঃ

ধরি $f(x, y) = 0$ ..... (1) কোন বক্ররেখার কার্তেসীয় সমীকরণ।



এখন আমরা মূলবিন্দুর সাপেক্ষে (1) এর ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ নির্ণয়ের পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করবো।

মনে করি $X\cos\alpha + Y\sin\alpha = P$ ..... (2) সরলরেখাটি (1) বক্ররেখাকে (x, y) বিন্দুতে স্পর্শ করে। আবার (x, y) বিন্দুতে (1) বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ $Xf_x + Yf_y - (xf_x + yf_y) = 0$ ..... (3), অথবা $(X - x)\frac{dy}{dx} - (Y - y) = 0$ ..... (4)

এখন (2) ও (3) অভিন্ন সমীকরণ হওয়ায় তুলনা করিয়া পাই

$$\frac{f_x}{\cos\alpha} = \frac{f_y}{\sin\alpha} = \frac{-(xf_x + yf_y)}{-P} \quad \text{..... (5)}$$

(1), (5) নং হইতে x, y অপসারণ করিলে P এবং α সম্মিলিত একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে। যেখানে (P, α) লম্বের পাদবিন্দুর পোলার স্থানাংক।

সুতরাং $P = r$ এবং $\alpha = \theta$ বসিয়ে লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ অর্থাৎ প্রদত্ত বক্ররেখার প্রথম ধনাত্মক পেডাল নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ–1. আয়তাকার হাইপারবোলা $x^2 - y^2 = a^2$ এর প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ ঃ $x^2 - y^2 = a^2$ ..... (1)

$$\Rightarrow 2x - 2yy_1 = 0 \quad \left[\frac{d}{dx} \text{ প্রয়োগ করিয়া}\right]$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{x}{y}$$

$\therefore$ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $Y - y = \frac{x}{y}(X - x) \Rightarrow xX - yY = x^2 - y^2$

$$\Rightarrow xX - yY = a^2 \text{ [(1) দ্বারা]} \ldots\ldots (2)$$

মনে করি (1) বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$X\cos\alpha + Y\sin\alpha = P \ldots\ldots (3)$$

(2) ও (3) অভিন্ন সমীকরণ

$$\therefore \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{-y}{\sin\alpha} = \frac{a^2}{P} \Rightarrow x = \frac{a^2}{P}\cos\alpha \text{ এবং } y = -\frac{a^2}{P}\sin\alpha$$

(1) নং এ x ও y এর মান বসিয়ে পাই $\left(\frac{a^2}{P}\cos\alpha\right)^2 - \left(-\frac{a^2}{P}\sin\alpha\right)^2 = a^2$

$$\Rightarrow a^4\cos^2\alpha - a^4\sin^2\alpha = a^2P^2 \Rightarrow P^2 = a^2\cos 2\alpha$$

$P = r$ এবং $\alpha = \theta$ বসিয়ে পাই $r^2 = a^2\cos 2\theta$

ইহাই প্রদত্ত হাইপারবোলার নির্ণেয় প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ।

উদাহরণ–2. $y^2 = 4ax$ প্যারাবোলার শীর্ষবিন্দুর সাপেক্ষে প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $y^2 = 4ax$ ..... (1)

$$\Rightarrow 2yy_1 = 4a \quad [d/dx \text{ প্রয়োগ করিয়া}]$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{2a}{y}$$

$\therefore$ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $Y - y = \frac{2a}{y}(X - x)$

$$\Rightarrow yY - y^2 = 2aX - 2ax \Rightarrow yY = 2aX + 2ax \text{ [(1) দ্বারা]}$$

$$\Rightarrow 2aX - yY = 2ax = 0 \ldots\ldots (2)$$

মনে করি (1) বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$X\cos\alpha + Y\sin\alpha = P \ldots\ldots (3)$$

(2) ও (3) অভিন্ন সমীকরণ $\therefore \frac{2ax}{-P} = \frac{-y}{\sin\alpha} = \frac{2a}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow x = -P\sec\alpha$ এবং $y = -2a\sec\alpha\sin\alpha = -2a\tan\alpha$

(1) $\Rightarrow 4a^2\tan^2\alpha = 4a(-P\sec\alpha)$

$\Rightarrow a\tan^2\alpha + P\sec\alpha = 0 \Rightarrow a\sin^2\alpha + P\cos\alpha = 0$

$P = r$ এবং $\alpha = 0$ বসিয়ে পাই $a\sin^2\theta + r\cos\theta = 0$ ইহা পোলারের আকারে প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ।

$$\Rightarrow r^3\cos\theta + ar^2\sin^2\theta = 0 \Rightarrow r^2(r\cos\theta) + a(r\sin\theta)^2 = 0$$

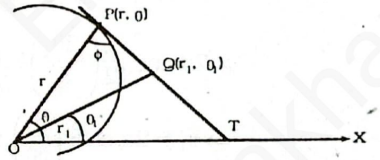
$$\Rightarrow (x^2 + y^2)x + ay^2 = 0 \quad [\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta]$$

$$\Rightarrow x(x^2 + y^2) + ay^2 = 0$$

ইহা কার্তেসীয় আকারে প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ।

9.B.12. পোলার আকারের সমীকরণ হইতে ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ (Positive pedal equation of a curve in polar form) ঃ ধরি $f(r, \theta) = 0$ ..... (1) একটি বক্ররেখার পোলার সমীকরণ। এখন আমরা পোলের সাপেক্ষে (1) এর ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ নির্ণয়ের পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করবো।

মনে করি (1) বক্ররেখার $P(r, \theta)$ বিন্দুতে PT স্পর্শক আদি অক্ষরেখা OX কে T বিন্দুতে ছেদ করে। PT এর উপর OQ লম্ব যেখানে Q বিন্দুর স্থানাংক (r_1, θ_1).



$\therefore OP = r, OQ = r_1, \angle POT = \theta, \angle QOt = \theta_1$

এখন $\theta = \angle POT = \angle OPQ + \angle QOT$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \angle OPT\right) + \angle QOT = \frac{\pi}{2} - \phi + \theta_1 \quad [\because \angle OPT = \phi]$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} + \theta_1 - \phi \ldots\ldots (2)$$

আমরা জানি $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$ ..... (3)

ΔOPQ হইতে $\sin\phi = \frac{OQ}{OP} = \frac{r_1}{r} \quad \therefore r_1 = r\sin\phi$ ..... (4)

(1), (2), (3) ও (4) সমীকরণ হইতে r, θ, ϕ অপসারণ করে r_1 ও θ_1 সম্বলিত সমীকরণ পাওয়া যাইবে। উক্ত সমীকরণে $r_1 = r$ এবং $\theta_1 = \theta$ বসিয়ে প্রদত্ত বক্ররেখার প্রথম ধনাত্মক পেডাল পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ–3. $r = a(1 + \cos\theta)$ কার্ডিয়াডের প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $r = a(1 + \cos\theta)$ ..... (1) $\Rightarrow r = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow ln\, r = ln\, 2a + 2\, ln\cos\frac{\theta}{2} \quad [ln \text{ নিয়া}]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = 2.\frac{-1}{2}.\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \quad \left[\frac{d}{d\theta} \text{ প্রয়োগ করিয়া}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = -\tan\frac{\theta}{2} \Rightarrow \cot\phi = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \ldots\ldots (2)$$

পোল হইতে (1) এর (r, θ) বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্বের পাদবিন্দু (r_1, θ_1) হইলে

আমরা জানি $\theta = \frac{\pi}{2} + \theta_1 - \phi$ ..... (3)

$= \frac{\pi}{2} + \theta_1 - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)$ [(2) দ্বারা]

$= \theta_1 - \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{3\theta}{2} = \theta_1 \Rightarrow \theta = \frac{2\theta_1}{3}$ ..... (4)

আবার $r_1 = r \sin\phi = r \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)$ [(2) দ্বারা]

$= r \cos\frac{\theta}{2} = 2a \cos^3\frac{\theta}{2}$ [(1) দ্বারা]

$= 2a \cos^3\frac{1}{2}\left(\frac{2\theta_1}{3}\right)$ [(4) দ্বারা]

$\Rightarrow r_1 = 2a \cos^3\left(\frac{\theta_1}{3}\right)$

$r_1 = r$ এবং $\theta_1 = \theta$ বসিয়ে পাই $r = 2a \cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$

ইহাই নির্ণেয় প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ।

উদাহরণ–4. $r^n = a^n \cos n\theta$ বক্ররেখার q তম ধনাত্মক পেডাল এবং চতুর্থ ঋণাত্মক পেডাল সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $r^n = a^n \cos n\theta$ ..... (1)

$\Rightarrow n \ln r = \ln a^n + \ln \cos n\theta$ [$\ln$ নিয়া]

$\Rightarrow \frac{n}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{\cos n\theta}(-\sin n\theta).\, n$ $\left[\frac{d}{d\theta}\right.$ প্রয়োগ করিয়া$\left.\right]$

$\Rightarrow \cot\phi = \cot\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right) \quad \therefore \phi = \frac{\pi}{2} + n\theta$ ..... (2)

পোল হইতে (1) এর (r, θ) বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্বের পাদবিন্দু (r_1, θ_1) হইলে

$\theta = \frac{\pi}{2} + \theta_1 - \phi = \frac{\pi}{2} + \theta_1 - \left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right)$ [(2) দ্বারা]

$= \theta_1 - n\theta$

$\Rightarrow \theta(n+1) = \theta_1 \quad \therefore \theta = \frac{\theta_1}{n+1}$ ..... (3)

আবার $r_1 = r \sin\phi = r \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right) = r \cos n\theta$

$= a(\cos n\theta)^{1/n}.\cos n\theta$ [(1) দ্বারা]

$= a(\cos n\theta)^{n+1/n}$

$\Rightarrow r_1^{(n/n+1)} = a^{n/n+1} \cos n\theta \Rightarrow r_1^{(n/n+1)} = a^{n/n+1} \cos\left(\frac{n\theta_1}{n+1}\right)$ [(3) দ্বারা]

$r_1 = r$ এবং $\theta_1 = \theta$ বসিয়ে পাই $r^{n/n+1} = a^{n/n+1} \cos\left(\frac{n\theta}{n+1}\right)$ ..... (4)

ইহা (1) বক্ররেখার প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ।

(4) $\Rightarrow r^m = a^m \cos m\theta$ যেখানে $m = \frac{n}{n+1}$ ..... (5)

উপরোক্ত ভাবে ইহার প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ হইবে

$r^{m/m+1} = a^{m/m+1} \cos\frac{m\theta}{m+1}$

$\Rightarrow r^l = a^l \cos(l\theta)$ যেখানে $l = \frac{m}{m+1}$

$\therefore r^{n/2n+1} = a^{n/2n+1} \cos\left(\frac{n\theta}{2n+1}\right)$ ..... (6)

$= \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1}+1} = \frac{n}{n+n+1} = \frac{n}{2n+1}$

ইহা (1) বক্ররেখার দ্বিতীয় ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ।

(6) $\Rightarrow r^s = a^s \cos s\theta$ যখন $s = \frac{n}{2n+1}$

ইহার ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ $r^{s/s+1} = a^{s/s+1} \cos\frac{s\theta}{s+1}$

$\Rightarrow r^t = a^t \cos(t\theta)$ যখন $t = \frac{s}{s+1} = \frac{\frac{n}{2n+1}}{\frac{n}{2n+1}+1}$

$\Rightarrow r^{n/3n+1} = a^{n/3n+1} \cos\left(\frac{n\theta}{3n+1}\right)$ ..... (7)

$= \frac{n}{n+2n+1} = \frac{n}{3n+1}$

ইহা (1) বক্ররেখার তৃতীয় ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ।

(4), (6) ও (7) অনুযায়ী (1) এর q তম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ হইবে

$r^{n/qn+1} = a^{n/qn+1} \cos\left(\frac{n\theta}{qn+1}\right)$ ..... (8)

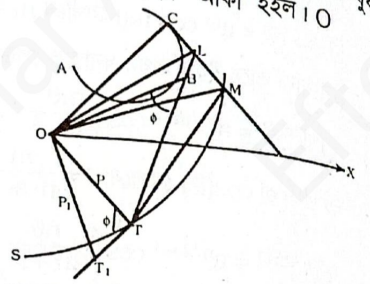
$q = -4$ হইলে (8) হইতে পাই

$r^{n/-4n+1} = a^{n/-4n+1} \cos\left(\frac{n\theta}{-4n+1}\right)$

$\Rightarrow r^{n/1-4n} = a^{n/1-4n} \cos\left(\frac{n\theta}{1-4n}\right)$

ইহা (1) বক্ররেখার চতুর্থ ঋনাত্মক পেডাল সমীকরণ।

9.B.13. পেডাল বক্ররেখা হইতে ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ (Positive pedal equation from pedal curves) ঃ মনে করি ABC বক্ররেখার খুব নিকটবর্তী দুইটি বিন্দু B ও C হইতে BT এবং CM দুইটি স্পর্শক আঁকা হইল। O বিন্দু হইতে BT ও CM এর উপর যথাক্রমে OT ও OM লম্ব আঁকা হইল। অনুরূপে বক্ররেখা ABC এর যে কোন বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের উপর মূলবিন্দু হইতে অংকিত লম্বের পাদবিন্দু সমূহ পাওয়া যাইবে। এই সকল পাদবিন্দুগুলি বক্ররেখা STM এর উপর অবস্থিত। সুতরাং STM বক্ররেখাই ABC বক্ররেখার পেডাল বা পাদরেখা হইবে।



মনি করি BT ও CM পরস্পর L বিন্দুতে ছেদ করে। OL এবং TM যুক্ত করা হইল। OL কে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অংকন করা হইলে TM উক্ত বৃত্তের জ্যা হইবে।

যদি B, L, C বিন্দুত্রয় সমপাতিত হয় তবে TM বৃত্তের স্পর্শক হইবে অর্থাৎ TM পেডাল বক্ররেখা STM এর T বিন্দুতে স্পর্শক হইবে।

পেডাল বক্ররেখা STM এর স্পর্শক T_1TM এর উপর OT_1 লম্ব আঁকা হইল।

$\therefore \angle OPT = \angle OTT_1 = \phi$.

এখন OB = r, OT = P এবং $OT_1 = P_1$ হইলে ΔOTT_1 হইতে পাই

$$\sin\phi = \frac{OT_1}{OT} = \frac{P_1}{P} \Rightarrow P_1 = P\sin\phi \quad \ldots\ldots (1)$$

ΔOBT হইতে পাই $\sin\phi = \frac{OT}{OB} = \frac{P}{r} \Rightarrow P = r\sin\phi$

$$\Rightarrow P^2 = rP\sin\phi$$
$$\Rightarrow P^2 = rP_1 \quad [(1) \text{ দ্বারা}]$$
$$\therefore r = \frac{P^2}{P_1}$$

সুতরাং যদি $f(P, r) = 0$ মূল পেডাল বক্ররেখার সমীকরণ হয় তবে $f\left(P, \frac{P^2}{P_1}\right) = 0$ হইল মুল পেডাল বক্ররেখার সাপেক্ষে পেডাল সমীকরণ।

আবার $P = r$ এবং $P_1 = P$ বসিয়ে পাই $f\left(r, \frac{r^2}{P}\right) = 0$.

ইহাই মুল পেডাল বক্ররেখার পোল সাপেক্ষে প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ।

উদাহরণ-5. $a^2r = P^3$ পেডাল সমীকরণের n তম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $a^2r = P^3$ ..... (1)

P এর পরিবর্তে r এবং r এর পরিবর্তে $\frac{r^2}{P}$ বসিয়ে পাই

$$a^2.\frac{r^2}{P} = r^3 \Rightarrow \frac{a^2}{P} = r \quad \ldots\ldots (2)$$

ইহা (1) এর প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ।

আবার P এর পরিবর্তে r এবং r এর পরিবর্তে $\frac{r^2}{P}$ বসিয়ে পাই

$$\frac{a^2}{r} = \frac{r^2}{P} \Rightarrow a^2P = r^3 \quad \ldots\ldots (3)$$

ইহা (1) এর দ্বিতীয় ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ। একইভাবে P এর পরিবর্তে r এবং এর পরিবর্তে $\frac{r^2}{P}$ বসিয়ে (1) এর তৃতীয় ধনাত্মক পেডাল হইবে

$$a^2r = \left(\frac{r^2}{P}\right)^3 \Rightarrow a^2P^3 = r^5 \quad \ldots\ldots (4)$$

(2), (3) ও (4) অনুযায়ী (1) এর n তম ধনাত্মক পেডাল হইবে $a^2\,P^{2n-3} = r^{2n-1}$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

9.B.1. স্পর্শক ও ব্যাসার্ধ ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ ϕ হইলে $\tan\phi$ কত? [If ϕ be the angle between a tangent and radius vector, then what is $\tan\phi$?]

Ans : $r = f(0)$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$.

9.B.2. $\sin\phi$ কত? [What is $\sin\phi$?]

Ans : $\sin\phi = r\frac{d\theta}{ds}$

9.B.3. $\cos\phi$ কত? [What is $\cos\phi$?]

Ans : $\cos\phi = \frac{dr}{ds}$.

9.B.4. পোলার স্থানাংকে dx^2 কত? [What is ds^2 in polar co-ordinates?]

Ans : পোলার স্থানাংকে $ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2$.

9.B.5. পোলার উপস্পর্শক কত? [What is polar subtangent?]

Ans : পোলার সাবট্যানজেন্ট $= r^2\frac{d\theta}{dr}$.

9.B.6. পোলার সাবনর্মাল কত? [What is polar subnormal?]

Ans : পোলার সাবনর্মাল $= \frac{dr}{d\theta}$.

9.B.7. পোল হইতে স্পর্শকের উপর লম্ব দৈর্ঘ্য p কত? [What is the perpendicular distance from a pole on a tangent p?]

Ans : প্রদত্ত শর্তে, $p = r\sin\phi$ যেখানে ϕ হইল স্পর্শক ও ব্যাসার্ধ ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ।

9.B.8. $r = f(\theta)$ বক্ররেখার পেডাল সমীকরণ বলিতে কি বুঝ? [What do you mean by pedal equation of $r = f(\theta)$?]

Ans : পোল হইতে $r = f(\theta)$ বক্ররেখার স্পর্শকের উপর লম্ব দৈর্ঘ্য p হইতে p ও r সম্পর্কিত সমীকরণকে পেডাল সমীকরণ বলা হয়।

9.B.9. প্রথম ধনাত্মক পেডাল বলিতে কি বুঝ? [What do you mean by first positive pedal?]

Ans : কোন বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের উপর নির্দিষ্ট কোন বিন্দু হইতে লম্ব আঁকা হইলে ঐ লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথকে ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে মুল বক্ররেখার প্রথম ধনাত্মক পেডাল বলা হয়।

9.B.10. ঋণাত্মক পেডাল কাকে বলে? [What is negative pedal?]

Ans : কোন বক্ররেখার ধনাত্মক পেডালের সাপেক্ষে ঐ বক্ররেখাকে ঋণাত্মক পেডাল বলা হয়।

EXERCISE–9(B)

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

1. দেখাও যে শীর্ষবিন্দুর সাপেক্ষে $y^2 + 4bx = 0$ প্যারাবোলার প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ $y^2(2a - x) = x^3$ যেখানে $b = 2a$. **[RUH–1959]**

2. দেখাও যে $ax^m + by^m = 1$ বক্ররেখার প্রথম ধনাত্মক পেডাল সমীকরণ

$$\left(\frac{\cos\alpha}{p}\right)^{m/m-1} a^{1/-m+1} + \left(\frac{\sin\alpha}{P}\right)^{m/m-1} b^{1/1-m} = 1.$$

3. দেখাও যে $r^m = a^m \cos m\theta$ বক্ররেখার K তম ধনাত্মক পেডাল

$$r^{m/1+Km} = a^{m/1+Km} \cos\left(\frac{m\theta}{1 + Km}\right).$$

4. দেখাও যে $r = a(1 + \cos\theta)$ কার্ডিয়াডের n তম ঋনাত্মক পেডাল সমীকরণ

$$\left(\frac{r}{2a}\right)^{n-2} = \cos\left(\frac{\theta}{n-2}\right).$$

5. দেখাও যে বক্ররেখা

(i) $r = aP$ এর প্রথম ধনাত্মক পেডাল নিজেই।

(ii) $P + r = a$ এর n তম ধনাত্মক পেডাল $\frac{r^n}{pn}(P + r) = a$.

———×———

২০০৯-২০১০ শিক্ষাবর্ষ হইতে কার্যকর গ্রেডিং ও ক্রেডিট পদ্ধতিতে প্রশ্নের ধরণ অনুযায়ী ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস অংশের গুরুত্বপূর্ণ

প্রশ্ন সম্ভার

Part–A (ক-বিভাগ)

Chapter–1(A)

1.A.1. ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define function.)

1.A.2. কোন বিন্দুতে ফাংশনের মান বা ইমেজ কাকে বলে? (What is called value or image of a function at a point?)

1.A.3. ফাংশনের ডোমেন ও কোডোমেন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by domain and codomain of a function?)

1.A.4. ফাংশনের রেঞ্জ এর সংজ্ঞা দাও। (Define range of a function.) **[NUH–2010]**

1.A.5. ধরি A ও B দুইটি সসীম সেট যেখানে $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$. A হইতে B তে কয়টি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়? (Let A and B are finite sets where $n(A) = p$ and $n(B) = q$. How many are functions defined from A to B?)

1.A.6. $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। (Find the domain of the function $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$.)

1.A.7. ব্যবধি কাকে বলে? (What is interval?)

1.A.8. খোলা ব্যবধি কি? (What is the open interval?)

1.A.9. বদ্ধ ব্যবধি কি? (What is the closed interval?)

1.A.10. $y = ln\ x$ ফাংশনের ডোমেন কত? (What is the domain of the function $y = ln\ x$?) **[NUH–2010]**

Chapter–1(B)

1.B.1. সমান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by equal functions?)

1.B.2. অভেদ ফাংশন কাকে বলে? (What is identity function?) **[NUH–2010]**

1.B.3. ধ্রুবক ফাংশন কাকে বলে? (What is constant function?)

1.B.4. এক-এক বা ইনজেকটিভ ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define one-one or injective function.)

1.B.5. অনটু বা সার্বিক বা সর্বগ্রাহী বা সারজেকটিভ ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define onto or surjective function.)

1.B.6. মেনি ওয়ান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by many one function?)

1.B.7. সাংখ্যিক মানের ফাংশন বা পরম মান ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by absolute value function?)

1.B.8. সর্বোচ্চ পূর্ণ সাংখ্যিক ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by greatest integer function?)

1.B.9. বৃদ্ধিপ্রাপ্ত ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by increasing function?)

1.B.10. হ্রাসকৃত ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by decreasing function?)

1.B.11. জোড় বা যুগ্ম ফাংশন কাকে বলে? (What is even function?) **[NUH-2010]**

1.B.12. বেজোড় বা অযুগ্ম ফাংশন কাকে বলে? (What is odd function?) **[NUH-2010]**

1.B.13. জোড় ও বেজোড় ফাংশনের উদাহরণ দাও। (Give the example of even and odd functions.) **[NUH-2010]**

1.B.14. পর্যায়ী ফাংশন ও পর্যায় বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by the periodic function and period?)

1.B.15. গুণোজ ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by composite function?)

Chapter–1(C)

1.C.1. ফাংশনের লেখচিত্র অংকন বলিতে কি বোঝায়? (What is mean by drawing a graph of a function?)

1.C.2. সাংখিক মানের ফাংশন $y = |x|$ এর লেখচিত্র আঁক। (Sketch the graph of absolute value function $y = |x|$.)

1.C.3. $y = \sin x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \sin x$.)

1.C.4. $y = \cos x$ ফাংশনটি আঁক। (Sketch the function $y = \cos x$.)

1.C.5. $y = a^x$, $a > 1$ সূচকীয় ফাংশনটি আঁক। (Sketch the exponential function $y = a^x$, $a > 1$.)

Chapter–2(A)

2.A.1. ফাংশনের সীমা বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by the limit of a function?)

2.A.2. $(\delta - \epsilon)$ এর সাহায্যে ফাংশনের সীমার সংজ্ঞা দাও। (Define limit of function using $(\delta - \epsilon)$.)

2.A.3. ফাংশনের ডানসীমা কি? (What is the right limit of a function?)

2.A.4. ফাংশনের বামসীমা কি? (What is left limit of a function?)

2.A.5. ফাংশনের সীমার অস্তিত্ব বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by existence of limit of a function?)

2.A.6. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$?)

2.A.7. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$?)

2.A.8. $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$?)

2.A.9. $\lim_{x \to a} f(x)$ ও $f(a)$ দ্বারা কি বোঝায়? (What are meant by $\lim_{x \to a} f(x)$ and $f(a)$?)

2.A.10. $f(x)$ ফাংশনের উদাহরণ দাও যেখানে সীমাস্থমান বিদ্যমান কিন্তু ফাংশনের মান বিদ্যমান নয়। (Give an example of $f(x)$ where limitting value exists but functional value does not exist.)

Chapter–2(B)

2.B.1. $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by the functions $f(x)$ is continuous at a point $x = a$?) **[NUH-2010]**

2.B.2. বিচ্ছিন্ন ফাংশন কি? (What is discontinuous function.)

2.B.3. $(\delta - \epsilon)$ এর সাহায্যে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define continuous function using $(\delta - \epsilon)$.) **[NUH(NM)-2010]**

2.B.4. একটি ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define continuous function in a interval.)

2.B.5. দূরীকরণযোগ্য বিচ্ছিন্নতা কি? (What is removable discontinuity.)

2.B.6. ব্যবধি লিখ যেখানে $f(x) = \ln x$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। (Write the interval where the function $f(x) = \ln x$ is continuous.)

2.B.7. কোন্ বিন্দুতে মূলদীয় বহুপদী ফাংশন বিচ্ছিন্ন? (Which are the points where the rational polynomial function is discontinuous?)

2.B.8. কোন্ বিন্দুতে $f(x) = \frac{2x+1}{x(x-1)}$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন? (Which are the points where the function $f(x) = \frac{2x+1}{x(x-1)}$ is continuous?)

2.B.9. ডান অবিচ্ছিন্ন ফাংশন কি? (What is the right continuous function?)

2.B.10. বাম অবিচ্ছিন্ন ফাংশন কি? (What is left continuous function?)

Chapter–2(C)

2.C.1. কোন বিন্দুতে ফাংশনের অন্তরজ এর সংজ্ঞা দাও। (Define derivative of a function at a point.)

2.C.2. অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন কি? (What is the differentiable function?)

2.C.3. বাম অন্তরজ কাকে বলে? (What is called left hand derivative?) **[NUH–2010]**

2.C.4. ডান অন্তরজ কাকে বলে? (What is called right hand derivative?) **[NUH–2010]**

2.C.5. এক পার্শ্ব অন্তরজ কি? (What is the one sided derivatives?)

2.C.6. $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অন্তরীকরণযোগ্য হওয়ায় শর্তসমূহ লিখ। (Write the conditions for differentiability of $f(x)$ at $x = a$.) **[NUH(MN)–2010]**

2.C.7. খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্যতা কি? (What is the differentiability in an open interval?)

2.C.8. বদ্ধ ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্যতা কি? (What is the differentiability in a closed interval?)

2.C.9. অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণযোগ্যতার মধ্যে সম্পর্ক কি? (What is the relation between continuity and differentiability?)

2.C.10. কোন বিন্দুতে $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$ ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়? (Which are the points where the function $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$ is not differentiable?)

Chapter–3(A)

3.A.1. পরিবর্তন হার কি? (What is the rate of change?)

3.A.2. অন্তরজ বা অন্তরক সহগ কাকে বলে? (What is called derivative or differential coefficient?)

3.A.3. $y = f(x)$ ফাংশনের জন্য $\frac{dy}{dx}$ এর মূল আকার লিখ। (Write the original form of $\frac{dy}{dx}$ for the function $y = f(x)$.)

3.A.4. অন্তরীকরণ কি? (What is differentiation?)

3.A.5. জ্যামিতিকভাবে $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is $\frac{dy}{dx}$ in geometrically?) **[NUH–2010, NUH(NM)–2010]**

Chapter–3(B)

3.B.1. ধ্রুবকের অন্তরজ কত? (What is the derivative of constant?)

3.B.2. $\frac{d}{dx}(a^x)$ ও $\frac{d}{dx}(x^a)$ কত? (What is $\frac{d}{dx}(a^x)$ and $\frac{d}{dx}(x^a)$?)

3.B.3. $\frac{d}{dx}(\ln x)$ ও $\frac{d}{dx}(\log_a x)$ কত?

3.B.4. $\frac{d}{dx}(uv)$ ও $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$ কত?

3.B.5. $y = f(u)$ এবং $u = g(x)$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ কত?

Chapter–4(A)

4.A.1. $y = x^n$ এর x এর সাপেক্ষে n তম অন্তরজ কত? (What is the n-th derivative of $y = x^n$ with respect to x?) **[NUH(NM)–2010]**

4.A.2. $y = x^m$ এর x এর সাপেক্ষে $n(n > m)$ তম অন্তরজ কত? (What is the n-th derivative of $y = x^m$ $(n > m)$ with respect to x?)

4.A.3. $y = x^m$ এর x এর সাপেক্ষে $n(n < m)$ তম অন্তরজ কত? (What is the nth derivative of $y = x^m$ $(n < m)$ with respect to x?)

4.A.4. $y = \ln x$ এর n তম অন্তরজ কত? (What is the nth derivative of $y = \ln x$?)

4.A.5. $y = \sin(ax + b)$ হইলে y_n কত? (If $y = \sin(ax + b)$, then what is y_n?)

4.A.6. $y = \cos(ax + b)$ হইলে y_n কত?

4.A.7. $y = e^{ax} \sin(bx + c)$ হইলে y_n কত?

4.A.8. $y = \frac{1}{ax + b}$ হইলে y_n কত?

4.A.9. $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$ হইলে y_n কত?

4.A.10. $y = \frac{x}{x^2 + a^2}$ হইলে y_n কত?

Chapter–4(B)

4.B.1. লিবনীজ উপপাদ্যের বর্ণনা দাও। (State the Leibniz theorem.)

4.B.2. $y = f(x)$ ফাংশনের ক্ষেত্রে $(y_n)_0$ দ্বারা কি বোঝায়? (What is meant by $(y_n)_0$ for the function $y = f(x)$?)

4.B.3. যদি $y = \sin x$ হয় তবে $(y)_0$ ও $(y_1)_0$ কত:? [If $y = \sin x$ then what are $(y)_0$ and $(y_1)_0$?]

4.B.4. যদি $y = \tan^{-1}x$ হয় তবে $(y_1)_0$ কত? [If $y = \tan^{-1} x$ then what is $(y_1)_0$?]

4.B.5. যদি $y = e^{ax}$ হয় তবে $(y_n)_0$ কত? [If $y = e^{ax}$ then what is $(y_n)_0$?]

Chapter–5

5.1. রোলের উপপাদ্যের বর্ণনা দাও। (State the Rolle's theorem.)

5.2. প্রথম গড়মান বা মধ্যমান উপপাদ্যের বর্ণনা দাও। (State the first mean value theorem.) **[NUH–2010]**

5.3. গড়মান উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা কি? (What is the geometrical interpretation of mean value theorem.)

5.4. দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্যের বর্ণনা দাও। (State the second mean value theorem.) **[NUH(NM)–2010]**

5.5. দ্বিতীয় গড়মান উপপাদ্যের ন্যায় প্রথম মধ্যমান উপপাদ্যটি লিখ। (Write the first mean value theorem as the second mean value theorem.)

Chapter–6

6.1. সলমিস ও রসির আকারের অবশেষসহ টেলরের সসীম ধারা লিখ। (Write the Taylor's finite series with schlomilch and Roche's form of remainder.)

6.2. ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষসহ টেলরের সসীম ধারা লিখ। (Write the Taylor's finite series with Lagrange's form of remainder.)

6.3. কসির আকারের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা লিখ। (Write the Taylor's finite series with Cauchy's form of remainder.)

6.4. টেলর অনন্ত ধারা কাকে বলে? (What is called Taylor's infinite series?)

6.5. টেলর ধারার ব্যর্থতা কি? (What is the failures of Taylor's series?)

6.6. ল্যাগ্রাঞ্জের আকারের অবশেষসহ ম্যাকলরিন সসীম ধারা লিখ। (Write the Maclaurin's finite series with lagrange's form of remainder.)

6.7. ম্যাকলরিন অনন্ত ধারা কি? (What is the Maclaurin's infinite series?)

6.8. ম্যাকলরিন ধারার ব্যর্থতা কি? (What is the failures of Maclaurin series?)

6.9. অভিসারিতা ব্যবধিসহ $\frac{1}{1-x}$ এর ম্যাকলরিণ ধারা লিখ। (Write the Maclaurin's series of $\frac{1}{1-x}$ with interval of convergence.)

6.10. অভিসারিতা ব্যবধিসহ নিম্নের ফাংশনগুলির ম্যাকলরিন ধারা লিখ। (Write the Maclaurin's series of the following functions with interval of convergence.) $ln\,(1+x)$

Chapter–7

7.1. কোন শর্তে $y = f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান হইবে? (Which is the condition where the function $y = f(x)$ is increasing at $x = a$?)

7.2. একটি ব্যবধিতে উর্ধ্ব কনকেভ ফাংশন বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by concave up function in a interval?)

7.3. সন্ধি বিন্দু কি? (What is the critical point?) **[NUH(NM)–2010]**

7.4. ইনফ্লেকশন বিন্দু কি? (What is the inflection point?)

7.5. ফাংশনের গরিষ্ঠমান কাকে বলে? (What is the maximum value of a function?)

7.6. ফাংশনের লঘিষ্ঠমান কাকে বলে? (What is the minimam value of a function?)

7.7. চরমমান কি? (What is the extreme value?) **[NUH(NM)–2010]**

7.8. পরম গরিষ্ঠমান বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by absolute maximum value?)

7.9. পরম লঘিষ্ঠমান বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by absolute minimum value?)

7.10. একটি ফাংশনের গরিষ্ঠমান বা লঘিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত কি? (What is the necessary condition for the existence of maximum value or minimum value of a function?)

Chapter–8

8.1. অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate $\frac{0}{0}$ form?) **[NUH–2010]**

8.2. অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ form?)

8.3. অনির্ণেয় $0 \cdot \infty$ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate $0 \cdot \infty$ form.)

8.4. অনির্ণেয় $\infty - \infty$ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by $\infty - \infty$ form?)

8.5. অনির্ণেয় 1^∞ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate 1^∞ form?)

8.6. অনির্ণেয় 0^∞ আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate 0^∞ form?)

8.7. অনির্ণেয় ∞^0 আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate ∞^0 form?)

8.8. অনির্ণেয় 0^0 আকার বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by indeterminate 0^0 form?)

8.9. অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ আকারের জন্য ল'পিটালের নিয়মের বর্ণনা দাও। (State the L'Hopital's rule for the indeterminate $\frac{0}{0}$ form.)

8.10. অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকারের জন্য ল'পিটালের নিয়মের বর্ণনা দাও। (State the L'Hopital's rule for the indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ form.)

Chapter–9(A)

9.A.1. স্পর্শ রেখা কাকে বলে? (What is called tangent line?)

9.A.2. $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ লিখ। [Write the equation of tangent at (x_1, y_1) of the curve $y = f(x)$.] **[NUH–2010]**

9.A.3. কোন সরলরেখার উপরস্থ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক বলিতে কি বুঝ? [What do you mean by the tangent of a straight line at any point?]

9.A.4. মূলবিন্দুতে $x^2 + y^2 + x + y = 0$ এর স্পর্শকের সমীকরণ কত? [What is the equation of tangent at origin of $x^2 + y^2 + x + y = 0$?]

9.A.5. অভিলম্ব কি? (What is normal?)

9.A.6. $y = f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ লিখ। [Write the equation of normal at (x, y) of the curve $y = f(x)$.]

9.A.7. উপস্পর্শক কি? [What is subtangent?]

9.A.8. উপঅভিলম্ব কি? [What is subnormal?]

9.A.9. উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত? [What is the length of subtangent?]

9.A.10. উপঅভিলম্বের দৈর্ঘ্য কত? [What is the length of subnormal?]

Chapter–9(B)

9.B.1. স্পর্শক ও ব্যাসার্ধ ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ ϕ হইলে $\tan\phi$ কত? [If ϕ be the angle between a tangent and radius vector, then what is $\tan\phi$?]

9.B.2. পোলার উপস্পর্শক কত? [What is polar subtangent?]

9.B.3. পোলার সাবনর্মাল কত? [What is polar subnormal?]

9.B.4. প্রথম ধনাত্মক পেডাল বলিতে কি বুঝ? [What do you mean by first positive pedal?]

9.B.5. ঋণাত্মক পেডাল কাকে বলে? [What is negative pedal?]

Part–B (খ-বিভাগ)

Chapter–1(A)

1.A.1. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the function $f(x) = \frac{x}{x+1}$.] **[NUH(NM)–2008]**

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, $R_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

1.A.2. $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the function $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$.] **[NUH–2004]**

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

1.A.3. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the function $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.] **[NUH(NM)–2006]**

উত্তর ঃ $D_f = [-2, 2]$, $R_f = [0, 2]$

1.A.4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the function $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$.] **[NUH(NM)–2007]**

উত্তর ঃ $D_f = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$

1.A.5. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

(i) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ **[NUH–2010]**

উত্তর ঃ $D_f = (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$

(ii) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **[NUH(NM)-2008]**

উত্তর ঃ $D_f = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$

(iii) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ **[NUH(NM)-2007]**

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$, $R_f = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

(iv) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{যখন } -1 \le x < 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$ **[NUH-2007]**

উত্তর ঃ $D_f = [-1, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$

(v) $y = |x + 1| + |x - 1|$ **[NUH(NM)-2005]**

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [2, \infty)$

Chapter-1(B)

1.B.1. যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সূত্র $f(x) = 3x - 6$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে $y = f^{-1}(x)$ বাহির কর এবং $f(x)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

উত্তর ঃ $y = f^{-1}(x) = \dfrac{5x + 3}{4x - 2}$

1.B.2. ধর $A = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. ধর $f : A \to B$ ফাংশনটি $f(x) = \dfrac{x - 3}{2x + 1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। প্রমাণ কর যে, f একটি এক-এক এবং অনটু (onto) ফাংশন। একটি ফর্মূলা বাহির কর যাহা f^{-1} এর সংজ্ঞা দেয়। [Let $A = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Let the function $f : A \to B$ is defined by $f(x) = \dfrac{x - 3}{2x + 1}$. Prove the f is an one-one and onto function. Find a formula which defined f^{-1}.]

উত্তর ঃ $f^{-1}(x) = \dfrac{2 - 3x}{1 - x}$

1.B.3. দেখাও যে $f(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ বর্ণিত $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি এক-এক ও না, সর্বগ্রাহীও না। এই ফাংশনের ডোমেন ও কোডোমেন সংশোধন কর যেন ইহা এক-এক এবং সর্বগ্রাহী উভয়টি হয়। [Show that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$ is neither one- one nor onto. Modify the domain and co-domain of this function so that it may be both one-one and onto.

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [0, \infty)$, $f^{-1}(4)$ বিদ্যমান নয়।

1.B.4. যদি $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x^2 - x - 2$ হয় তবে দেখাও যে $(fog)(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ এবং $(gof)(x) = x^4 - x^2 - 2$.

Chapter-1(C)

1.C.1. নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph of the following function f and find domain and range.]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

[NUH-2006, 2010(Old), NUH(NM)-2010, DUH-1989]

1.C.2. নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Draw the graph of the following function f and find domain and range.]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

[NUH-2005, DUH-1986, 1988, 2006]

1.C.3. নিম্নভাবে সংজ্ঞায়িত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Draw the graph of the function f which is defined as follows.]

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{যখন } x > 1 \\ x & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ -x & \text{যখন } x \le 0 \end{cases}$$ **[NUH-2010, DUH-1989]**

1.C.4. নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। [Draw the graph of the function f which is defined as follows.]

$f(x) = |x + 1| + |x - 2|$. **[NUH-1997, 2003]**

1.C.5. নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিত f ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } |x| > 1 \\ 1 + x & \text{যখন } -1 \le x \le 0 \\ 1 - x & \text{যখন } 0 < x \le 1 \end{cases}$

[NUH-1997, 2009, NU(NM)-2004, 2009, BSc(Pass)-2006]

1.C.6. নিম্নে বর্ণিত f ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অংকন কর।

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|}{2}} & \text{যখন } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{যখন } 0 \le x < 2 \end{cases}$$ **[DUH-1987; NUH-2003]**

1.C.7. $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}|\cos x|$ এর লেখচিত্র অংকন কর।

[NUH(NM)-2008]

Chapter-2(A)

2.A.1. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর। $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$. **[NUH-2010]**

2.A.2. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর। $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$

[NUH(NM)-2010, DUH-1980]

2.A.3. $(\delta - \varepsilon)$ সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ কর। $\lim_{x\to 2} (x^3 - 3x + 7) = 9$.

[BSc(Pass)-2008]

2.A.4. দেখাও যে $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ এর সীমা বিদ্যমান নয়। **[NUH-2002]**

Chapter-2(B)

2.B.1. f বাস্তব ফাংশনটি $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{যখন } x \neq 2 \\ 3 & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$ দ্বারা প্রদত্ত হইলে দেখাও যে f ফাংশনটি $x = 2$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। f ফাংশনটিকে এমনভাবে সংজ্ঞায়িত কর যেন উহা $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়। [The real function f is given by $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{when } x \neq 2 \\ 3 & \text{when } x = 2 \end{cases}$. Show that the function f is discontinuous at $x = 2$. Define the function f in such a way that it is continuous at $x = 2$.]

[NUH(NM)-2005, DUH-1982, 1985]

2.B.2. $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে $f : R \to R$ ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কর যেখানে [At $x = 0$ and $x = 1$ discuss the continuity of the function $f : R \to R$ where]

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{যখন } x > 1 \end{cases}$$

[NUH-03, NUH(NM) 04, 09, BSc(Pass)-06, DUH-86, 88]

2.B.3. $f(x) = 3 + 2x$ যখন $-\frac{3}{2} \le x < 0$

$= 3 - 2x$ যখন $0 \le x \le \frac{3}{2}$

$= -3 - 2x$ যখন $x \ge \frac{3}{2}$

ফাংশনটির $x = 0$ এবং $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই কর। [Investigate the continuity of the function at $x = 0$ and $x = \frac{3}{2}$.]

[NUH-2007, 2009, NUH(NM)-2003, 2007, DUH-1982]

2.B.4. যদি $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 4 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন। তুমি কি $f(0)$ কে এমনভাবে সংজ্ঞায়িত করিতে পার যেন উহা $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়। **[BSc(Pass)-2007]**

Chapter-2(C)

2.C.1. যদি $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x < 1/2 \\ 1 - x & \text{যখন } 1/2 \le x < 1 \end{cases}$ তবে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন কিন্তু ঐ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অন্তরীকরণ যোগ্য নয়।

[If $f(x) = \begin{cases} x & \text{when } 0 \le x < 1/2 \\ 1 - x & \text{when } 1/2 \le x < 1 \end{cases}$ then $f(x)$ is continuous at $x = \frac{1}{2}$ but $f(x)$ is not differentiable at that point.]

[NUH-1997, NUH(NM)-2006, DUH-1983]

2.C.2. যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরীকরণ যোগ্য কিন্তু $x = 0$ বিন্দুতে $f'(x)$ অবিচ্ছিন্ন নয়।

[If $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{when } x \neq 0 \\ 0 & \text{when } x = 0 \end{cases}$ then show that at $x = 0$ $f(x)$ is differentiable but $f'(x)$ is not continuous.]

[BSc(Pass)-2007]

2.C.3. $f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ 4x^2 - 3x & \text{যখন } 1 < x < 2 \\ 3x + 4 & \text{যখন } x \ge 2 \end{cases}$

ফাংশনটি $x = 1$ এবং 2 বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্য কি-না পরীক্ষা কর।

[NUH-2007, 2010(Old)]

2.C.4. যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{যখন } x \le 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 1/x & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$ হয়,

তবে $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর।

[NUH-2003, NUH(NM)-2009]

2.C.5. যদি $f(x) = \begin{cases} 3 + 2x & \text{যখন } -3/2 < x \le 0 \\ 3 - 2x & \text{যখন } 0 < x < 3/2 \\ -3 - 2x & \text{যখন } x \ge 3/2 \end{cases}$ হয়,

তবে $x = 0$ এবং $x = \frac{3}{2}$ বিন্দুতে ফাংশনটির অন্তরীকরণযোগ্যতা আলোচনা কর। **[NUH-2009, NUH(NM)-2007]**

Chapter–3(A)

3.A.1. সংজ্ঞার সাহায্যে $ln\ \cos x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।
[NUH(NM)–2005, DUH–1981, CUH–1982]

3.A.2. সংজ্ঞার সাহায্যে $x\ ln\ x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।
[NUH(NM)–2003, RUH–1990]

3.A.3. সংজ্ঞার সাহায্যে $ln\ \sin x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।
[NUH(NM)–2010]

Chapter–3(B)

3.B.1. $y = \sin^{-1}\left(\frac{a + b\cos x}{b + a\cos x}\right)$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।
[NUH–1998, DUH–1986]

3.B.2. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + x^{1/x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [NUH–1997]

3.B.3. x এর সাপেক্ষে $(\sin x)^{ln\ x} + \sin^2(\cos^{-1}x)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [NUH–2007, DUH–1981, RUH–1982]

3.B.4. $y = \left(\frac{n}{x}\right)^{nx}\left(1 + ln\ \frac{x}{n}\right)$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।
[NUH–2007, DUH–1992, RUH–1989, CUH–1992]

3.B.5. x এর সাপেক্ষে $x^y + y^x = a^b$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।
[NUH–07, 2010(Old), NUH(NM)–09, DUH–94, RUH–83]

3.B.6. x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}\right)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।
[DUH–1986, RUH–1987]

3.B.7. x এর সাপেক্ষে $y = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [BSc(Pass)–2008, RUH–1984, 1994]

3.B.8. $\sec^{-1}\frac{1}{2x^2 - 1}$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [NUH–2010, DUH–2003, CUH–1988, KUET–1992]

3.B.9. $\sin^{-1}\frac{2x}{1 + x^2}$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\frac{2x}{1 - x^2}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।
[NUH–03, NUH(NM)–02, 06, BSc(Pass)–06, DUH–84, 87, CUH–89]

2.B.10. কোন এক নির্দিষ্ট সময়ে একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 3 ফুট লম্বা এবং 2 ফুট / মিনিট হারে বৃদ্ধি পায়। ঐ সময়ে ক্ষেত্রফল কি হারে বৃদ্ধি পাইবে? [At a certain instant the side of a square is 3 ft long and increasing at a rate of 2 ft/minute. How fast is the area increasing at that instant?] [NUH(NM)–2007]

Chapter–4(A)

4.A.1. যদি $y = \sin nx + \cos nx$ হয় তবে দেখাও যে
$y_r = n^r[1 + (-1)^r \sin 2nx]^{1/2}$
[NUH(NM)–05, DUH–72, CUH–70, RUH–90, RUS–84]

4.A.2. যদি $y = \sin x$ হয় তবে দেখাও যে $4\frac{d^3}{dy^3}(\cos^7 x) = 105\sin 4x$.

Chapter–4(B)

4.B.1. দেখাও যে $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^n\ ln\ x) = \frac{n!}{x}$.
[NUH(NM)–2002, BSc(Pass)–2006, DUH–1957, 1969]

4.B.2. যদি $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হয় তবে দেখাও যে
$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0$. [NUH–95, 97, NUH(NM)–08, DUHT–92, DUH–78, CUH–84, JUH–85]

4.B.3. যদি $ln\ y = \tan^{-1}x$ হয়, তবে দেখাও যে
$(1 + x^2)y_{n+2} + (2nx + 2x - 1)y_{n+1} + n(n + 1)y_n = 0$ [NUH–07, NUH(NM)–03, 07, DUH–75, 84, 89, DUS–87, 88, CUH–80, 84]

4.B.4. যদি $y = ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ হয় তবে দেখাও যে
$(x^2 + a^2)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$ [BSc(Pass)–07]

Chapter–5

5.1. রোলের উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও। [Give the geometrical interpretation of the Rolle's theorem.]

5.2. গড়মান উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও। [Give the geometrical interpretation of the mean value theorem.]

5.3. $f(x) = \begin{cases} x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{যখন } 1 < x \le 2 \end{cases}$
ফাংশনটির $f(0) = 0 = f(2)$ রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী (0, 2) ব্যবধিতে f(x) এর অন্তরক অন্ততঃ একবার শূন্য হওয়া উচিৎ। কিন্তু উক্ত ব্যবধিতে ইহা কোন বিন্দুতে শূন্য নহে। কেন নয় তাহা ব্যাখ্যা কর।
[BSc(Pass)–2007, DUH–1987]

5.4. (–6, 1) ব্যবধিতে $f(x) = x^2 + 5x - 6$ ফাংশনের জন্য রোলের উপপাদ্যের প্রয়োগ যাচাই কর। [DUH–1989]

5.5. (0, 1) ব্যবধিতে $f(x) = 3 + 2x - x^2$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই কর। [NUH(NM)–2004, 2006, DUH–1988]

5.6. গড়মান উপপাদ্য $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$ এর ক্ষেত্রে ξ এর মান নির্ণয় কর, যদি $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $b = 9$ হয়। [NUH(NM)–2007]

5.7. $f(x) = x^3 - 3x + 2x^2$, $a = 0$, $4 = \frac{1}{2}$ হলে সূত্র $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$, $0 < \theta < 1$ এ θ এর উপযুক্ত মান নির্ণয় কর।

[NUH(NM)-03]

5.8. (0, 4) ব্যবধিতে $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা পরীক্ষা কর। [NUH-2008]

5.9. (a, b) ব্যবধিতে $f(x) = Ax^2 + Bx + c$ ফাংশনের জন্য গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর। [NUH-2007]

5.10. (1, 3) ব্যবধিতে $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ ফাংশনে রোলের উপপাদ্যের প্রয়োগ যাচাই কর। [NUH-2007]

Chapter-6

6.1. $(x - 2)$ শক্তি ধারায় $5x^2 + 7x + 3$ এবং $x^3 + 2x^2 - 1$ কে বিস্তার কর।

6.2. টেলর উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1 + c)^5},\ 0 < c < x.$$

[NUH-06, DUH-86]

Chapter-7

7.1. $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে ক্রমহ্রাসমান বা ক্রমবর্দমান তা নির্ণয় কর। [NUH-2006]

7.2. কোন্ কোন্ ব্যবধিতে $f(x) = 5 + 12x - x^3$ ফাংশনটি বৃদ্ধি ও হ্রাস পায় তাহা নির্ণয় কর। [NUH(NM)-2008]

7.3. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ ফাংশন কোন্ ব্যবধিতে 'concave up' এবং কোন্ ব্যবধিতে 'concave down' হবে নির্ণয় কর। [NUH-2002]

7.4. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠমান, গরিষ্ঠমান ও সন্ধি বিন্দু নির্ণয় কর। [BSc(Pass)-2006]

7.5. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ ফাংশনটির চরম বিন্দুগুলি নির্ণয় কর এবং চরমমানগুলিও বাহির কর। [NUH(NM)-2008]

Chapter-8

8.1. মান নির্ণয় কর $\lim_{\theta \to \pi/4} \frac{\sqrt{2} - \cos\theta - \sin\theta}{(4\theta - \pi)^2}$.

[NUH-1996, RUH-1982]

8.2. মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$. [DUH-1975]

8.3. দেখাও যে (Show that) : $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^{1/x} - e}{x} = -\frac{1}{2}e$

[RUH-1983, 1992,]

8.4. মান নির্ণয় কর $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$. [NUH(NM)-09, RUH-78]

8.5. মান নির্ণয় কর (Find the value) : $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$

[BSc(Pass)-08, RUH-80, 83, RUS-89, JUH-91]

8.6. দেখাও যে $\lim_{x \to 0} \cot x \ln\frac{1 - x}{1 + x} = -2$

[NUH-03, 08, DUHT-89, RUH-87, CUH-77]

8.7. মান নির্ণয় কর (Find the values) : $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{1 - \ln x}$ [NUH-2004]

8.8. মান নির্ণয় কর (Find the values) : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x \sin x}$.

[NUH(NM)-2007]

8.9. মান নির্ণয় কর (Find the values) : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \sin^{-1} x}{x^2}$.

[BSc(Pass)-2008]

8.10. মান নির্ণয় কর (Find the values) : $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right]$

[NUH(NM)-2005]

Chapter-9(A)

9.A.1. $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্ররেখার $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9.A.2. কার্ভ $y = x^2 + 2x + 1$ এর (1, 4) বিন্দুতে স্পর্শক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [NUH(NM)-2003]

Part-C (গ-বিভাগ)

Chapter-1(A)

1.A.1. ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range.]

(i) $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$ [NUH-2008]

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [4, \infty)$

(ii) $f(x) = \dfrac{x}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ **[NUH-2004]**

উত্তর ঃ $D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \cdots\right\}$, $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

1.A.2. ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর [Find domain and range] :

(i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ উত্তর ঃ $D_f = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$, $R_f = [0, \infty)$ **[NUH-2002]**

(ii) $f(x) = \cos^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)$ উত্তর ঃ $D_f = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$, $R_f = \mathbb{R}$ **[NUH-2002]**

Chapter–1(C)

1.C.1. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির প্রত্যেকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর (Draw each of the following functions) :

(i) $f(x) = \sqrt{x}$ **[NUH-02, 04]**

(ii) $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ **[NUH-02, 04]**

1.C.2. $f(x) = x \sin 1/x$ ফাংশনটির ডোমেন রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর। **[NUH-1996, 2002, NUH(NM)-2006]**

Chapter–2(B)

2.B.1. ফাংশন f নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত হইল

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{যখন } x \le 0 \\ 5x - 4 & \text{যখন } 0 < x \le 1 \\ 4x^2 - 3x & \text{যখন } 1 < x < 2 \\ 3x + 4 & \text{যখন } x \ge 2 \end{cases}$$

$x = 0, 1, 2$ বিন্দুতে ফাংশন f এর অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর। **[NUH-10(Old), DUH-90, RUH-87]**

2.B.2. একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হইল

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(b^2 - a^2) & \text{যখন } 0 \le x \le a \\ \frac{b^2}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^3}{3x} & \text{যখন } a < x \le b \\ \frac{b^3 - a^3}{3x} & \text{যখন } x > b \end{cases}$$

তবে দেখাও যে x এর সকল যোগবোধক মানের জন্য $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন। **[RUH-1988]**

Chapter–2(C)

2.C.1. প্রমাণ কর যে প্রত্যেক অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু ইহার বিপরীত প্রক্রিয়া সর্বদা সত্য নয়। [Prove that every differential functions is continuous but the converse is not necessarly true.]

2.C.2. $x = 0$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে নিম্নলিখিত ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণ যোগ্যতা আলোচনা কর [Discuss the continuity and differentiability at $x = \frac{\pi}{2}$.]

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 + \sin x & \text{যখন } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + (x - (\pi/2))^2 & \text{যখন } x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

[NUH-02, 04, 2010, BSc(Pass)-08, DUH-84, CUH-84, 89, 95]

2.C.3. যদি $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$ হয় তবে $x = -3$ ও $x = 1$ বিন্দুতে ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা ও অন্তরীকরণ যোগ্যতা আলোচনা কর। [If $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$ then discuss the continuity and differentiability of the function at $x = -3$ and $x = 1$.] **[NUH-2008]**

2.C.4. একটি ফাংশন $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হইল

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{যখন } x \le 0 \\ x & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{যখন } 1 \le x \le 2 \\ 2x - x^2 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$$

তবে দেখাও যে $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন কিন্তু এই বিন্দুগুলিতে $f'(x)$ বিদ্যমান নয়। **[NUH(NM)-05, DUH-82, CUH-82]**

Chapter–3(B)

3.B.1. $\tan^{-1}x$ এর সাপেক্ষে (i) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}\right)$ এবং

(ii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x}\right)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

[NUH-1996, NUH(NM)-2004, BSc(Pass)-2007, RUH-1981, 1987, 1990, 1995, KUET-1992]

3.B.2. একটি গোলাকৃতি বেলুনের আয়তন প্রতি সেকেন্ডে 10 সিসি করিয়া বৃদ্ধি পায়। যে মুহূর্তে এর ব্যাসার্ধ 16 সেমিঃ, সেই মুহূর্তে এর বক্র পৃষ্ঠের পরিবর্তনের হার নির্ণয় কর। [The volume of a spherical balloon is increasing at the rate of 10cc/sec. Find the rate of change of its surface at the instant when its radius is 16 cm.] **[NUH-2008]**

Chapter–4(A)

4.A.1. যদি $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$ হয় তবে y_n নির্ণয় কর।

[DUH–1969, CUH–1986, RUH–1969]

4.A.2. যদি $y = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$ হয় তবে দেখাও যে

$$y_n = \frac{(-1)^n\, n!}{2(1+x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n\, n!}{2} \sin^{n+1}\theta \cos(n+1)\theta + \frac{(-1)^n\, n!}{2} \sin^{n+1}\theta \sin(n+1)\theta, \text{ যেখানে } \theta = \cot^{-1}x$$

Chapter–4(B)

4.B.1. লিবনীজ এর উপপাদ্য বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। [State and prove Leibnitz's theorem.] **[NUH–02, 05, 07, 08, 09, NUH(NM)–02, 05, 08, B.Sc(Pass)–06]**

4.B.2. যদি $y = \sin\{a\, ln(x + b)\}$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(x+b)^2 y_2 + (x+b)y_1 + a^2 y = 0$

(ii) $(x+b)^2 y_{n+2} + (2n+1)(x+b)y_{n+1} + (n^2 + a^2)y_n = 0$

[NUH(NM)–2006, BSc(Pass)–2008, CUH–1980, 1985]

4.B.3. যদি $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ হয় তবে দেখাও যে

$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m)y_n = 0$

[DUH–1984, 1990, 2005, DUHT–1987]

4.B.4. যদি $y = e^{a \sin^{-1}x} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2 y = 0$

(ii) $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0$

(iii) $(n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2 + a^2)a_n$.

[NUH–1996, DUH–1978, RUH–1985]

4.B.5. যদি $y = e^{a \sin^{-1}x}$ হয় তবে $(y_n)_0$ নির্ণয় কর।

[NUH–2003, DUH–1978, 2002, RUH–1985, JUH–1985]

4.B.6. যদি $y = (\sinh^{-1}x)^2$ হয় তবে দেখাও যে $(1 + x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2 y_n = 0$. ইহা হইতে $(y_n)_0$ নির্ণয় কর।

[NUH–2010, DUH–1976, 1988]

4.B.7. যদি $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^m$ হয় তবে দেখাও যে

$(1 + x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$ **[NUH–02, 08]**

4.B.8. প্রমাণ কর যে, $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} e^{1/x}) = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.

Chapter–5

5.1. রোলের উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। উহার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও। [State and prove Rolle's theorem. Also give its geometrical interpretation.] **[NUH–08, 10, NUH(NM)–02, 09, BSc(Pass)–07]**

5.2. গড়মান উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর। উহার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও। [State and prove mean value theorem. Also give its geometrical interpretation.] **[NUH–05, 07, 08, 09, NUH(NM)–02, 04, 06, 08, BSc(Pass)–06, 08]**

5.3. গড়মান উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া প্রমাণ কর যে

$$\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} < \frac{ln(1+x)}{\sin^{-1}x} < 1 \text{ যখন } 0 < x < 1 \quad \textbf{[NUH–06, DUH–90]}$$

Chapter–6

6.1. ল্যাগ্রাঞ্জ আকারের অবশেষসহ টেলর উপপাদ্যের বর্ণনা ও প্রমাণ দাও। [State and prove Taylor's theorem with Lagrange's form of remainder.] **[NUH–03, 04, 07, 10, NUH(NM)–02, B.Sc(Pass)–07]**

6.2. $x = 0$ প্রতিবেশে $ln(1 + x)$ এর জন্য টেলর ধারা নির্ণয় কর।
অথবা $ln(1 + x)$ এর জন্য ম্যাকলরিন ধারা নির্ণয় কর।
অথবা প্রমাণ কর $ln(1 + x)$ এর ম্যাকলরিন ধারা $-1 < x \le 1$ ব্যবধিতে অভিসারী (convergent). **[NUH–2002]**

6.3. $\sin x$ এর জন্য $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ক্রম উচ্চ শক্তি ধারায় ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ টেলর সসীম ধারা নির্ণয় কর। **[NUH–2003, NUH(NM)–2006]**

6.4. $e^x \cos x$ এর জন্য $x = 0$ প্রতিবেশে ল্যাগ্রাঞ্জের অবশেষসহ সসীম টেলর ধারা নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–2007]**

উত্তর ঃ $1 + x - \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} 2^{(n-1)/2} \cos\left\{\frac{(n-1)\pi}{4}\right\} + \frac{x^n}{n!} 2^{n/2} e^{\theta x} \cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{4}\right), 0 < \theta < 1$

Chapter–7

7.1. গরিষ্ঠমান ও লঘিষ্ঠমান বিদ্যমান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত নির্ণয় কর। (Find the necessary conditions for the existence of maximam value and minimum value) **[NUH–02, 09, NUH(NM)–06, 07, BSc(Pass)–08]**

7.2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ ফাংশনটি যে সকল ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায় এবং হ্রাস পায়, সেই সকল ব্যবধি নির্ণয় কর। ফাংশনটির লঘিষ্ঠমান ও গরিষ্ঠমান আলোচনা কর। **[NUH(NM)–2005]**

7.3. দেখাও যে, $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$ ফাংশনটির মান $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে বৃহত্তম, $x = 1$ বিন্দুতে ক্ষুদ্রতম এবং $x = \frac{3}{4}$ বিন্দুটি $f(x)$ ফাংশনের ইনফ্লেকশন বিন্দু। **[NUH(NM)–2003, 2009, 2010]**

7.4. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ এর বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম এবং বক্রতার বিন্দুসমূহ নির্ণয় কর। দেখাও যে বক্রতার বিন্দু (Inflexion point) বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বিন্দুর মাঝখানে অবস্থিত। **[NUH(NM)–2006]**

7.5. জনৈক কৃষক 800 ফুট দীর্ঘ (লম্বা) তারের বেড়ার সাহায্যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র ঘিরিয়া ফেলিতে পারে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর। **[NUH–2005, 2009]**

Chapter–8

8.1. অনির্ণেয় $\frac{0}{0}$ এবং অনির্ণেয় $\frac{\infty}{\infty}$ আকারের জন্য ল'পিটালের সূত্র বর্ণনসহ প্রমাণ কর। [State and prove L'Hopital formula for indeterminate $\frac{0}{0}$ form and $\frac{\infty}{\infty}$ form.]

[NUH–02, 03, 04, 06, 09, NUH(NM)–05, B.Sc(Pass)–07]

Chapter–9(A)

9.A.1. যদি $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$ ···· (1) বক্র রেখাকে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ···· (2) সরলরেখাটি স্পর্শ করে তবে দেখাও যে $(a\cos\alpha)^{m/(m-1)} + (b\sin\alpha)^{m/(m-1)} = p^{m/(m-1)}$ **[NUH(NM)–02, DU–75, 85, CU–86]**

9.A.2. দেখাও যে, $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুর স্পর্শকের যে অংশটুকু অক্ষদ্বয় দ্বারা খণ্ডিত, উহার দৈর্ঘ্য ধ্রুবক। স্পর্শক ও অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[NUH–2006]**

———×———

Chapter–10
ইন্টিগ্রেশন
INTEGRATION

প্রতি ডেরিভেটিভ (Anti-derivative)

10.1. গ্রীক বিজ্ঞানী আর্কিমিডিস (287 B. C – 212 B. C) এর সময় হইতে ইন্টিগ্রেশন তথা যোজিত ফলের মৌলিক ধারণা পাওয়া যায়। কতগুলি বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ স্থানকে অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করে ইহাদের সমষ্টি নির্ণয়ের মাধ্যমে উক্ত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের প্রচেষ্টা হইতে ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের সৃষ্টি।

সপ্তদশ শতাব্দীতে ব্রিটিশ বিজ্ঞানী আইজ্যাক নিউটন (Isaac Newton (1642 – 1727) এবং জার্মান গণিতবিদ গটফ্রেড উইলিয়াম লিবনীজ (Gotlfriecd William Leibnitz) (1646 – 1716) পৃথক পৃথক ভাবে প্রমাণ করেন যে, অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়ায় কোন সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

ইন্টিগ্রেশন প্রক্রিয়া দুইটি পৃথক পদ্ধতিতে বিবেচনা করা হয়,

যথা (i) প্রতি ডেরিভেটিভ (Anti-derivative) প্রক্রিয়া ও

(ii) সমষ্টিকরণের সীমারূপে (As the limit of sum).

10.2. সংজ্ঞা (Definition) : ডিফারেনসিয়েশন (Differentiation) এর বিপরীত প্রক্রিয়া ইন্টিগ্রেশন (Integration). $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ হইলে $F(x)$ কে $f(x)$ এর প্রতি ডেরিভেটিভ (Anti-derivative) বলা হয়। এইক্ষেত্রে $f(x)$ এর ইন্টিগ্রাল হইবে $F(x)$ অর্থাৎ $\int f(x)dx = F(x)$.

10.3. '0' এর ইন্টিগ্রেশন (Integration of '0') :

c একটি ধ্রুবক হইলে $\frac{d}{dx}(c) = 0 \quad \therefore \int 0\,dx = c$

অর্থাৎ '0' এর ইন্টিগ্রেশন c (ধ্রুবক)

10.4. ইন্টিগ্রেশন ধ্রুবক (Integration Constant) ঃ

$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ হইলে $\int f(x)\,dx = F(x)$

এখন, $\frac{d}{dx}\{F(x) + c\} = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}(c) = f(x) + 0 = f(x)$

$\therefore \int f(x)\,dx = F(x) + c$

অর্থাৎ $F(x)$ যদি $f(x)$ এর ইন্টিগ্রাল হয় তাহা হইলে যে কোন ধ্রুবক c এর জন্য $F(x) + c$ ও $f(x)$ এর ইন্টিগ্রাল। সুতরাং কোন ফাংশন $f(x)$ এর সাধারণ ইন্টিগ্রাল নির্ণয় করিতে $f(x)$ এর প্রতি-ডেরিভেটিভ (Anti-derivative) $F(x)$ এর সঙ্গে একটি ধ্রুবক c যোগ করিতে হয়। ইহাকে ইন্টিগ্রেশন ধ্রুবক বলে।

10.5. প্রয়োজনীয় ইন্টিগ্রেশন ফর্মূলা (Important formulas for integration) :

অন্তরীকরণ ফর্মূলা	ইন্টিগ্রেশন ফর্মূলা
1(i) $\frac{d}{dx}(x+c)=1$	(ii) $\int dx = x+c$
2(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right)=x^n,\ n\neq -1$	(ii) $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$
3(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin mx}{m}+c\right)=\cos mx$	(ii) $\int \cos mx\,dx=\frac{\sin mx}{m}+c$
(iii) $\frac{d}{dx}(\sin x+c)=\cos x$	(iv) $\int \cos x\,dx=\sin x+c$
4(i) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos mx}{m}+c\right)=\sin mx$	(ii) $\int \sin mx\,dx=-\frac{\cos mx}{m}+c$
(iii) $\frac{d}{dx}(-\cos x+c)=\sin x$	(iv) $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$
5(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan mx}{m}+c\right)=\sec^2 mx$	(ii) $\int \sec^2 mx\,dx=\frac{\tan mx}{m}+c$
(iii) $\frac{d}{dx}(\tan x+c)=\sec^2 x$	(iv) $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+c$
6(i) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cot mx}{m}+c\right)=\operatorname{cosec}^2 mx$	(ii) $\int \operatorname{cosec}^2 ms\,dx=-\frac{\cot mx}{m}+c$
(iii) $\frac{d}{dx}(-\cot x+c)=\operatorname{cosec}^2 x$	(iv) $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+c$
7(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec mx}{m}+c\right)=\sec mx\tan mx$	(ii) $\int \sec mx\tan mx\,dx=\frac{\sec mx}{m}+c$
(iii) $\frac{d}{dx}(\sec x+c)=\sec x\tan x$	(iv) $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+c$
8(i) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\operatorname{cosec} mx}{m}+c\right)=\operatorname{cosec} mx\cot mx$	
(ii) $\int \operatorname{cosec} mx\cot mx\,dx=-\frac{\operatorname{cosec} mx}{m}+c$	
(iii) $\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x+c)=\operatorname{cosec} x\cot x$	
(iv) $\int \operatorname{cosec} x\cot x\,dx=-\operatorname{cosec} x+c$	

9(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{mx}}{m}+c\right)=e^{mx}$	(ii) $\int e^{mx}\,dx=\frac{e^{mx}}{m}+c$
(iii) $\frac{d}{dx}(e^x+c)=e^x$	(iv) $\int e^x\,dx=e^x+c$
10(i) $\frac{d}{dx}(\ln x+c)=\frac{1}{x}$	(ii) $\int \frac{1}{x}\,dx=\ln x+c$
11(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^{mx}}{m\ln a}\right)=a^{mx}$	(ii) $\int a^{mx}\,dx=\frac{a^{mx}}{m\ln a}+c$
(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)=a^x$	(iv) $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$
12(i) $\frac{d}{dx}\{\ln\sec x\}=\tan x$	(ii) $\int \tan x\,dx=\ln\sec x+c$
13(i) $\frac{d}{dx}\{\ln\sin x\}=\cot x$	(ii) $\int \cot x\,dx=\ln\sin x+c$
14(i) $\frac{d}{dx}\ln(\sec x+\tan x)=\sec x$	(ii) $\int \sec x\,dx=\ln(\sec x+\tan x)+c$
15(i) $\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{cosec} x-\cot x)=\operatorname{cosec} x$	(ii) $\int \operatorname{cosec} x\,dx=\ln(\operatorname{cosec} x-\cot x)+c$
16(i) $\frac{d}{dx}\{\ln f(x)\}=\frac{f'(x)}{f(x)}$	(ii) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln f(x)+c$

✪ আরো কতকগুলি প্রয়োজনীয় ইন্টিগ্রেশন ফর্মূলা (অন্তরীকরণ ফর্মূলার সাথে সম্পর্ক ব্যতীত) দেওয়া হইল, যাহা পরবর্তী অধ্যায়ে প্রমাণ করা হইয়াছে।

17. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

19. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c_1$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+c_1$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

23. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} ln\,(x + \sqrt{x^2+a^2}) + c_1$

24. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$= \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + c_1$

25. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

26. $\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\,dx\right\}dx$

27. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + c$

$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(bx - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + c$

28. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + c$

$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(bx - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + c$

29. $\int e^x\left\{f(x) + f'(x)\right\}dx = e^x f(x) + c,\ f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$

উদাহরণ-1. $\int\left(5x^3 + \frac{6}{x^3}\right)dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH-1960]**

সমাধান ঃ $\int\left(5x^3 + \frac{6}{x^3}\right)dx = 5\int x^3dx + 6\int x^{-3}dx$

$= 5.\frac{x^4}{4} + 6.\frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{x^2} + c$

উদাহরণ-2. $\int\frac{1-x^3}{1-x}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int\frac{1-x^3}{1-x}dx = \int\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}dx$

$= \int(1+x+x^2)dx = \int dx + \int x\,dx + \int x^2\,dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c.$

উদাহরণ-3. $\int\frac{\tan x}{\cot x}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int\frac{\tan x}{\cot x}dx = \int\tan^2x\,dx = \int(\sec^2x - 1)dx$

$= \int\sec^2x\,dx - \int dx = \tan x - x + c.$

উদাহরণ-4. $\int\frac{e^{5\,lnx} - e^{4\,lnx}}{e^{3\,lnx} - e^{2\,lnx}}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int\frac{e^{5\,lnx} - e^{4\,lnx}}{e^{3\,lnx} - e^{2\,lnx}}dx = \int\frac{e^{lnx^5} - e^{lnx^4}}{e^{lnx^3} - e^{lnx^2}}dx$

$= \int\frac{x^5 - x^4}{x^3 - x^2}dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$

উদাহরণ-5. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int\frac{dx}{1+\sin x} = \int\frac{1-\sin x}{\cos^2x}dx = \int(\sec^2x - \tan x\sec x)dx$

$= \int\sec^2x\,dx - \int\tan x\sec x\,dx = \tan x - \sec x + c.$

উদাহরণ-6. $\int\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2x + \cos^2x + 2\sin x\cos x}}dx$

$= \int\frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int dx = x + c.$

উদাহরণ-7. $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$

$= \frac{1}{2}\int\sin dx = -\frac{1}{2}\cos x + c.$

উদাহরণ-8. $\int\frac{8^{1+x} + 4^{1-x}}{2^x}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int\frac{2^{3+3x} + 2^{2-2x}}{2^x}dx = \int 2^{3+2x}dx + \int 2^{2-3x}dx$

$= 8\int 2^{2x}dx + 4\int 2^{-3x}dx = 8.\frac{2^{2x}}{2\,ln2} + 4.\frac{2^{-3x}}{-3\,ln2} + c$

$= \frac{4}{ln2}\left[2^{2x} - \frac{1}{3}2^{-3x}\right] + c.$

উদাহরণ-9. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$ এর মান নির্ণয় কর।

•সমাধান ঃ $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x)dx$

$= -\cot x - \tan x + c.$

উদাহরণ-10. $\int \sqrt{(1+\sin x)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \sqrt{\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}\,dx$

$= \int \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \int\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)dx$

$= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c = 2\left[\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right] + c.$

উদাহরণ-11. $\int \sin x^0\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \sin\frac{\pi x}{180}\,dx$

$= -\frac{\cos\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi}{180}} + c$

$= -\frac{180}{\pi}\cos x^0 + c.$

$180^0 = \pi$ রেডিয়ান

$\therefore x^0 = \frac{\pi x}{180}$ রেডিয়ান

উদাহরণ-12. $\int \sin^3 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{1}{4}\int 4\sin^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x)dx$

$= \frac{1}{4}\left[-3\cos x + \frac{\cos 3x}{3}\right] + c = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + c.$

উদাহরণ-13. $\int \cos^4 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{1}{4}\int (2\cos^2 x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx$

$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$

$= \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8}\int 2\cos^2 2x\,dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx$

$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 4x}{4} + c = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + c$

উদাহরণ-14. $\int \sin^2 x \cos 2x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \sin^2 x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\sin^2 x.\cos 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos^2 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{4}\int 2\cos^2 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{4}\int (1+\cos 4x)dx$

$= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{\sin 4x}{16} + c.$

উদাহরণ-15. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\frac{1}{2}\int \cos x.\,2\cos 3x.\cos 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \cos x(\cos x + \cos 5x)dx$

$= \frac{1}{4}\int 2\cos^2 x\,dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 5x\cos x\,dx$

$= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)dx + \frac{1}{4}\int (\cos 4x + \cos 6x)dx$

$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + c.$

উদাহরণ-16. $\int \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x}\,dx$

$= \int \frac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x)}{(\cos x + \sin x)}\,dx$

$= \int (1 - \cos x \sin x)dx = \int dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = x + \frac{1}{4}\cos 2x + c.$

উদাহরণ-17. $\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\,dx$

$= \int \frac{1 - 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

$= \int \sec^2 x\,dx - 2\int \tan x \sec x\,dx + \int \tan^2 x\,dx$

$= \tan x - 2\sec x + \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - 2\sec x + \tan x - x + c$

$= 2(\tan x - \sec x) - x + c.$

উদাহরণ-18. $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha} dx = \int \frac{(2\cos^2 x - 1) - (2\cos^2 \alpha - 1)}{\cos x - \cos \alpha} dx$

$= 2\int \frac{\cos^2 x - \cos^2 \alpha}{\cos x - \cos \alpha} dx = 2\int (\cos x + \cos \alpha) dx$

$= 2\int \cos x\, dx + 2\cos \alpha \int dx = 2\sin x + 2x\cos \alpha + c.$

উদাহরণ-19. $\int \frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$= \int \frac{(\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^4 x - \cos^4 x)}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$= \int \frac{\{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x\}(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$= -\int \frac{(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)(\cos 2x)}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x} dx = -\int \cos 2x\, dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + c.$

উদাহরণ-20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x+1})^2} dx$

$= \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x - x - 1} dx = \int \sqrt{x+1}\, dx - \int \sqrt{x}\, dx$

$= \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} + c.$

উদাহরণ-21. $\int \frac{dx}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$

$= \frac{1}{\sin(b-a)} \int \frac{\sin\{(x-a) - (x-b)\}}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx$

$= \frac{1}{\sin(b-a)} \int \frac{\sin(x-a)\cos(x-b) - \cos(x-a)\sin(x-b)}{\cos(x-a)\cos(x-b)} dx$

$= \frac{1}{\sin(b-a)} \int [\tan(x-a) - \tan(x-b)] dx$

$= \frac{1}{\sin(b-a)} [\ln \sec(x-a) - \ln \sec(x-b)] + c.$

উদাহরণ-22. $\int \cos^4 x \sin 3x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-1987]**

সমাধান ঃ $\int \cos^4 x \sin 3x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int (2\cos^2 x)^2 \sin 3x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 + \cos 2x)^2 \sin 3x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int (\sin 3x + 2\sin 3x \cos 2x + \cos^2 2x \sin 3x) dx$

$= \frac{1}{4}\int \{\sin 3x + \sin 5x + \sin x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\sin 3x\} dx$

$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}\sin 3x + \sin 5x + \sin x + \frac{1}{4}.\, 2\cos 4x.\, \sin 3x\right) dx$

$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}\sin 3x + \sin 5x + \sin x + \frac{1}{4}\sin 7x - \frac{1}{4}\sin x\right) dx$

$= \frac{3}{8}\int \sin 3x\, dx + \frac{1}{4}\int \sin 5x\, dx + \frac{3}{16}\int \sin x\, dx + \frac{1}{16}\int \sin 7x\, dx$

$= -\frac{1}{8}\cos 3x - \frac{1}{20}\cos 5x - \frac{3}{16}\cos x - \frac{1}{112}\cos 7x + c.$

উদাহরণ-23. $\int \frac{\sin 3x}{\cos 5x.\, \cos 2x} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\sin 3x}{\cos 5x.\, \cos 2x} dx = \int \frac{\sin(5x - 2x) dx}{\cos 5x.\, \cos 2x}$

$= \int \frac{\sin 5x.\, \cos 2x - \cos 5x.\, \sin 2x}{\cos 5x.\, \cos 2x} dx$

$= \int (\tan 5x - \tan 2x) dx$

$= \frac{1}{5}\ln|\sec 5x| - \frac{1}{2}\ln|\sec 2x| + c.$

উদাহরণ-24. $\int \frac{2 - \sin 2x}{1 - \cos 2x} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH(NM)-2003, DUH-1982]

সমাধান ঃ $\int \frac{2 - \sin 2x}{1 - \cos 2x} dx = \int \frac{2 - 2\sin x \cos x}{2\sin^2 x} dx$

$= \int \text{cosec}^2 x\, dx - \int \cot x\, dx = -\cot x - \ln|\sin x| + c.$

উদাহরণ-25. $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH(NM)-2010, DUH-1981, 1986, 1992, RUH-1988]

সমাধান : $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$

$= \int \frac{dx}{r(\cos x\cos\theta + \sin x\sin\theta)}$ ধরি $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$

$= \frac{1}{r}\int \frac{dx}{\cos(x-\theta)}$ $\therefore r = \sqrt{a^2+b^2}$

$= \frac{1}{r}\int \sec(x-\theta)dx$ এবং $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$= \frac{1}{r} ln\{\sec(x-\theta) + \tan(x-\theta)\} + c$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} ln\left|\left\{\sec\left(x - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + \tan\left(x - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\right\}\right| + c.$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

10.1. প্রতিডেরিভেটিভ কি? (What is antiderivatives?) **[NUH-2010]**

Ans : একটি ফাংশন F(x) কে কোন প্রদত্ত ব্যবধিতে বর্ণিত ফাংশন f(x) এর প্রতিডেরিভেটিভ বলা হইবে যদি ঐ ব্যবধির সকল x এর জন্য $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$ হয়।

10.2. $f(x) = x^3$ এর দুইটি প্রতিডেরিভেটিভ লিখ। (Write two antederivatives of $f(x) = x^3$.)

Ans : $f(x) = x^3$ এর দুইটি প্রতিডোরিভেটিভ $\frac{1}{4}x^4$ ও $\frac{1}{4}x^4 + c$.

10.3. প্রতিডেরিভেটিভ নির্ণয় করার পদ্ধতিকে কি বলে? (What is called the process of finding antiderivatives?)

Ans : প্রতিডোরিভেটিভ নির্ণয় করার পদ্ধতিকে ইন্টিগ্রেশন বলে।

10.4. ইন্টিগ্রেশনের ধ্রুবক কাকে বলে? (What is called constant of integration?) **[NUH-2010] [NUH(NM)-2010]**

Ans : যদি f(x) এর প্রতিডেরিভেটিভ বা ইন্টিগ্রাল F(x) হয় তবে যে কোন ধ্রুবক c এর জন্য F(x) + c ও f(x) এর প্রতিডেরিভেটিভ বা ইন্টিগ্রাল হইবে। কাজেই সাধারণ প্রতিডেরিভেটিভ বা ইন্টিগ্রালের জন্য $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ লেখা হয়। c কে ইন্টিগ্রেশনের ধ্রুবক বলা হয়।

10.5. শূন্য ফাংশনের প্রতিডেরিভেটিভ বা ইন্টিগ্রাল কত? (What is the antiderivative or integral of zero function?)

Ans : শূন্য ফাংশনের প্রতিডেরিভেটিভ বা ইন্ট্রিগ্রাল ধ্রুবক ফাংশন অর্থাৎ $\int 0\,dx = c$

10.6. $\int x^n\,dx$ এর সূত্র লিখ। (Write the formula of $\int x^n\,dx$)

Ans : $\int x^n\,dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ যখন } n \neq -1 \\ ln|x| + c \text{ যখন } n = -1 \end{cases}$

10.7. $\int a^x\,dx$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{ln\,a} + c$

10.8. $\int \tan x\,dx$ ও $\int \cot x\,dx$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int \tan x\,dx = ln|\sec x| + c$ এবং $\int \cot x\,dx = ln|\sin x| + c$

10.9. $\int \sec^2 x\,dx$ ও $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$ এবং $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

10.10. $\int \sec x\,dx$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int \sec x\,dx = ln|\sec x + \tan x| + c$ বা $ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$

10.11. $\int \operatorname{cosec} x\,dx$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int \operatorname{cosec} x\,dx = ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$ বা $ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

0.12. $\int \sec x\tan x\,dx$ ও $\int \operatorname{cosec} x\cot x\,dx$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + c$

এবং $\int \operatorname{cosec} x\cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$

0.13. $\int \frac{dx}{1+\sin x} = ?$ **[NUH(NM)-2010]**

Ans : $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$= \int \sec^2 x\,dx - \int \tan x\sec x\,dx$

$= \tan x - \sec x + c.$

10.14. $\int \tan^2 x\, dx = ?$

Ans : $\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \tan x - x + c.$

10.15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = ?$

Ans : $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$

$= \int \sec^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

$= \tan x - \cot x + c.$

EXERCISE–10

ইন্টিগ্রালসমূহ নির্ণয় কর ঃ

1. $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$
2. $\int (x + 2)(x + 3)^2 dx$
3. $\int \frac{(1 - 2x^2)^2}{x \sqrt[3]{x}}\, dx$
4. $\int \cot^2 x\, dx$
5. $\int \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x}\, dx$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$ **[RUH–1980. 1982]**
7. $\int \frac{2 \sec x + 3 \cot^2 x + 4 \cos^2 x}{\cos x}\, dx$
8. $\int \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx$
9. $\int (e^{a \ln x} + e^{x \ln a})\, dx$
10. $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$
11. $\int \sqrt{1 + \sin 2x}\, dx$
12. $\int \frac{\cos x + \sec x}{\cot x}\, dx$
13. $\int \frac{a^x + a^{2x} + a^{3x}}{a^{4x}}\, dx$
14. $\int \frac{a \sin^3 x + b \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$
15. $\int \cos x^0\, dx$
16. $\int \cos^3 x\, dx$
17. $\int \sin^4 x\, dx$
18. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$
19. $\int \cos^2 x \sin 2x\, dx$
20. $\int \sin px \cos qx\, dx,\ p > q$

21. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$
22. $\int \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}\, dx$
23. $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$
24. $\int \frac{\sin 3x}{\sin x}\, dx$
25. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}\, dx$
26. $\int \frac{\sec 2x - 1}{\sec 2x + 1}\, dx$
27. $\int \frac{\cos 5x + \cos 4x}{1 - 2 \cos 3x}\, dx$
28. $\int \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}}$
30. $\int \frac{dx}{\sin(x - a) \sin(x - b)}$
31. $\int \frac{dx}{\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x}$
32. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$
33. $\int \frac{1 + \sin 2x}{1 + \cos 2x}\, dx$ **[CUH–1988]**
34. $\int \frac{\sin 2x}{\sin 5x . \sin 3x}\, dx$ **[DUH–1992]**
35. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$ **[RUH–1982]**

ANSWER–10

1. $2\sqrt{x}\left[\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{3}x - 1\right] + c$
2. $\frac{1}{12}x(3x^3 + 32x^2 + 126x + 216) + c$
3. $-3x^{-1/3} - \frac{12}{5}x^{5/3} + \frac{12}{11}x^{-11/3} + c$
4. $-\cot x - x + c$
5. $\tan x - x + c$
6. $\tan x - \cot x + c$
7. $2 \tan x - 3 \operatorname{cosec} x + 4 \sin x + c$
8. $-\sqrt{2} \cos x + c$
9. $\frac{x^{a+1}}{a + 1} + \frac{a^x}{\ln|a|} + c$
10. $\tan x + \sec x + c$
11. $\sin x - \cos x + c$
12. $\sec x - \cos x + c$
13. $-\frac{1}{\ln|a|}\left[\frac{a^{-3x}}{3} + \frac{a^{-2x}}{2} + \frac{a^{-x}}{1}\right] + c$

14. $a \sec x - b \operatorname{cosec} x + c$

15. $\frac{180}{\pi} \sin x^0 + c$

16. $\frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x + c$

17. $\frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3x}{8} + c$

18. $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c$

19. $-\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + c$

20. $-\frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)} + c$

21. $-\frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x + c$

22. $x + 2 \sin x + c$

23. $\tan x - \cot x + c$

24. $x + \sin 2x + c$

25. $x - \sin x + c$

26. $\tan x - x + c$

27. $-\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + c$

28. $\tan x - \cot x - 3x + c$

29. $\frac{2}{3}[x^{3/2} - (x-1)^{3/2}] + c$

30. $\frac{1}{\sin(b-a)} \ln \left|\frac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + c$

31. $\ln |\sin x| + c$

32. $\sqrt{2} \ln \left|\sec \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2}\right| + c$

33. $\frac{1}{2} \tan x + \ln |\sec x| + c$

34. $\frac{1}{3} \ln |\sin 3x| - \frac{1}{5} \ln |\sin 5x| + c$

35. $\frac{1}{2} \tan 2x - \frac{1}{2} \sec 2x + c.$



Chapter–11
প্রতিস্থাপন পদ্ধতি
METHOD OF SUBSTITUTION

11.1. সংজ্ঞা (Definition) : চলরাশি পরিবর্তনের মাধ্যমে অনুরূপ আকারের জটিল ইন্টিগ্রাল ফাংশনকে জ্ঞাত ইন্টিগ্রালে প্রকাশ করার জন্য যে বিশেষ কৌশল প্রয়োগ করা হয় তাহাকে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি বলা হয়।

মনে করি $z = f(x)$ $\quad \therefore \frac{dz}{dx} = f'(x)$

x এর সাপেক্ষে ইন্টিগ্রেশন করে পাই

$$\int \frac{dz}{dx} dx = \int f'(x)dx \text{ বা } z = \int f'(x)dx \text{ বা } dz = f'(x)dx$$

সুতরাং প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে $f(x) = z$ ধরিলে $dz = f'(x)dx$ হইবে।

11.2. চলক এর পরিবর্তন (Change of Variable) ঃ

$$\frac{d}{dx}[F\{g(x)\}] = \frac{d}{dg(x)} \cdot [F(g(x))] \frac{d}{dx}\{g(x)\} = F'\{g(x)\}g'(x)$$

সুতরাং যে ফাংশনকে ইন্টিগ্রেশন করা হইবে উহাকে যদি $F'\{g(x)\}.\ g'(x)$ আকারে প্রকাশ করা যায়, তাহা হইলে সহজেই ইন্টিগ্রেশন করা যাইবে।

উদাহরণ–**1.** $\int (ax + b)^n dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int (ax + b)^n dx = \int z^n . \frac{1}{a} dz.$ ধরি $ax + b = z$

$= \frac{1}{a} \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1} + c = \frac{1}{a(n+1)} \cdot (ax + b)^{n+1} + c.$ $\quad \therefore a\,dx = dz$

বা $dx = \frac{1}{a} dz$

উদাহরণ–**2.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1988]**

সমাধান ঃ $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx = -\int \frac{1}{\sqrt{z}} dz$ ধরি $1 + \cos x = z$

$= -2\sqrt{z} + c = -2\sqrt{(1 + \cos x)} + c.$ $\quad \therefore -\sin x\,dx = dz$

বা $\sin x\,dx = -dz$

উদাহরণ–**3.** $\int e^{\tan^{-1}x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} dx$ ধরি $\tan^{-1}x = z$

$= \int e^z dz = e^z + c = e^{\tan^{-1}x} + c$ $\quad \therefore \frac{1}{1 + x^2} dx = dz$

উদাহরণ–4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH–1952, 1959, CUH–1982]

সমাধান ঃ $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\, dx = 2\int \cos z\, dz$ ধরি $\sqrt{x} = z$ $\therefore \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dz$

$= 2\sin z + c = 2\sin\sqrt{x} + c.$ বা $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2dz.$

উদাহরণ–5. $\int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x + d} dx$ এর মান নির্ণয় কর। [C. U. H. '89]

সমাধান ঃ $\int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x + d} dx$ ধরি $a\sin x + b\cos x + d = z$

$= \int \frac{dz}{z} = \ln z + c$ $\therefore (a\cos x - b\sin x)dx = dz$

$= \ln(a\sin x + b\cos x + d) + c.$

উদাহরণ–6. $\int \frac{(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = \int z^2\, dz$ ধরি $\sin^{-1}x = z$

$= \frac{z^3}{3} + c = \frac{1}{3}(\sin^{-1}x)^2 + c.$ $\therefore \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dz$

উদাহরণ–7. $\int \cos^3 x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \cos^3 x\, dx$ ধরি $\sin x = z$

$= \int (1 - \sin^2 x)\cos x\, dx$ $\therefore \cos x\, dx = dz$

$= \int (1 - z^2)dz = z - \frac{z^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$

উদাহরণ–8. $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$

$= \int \sin^4 x(1 - \sin^2 x)\cos x\, dx$ ধরি $\sin x = z$

$= \int z^4(1 - z^2)dz$ $\therefore \cos x\, dx = dz$

$= \int z^4\, dz - \int z^6\, dz$

$= \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + c$

$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + c.$

উদাহরণ–9. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx = \int \sqrt{z}\, dz$ ধরি $1 + \ln x = z$

$= \frac{2}{3} \cdot z^{3/2} + c = \frac{2}{3}(1 + \ln x)^{3/2} + c.$ $\therefore \frac{1}{x} dx = dz$

উদাহরণ–10. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–1993, DUH–1987, RUH–1987]

সমাধান ঃ $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx$ ধরি $xe^x = z$

$= \int \frac{1}{\cos^2 z} dz = \int \sec^2 z\, dz$ $\therefore (e^x + xe^x)dx = dz$

$= \tan z + c = \tan(xe^x) + c.$ বা $e^x(1+x)dx = dz$

উদাহরণ–11. $\int \frac{e^{\sec^{-1}x}}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{e^{\sec^{-1}x}}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ ধরি $\sec^{-1}x = z$

$= \int e^z\, dz = e^z + c = e^{\sec^{-1}x} + c.$ $\therefore \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = dz$

উদাহরণ–12. $\int \tan^3 2x \cdot \sec 2x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \tan^3 2x \cdot \sec 2x\, dx$ ধরি $\sec 2x = z$

$= \int (\sec^2 2x - 1)\tan 2x \cdot \sec 2x\, dx$ $\therefore \sec 2x \tan 2x\, dx = \frac{1}{2}dz$

$= \frac{1}{2}\int (z^2 - 1)dz = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z^3}{3} - z\right) + c = \frac{1}{6}\sec^3 2x - \frac{1}{2}\sec 2x + c$

উদাহরণ–13. $\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–2010]**

সমাধান ঃ $\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx$ ধরি $x + \cos x = z$

$\therefore (1 - \sin x)\, dx = dz$

$= \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln|x + \sin x| + c$

উদাহরণ–14. $\int \frac{\tan x}{\ln\cos x} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\tan x}{\ln\cos x} dx$ ধরি $\ln\cos x = z$

$= -\int \frac{1}{z} dz = -\ln|z| + c$ বা $-\frac{\sin x}{\cos x} dx = dz$

$= -\ln|\ln\cos x| + c.$ $\therefore \tan x\, dx = -dz$

উদাহরণ–15. $\int \frac{\sin 2x}{a\sin^2x + b\cos^2x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–1989]**

সমাধান ঃ ধরি $a\sin^2x + b\cos^2x = z$

$\therefore \{2a\sin x\cos x + 2b\cos x(-\sin x)\}dx = dz$

বা $(a\sin 2x - b\sin 2x)dx = dz$ বা $(a-b)\sin 2x\,dx = dz$

বা $\sin 2x\,dx = \frac{1}{a-b}\,dz$

$$\therefore \int \frac{\sin 2x}{a\sin^2x + b\cos^2x}\,dx = \frac{1}{a-b}\int \frac{1}{z}\,dz$$

$$= \frac{1}{a-b}\ln z + c = \frac{1}{a-b}\ln(a\sin^2x + b\cos^2x) + c.$$

উদাহরণ–16. $\int \frac{\tan x\sec^2x\,dx}{(a^2 + b^2\tan^2x)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\tan x.\sec^2x\,dx}{(a^2 + b^2\tan^2x)^2}$

ধরি $a^2 + b^2\tan^2x = z$

$\therefore 2b^2\tan x.\sec^2x\,dx = dz$

বা $\tan x.\sec^2x\,dx = \frac{1}{2b^2}\,dz$

$$\therefore \int \frac{\tan x\sec^2x\,dx}{(a^2 + b^2\tan^2x)^2} = \frac{1}{2b^2}\int \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1}{2b^2}\cdot\frac{1}{z} + c$$

$$= -\frac{1}{2b^2}\cdot\frac{1}{a^2 + b^2\tan^2x} + c.$$

উদাহরণ–17. $\int \frac{\sin 2x}{(a + b\cos x)^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1983]**

সমাধান ঃ $\int \frac{\sin 2x}{(a + b\cos x)^2}\,dx$ ধরি $a + b\cos x = z$

$= 2\int \frac{\sin x\cos x}{(a + b\cos x)^2}\,dx$ $\therefore -b\sin x\,dx = dz$

বা $\sin x\,dx = -\frac{1}{b}\,dz$

$= 2\int \frac{\frac{z-a}{b}}{z^2}\left(-\frac{1}{b}\,dz\right)$ এবং $\cos x = \frac{z-a}{b}$

$$= -\frac{2}{b^2}\int \frac{z-a}{z^2}\,dz$$

$$= -\frac{2}{b^2}\int\left(\frac{1}{z} - \frac{a}{z^2}\right)dz = -\frac{2}{b^2}\left(\ln z + \frac{a}{z}\right) + c$$

$$= \frac{2}{b^2}\left[\ln|a + b\cos x| + \frac{a}{a + b\cos x}\right] + c.$$

উদাহরণ–18. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos^7x}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–1980]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos^7x}}$

$= \int \frac{\sec^4x\,dx}{\sqrt{\tan x}}$ [$\cos^4x$ দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করে]

$= \int \frac{(1 + \tan^2x)\sec^2x}{\sqrt{\tan x}}\,dx$ ধরি $\tan x = z^2$

$= \int \frac{(1 + z^4)}{z}.2z\,dz$ $\therefore \sec^2x\,dx = 2z\,dz$

$= 2\left(z + \frac{z^5}{5}\right) + c$ $\therefore z = \tan^{1/2}x$

$= 2\left\{\tan^{1/2}x + \frac{1}{5}\tan^{5/2}x\right\} + c.$

নোট ঃ $\int \frac{dx}{\sin^mx\cos^nx}$ আকারের ইন্টিগ্রালে যদি $m + n$ পূর্ণসংখ্যা হয় তবে $\cos^{m+n}x$ দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করে $\tan x = z$ ধরে করতে হয়।

উদাহরণ–19. $\int \sec^8x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \sec^8x\,dx$

$= \int (\tan^2x + 1)^3\sec^2x\,dx$ ধরি $\tan x = z$

$= \int (z^2 + 1)^3dz$ $\therefore \sec^2x\,dx = dz$

$= \int (z^6 + 3z^4 + 3z^2 + 1)dz = \frac{1}{7}z^7 + \frac{3}{5}z^5 + z^3 + z + c$

$= \frac{1}{7}\tan^7x + \frac{3}{5}\tan^5x + \tan^3x + \tan x + c.$

উদাহরণ–20. $\int \frac{\sin^4x}{\cos^8x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\sin^4x}{\cos^8x}\,dx = \int \tan^4x.\sec^4x\,dx$

$= \int \tan^4x(1 + \tan^2x)\sec^2x\,dx$ ধরি $\tan x = z$

$= \int z^4(1 + z^2)dz = \int z^4\,dz + \int z^6\,dz$ $\therefore \sec^2x\,dx = dz$

$= \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 + c = \frac{1}{5}\tan^5x + \frac{1}{7}\tan^7x + c.$

উদাহরণ-21. $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)}\,dx$ ধরি $x-a=z$

$= \int \frac{\sin(a+z)}{\sin z}\,dz$ $\therefore x=a+z$

$dx=dz$

$= \int \frac{\sin a\cos z+\cos a\sin z}{\sin z}\,dz = \sin a\int \cot z\,dz + \cos a\int dz$

$= \sin a\, ln\,|\sin z| + \cos a.\, z + c$

$= (x-a)\cos a + \sin a\, ln\,|\sin(x-a)| + c.$

উদাহরণ-22. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}}$ ধরি $1+e^{-x}=z$

$= -\int \frac{dz}{z} = -\,lnz + c$ $\therefore e^{-x}\,dx = -\,dz$

$= -\,ln(1+e^{-x}) + c.$

উদাহরণ-23. $\int \frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+2}\,dx = \int \frac{(e^{3x}+2)-3}{e^{3x}+2}\,dx = \int dx - 3\int \frac{1.}{e^{3x}+2}\,dx$

$= x - 3\int \frac{e^{-3x}}{1+2e^{-3x}}\,dx$ ধরি $1+2e^{-3x}=z$

$= x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz$ $\therefore -6e^{-3x}\,dx = dz$

$= x + \frac{1}{2}\,ln|z| + c$ বা $e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{6}\,dz$

$= x + \frac{1}{2}\,ln|1+2e^{-3x}| + c.$

উদাহরণ-24. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ ধরি $x=\tan\theta$

$= \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}$ $\therefore dx = \sec^2\theta\,d\theta$

$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}\,d\theta = \int \cos\theta\,d\theta = \sin\theta + c = \frac{\tan\theta}{\sec\theta} + c$

$= \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} + c = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c.$

উদাহরণ-25. $\int \frac{dx}{x^2(a^2+x^2)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{x^2(a^2+x^2)}$ ধরি $x=a\tan\theta$

$= \int \frac{a\sec^2\theta\,d\theta}{a^2\tan^2\theta(a^2+a^2\tan^2\theta)}$ $\therefore dx = a\sec^2\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{a^3}\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\tan^2\theta.\sec^2\theta}$ $\therefore \tan\theta = \frac{x}{a}$

$= \frac{1}{a^3}\int \cot^2\theta\,d\theta$ $\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$= \frac{1}{a^3}\int (\operatorname{cosec}^2\theta - 1)\,d\theta = \frac{1}{a^3}\{-\cot\theta - \theta\} + c$

$= -\frac{1}{a^3}\cdot\frac{a}{x} - \frac{1}{a^3}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$

উদাহরণ-26. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx.$

সমাধান ঃ $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$ ধরি $x=a\cos 2\theta$

$\therefore dx = -2a\sin 2\theta\,d\theta$

$= \int \sqrt{\left(\frac{a+a\cos 2\theta}{a-a\cos 2\theta}\right)}\,(-2a\sin 2\theta)d\theta$

$= -2a\int \sqrt{\frac{2\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}}\,.\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$= -4a\int \cos^2\theta\,d\theta = -2a\int (1+\cos 2\theta)d\theta = -2a\,\theta - a\sin 2\theta + c$

$= -a\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-a^2\cos^2 2\theta} + c$ $\left[\because \cos 2\theta = \frac{x}{a}\right.$

$= -a\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2} + c.$ বা $\left.2\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$

উদাহরণ-27. $\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$

$= \int \sqrt{\frac{a\sin^2\theta}{a-a\sin^2\theta}}\,2a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ ধরি $x=a\sin^2\theta$

$= 2a\int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,.\,\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ $\therefore dx = 2a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$= a\int 2\sin^2\theta\,d\theta = a\int (1-\cos 2\theta)d\theta = a\theta - \frac{a}{2}\sin 2\theta + c$

$= a\theta - a \sin\theta \cos\theta + c$ | $\sin^2\theta = \frac{x}{a}$

$= a\theta - a \sin\theta \sqrt{1 - \sin^2\theta} + c$ | বা $\sin\theta = \sqrt{\frac{x}{a}}$

$= a \sin^{-1}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)} - a.\sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{\left(1 - \frac{x}{a}\right)} + c$ | $\therefore \theta = \sin^{-1}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)}$

$= a \sin^{-1}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)} - \sqrt{x(a-x)} + c.$

উদাহরণ-28. $\int \frac{dx}{x \ln x[\ln(\ln x)]}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{x \ln x [\ln(\ln x)]}$ ধরি $\ln(\ln x) = z$

$= \int \frac{dz}{z}$ $\therefore \frac{1}{x \ln x} dx = dz$

$= \ln|z| + c = \ln\{|\ln \ln x|\} + c.$

উদাহরণ-29. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)-04]**

সমাধান ঃ $\int \frac{\cos 2x\, dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

$= \int \frac{\cos 2x\, dx}{1 + \sin 2x}$ ধরি $1 + \sin 2x = z$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z} dz$ $\therefore \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} dz$

$= \frac{1}{2} \ln|z| + c = \frac{1}{2} \ln|1 + \sin 2x| + c.$

উদাহরণ-30. $\int \frac{dx}{\{(x+a)^2 - a^2\}^{3/2}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-2006]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\{(x+a)^2 - a^2\}^{3/2}}$ ধরি $x + a = a \sec\theta$

$= \int \frac{a \sec\theta \tan\theta\, d\theta}{(a^2 \sec^2\theta - a^2)^{3/2}}$ $\therefore dx = a \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

$= \int \frac{a \sec\theta \tan\theta\, d\theta}{a^3 \tan^3\theta} = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} d\theta$

$= \frac{1}{a^2}\int \cot\theta \operatorname{cosec}\theta\, d\theta = -\frac{1}{a^2}\operatorname{cosec}\theta + c$

$= -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\sec\theta}{\tan\theta} + c = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{(x+a)/a}{\sqrt{\left(\frac{x+a}{a}\right)^2 - 1}} + c$

$= -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 - a^2}} + c = -\frac{x+a}{a^2\sqrt{x^2 + 2ax}} + c$

উদাহরণ-31. প্রমাণ কর $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

$= \ln\left|\tan\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right| + c.$

সমাধান ঃ $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$ ধরি $\sec x + \tan x = z$

$= \int \frac{1}{z} dz$ $\therefore (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx = dz$

$= \ln z + c = \ln|\sec x + \tan x| + c = \ln\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right| + c$

$= \ln\left|\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}\right| + c$

$= \ln\left|\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}\right| + c$

$= \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c.$

উদাহরণ-32. প্রমাণ কর ঃ $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$

$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.$

সমাধান ঃ $\int \operatorname{cosec} x\, dx$

$= \int \frac{\operatorname{cosec}(\operatorname{cosec} x - \cot x)}{\operatorname{cosec} x - \cot x} dx$ ধরি $\operatorname{cosec} x - \cot x = z$

$= \int \frac{1}{z} dz$ $\therefore \operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec} x - \cot x)dx = dz$

$= \ln|z| + c = \ln|(\operatorname{cosec} x - \cot x)| + c = \ln\left|\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right| + c$

$= \ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.$

উদাহরণ-33. $\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-2003]**

সমাধান ঃ $\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\,dx$

$= \int \sqrt{\sin x}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$ ধরি $\sin x = z^2$

$\therefore \cos x\,dx = 2z\,dz$

$= \int z(1-z^4)\,2z\,dz$

$= 2\int (z^2 - z^6)\,dz = 2\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^7}{7}\right) + c$

$= \frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} - \frac{2}{7}(\sin x)^{7/2} + c$ $[\because z = (\sin x)^{1/2}]$

উদাহরণ-34. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^3}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[B.Sc(Pass)-2010]**

সমাধান ঃ $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^3}\,dx$ ধরি $x = a\sec\theta$

$\therefore dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$= \int \frac{a\tan\theta}{a^3\sec^3\theta}\cdot a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{a}\int \sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2a}\int(1-\cos 2\theta)\,d\theta$

$= \frac{1}{2a}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + c$

$= \frac{1}{2a}[\theta - \cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}] = c$

$= \frac{1}{2a}\left[\sec^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right] + c$

$= \frac{1}{2a}\left[\sec^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\right] + c$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

11.1. $\int (x+a)^n$ এর মান কত? [What is the value of $\int (x+a)^n\,dx$?]

Ans : $\int (x+a)^n\,dx = \begin{cases} \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + c & \text{যখন } n \neq -1 \\ ln\,|x+a| + c & \text{যখন } n = -1 \end{cases}$

11:2. $\int a^{mx}\,dx$ এর মান কত? [What is the value of $\int a^{mx}\,dx$?]

Ans : $\int a^{mx}\,dx = \frac{a^{mx}}{m\,ln\,a} + c$

11.3. $\int \tan mx\,dx = ?$

Ans : $\int \tan mx\,dx = \frac{1}{m}\,ln\,|\sec mx| + c$

11.4. $\int \sec^2 mx\,dx = ?$

Ans : $\int \sec^2 mx\,dx = \frac{\tan mx}{m} + c$

11.5. $\int e^x \sec^2(e^x)\,dx = ?$

Ans : $\int e^x \sec^2(e^x)\,dx = \int \sec^2(e^x)\,d(e^x) = \tan(e^x) + c$

11.6. $\int (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})\,dx = ?$

Ans : $\int (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})\,dx = \int (e^x + e^{-x})\,d(e^x + e^{-x})$

$= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{2} + c$

11.7. $\int x\cos x^2\,dx = ?$

Ans : $\int x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2\,d(x^2) = \frac{1}{2}\sin x^2 + c$

11.8. $\int \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\,d\theta = ?$

Ans : $\int \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\,d\theta = \int \frac{d(\cos\theta + \sin\theta)}{\cos\theta + \sin\theta}$

$= ln\,|\cos\theta + \sin\theta| + c.$

11.9. $\int \sec^4 x\,dx = ?$

Ans : $\int \sec^4 x\,dx = \int \sec^2 x(1 + \tan^2 x)\,dx$

$= \int (1 + \tan^2 x)\,d(\tan x)$

$= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c.$

11.10. প্রতিস্থাপন পদ্ধতি কি? (What is the method of substitution?)

Ans : চলক রাশির পরিবর্তনের মাধ্যমে অনুরূপ আকারের জটিল ইন্টিগ্রাল ফাংশনকে সহজ বা জ্ঞাত ইন্টিগ্রালে প্রকাশ করার জন্য যে বিশেষ কৌশল প্রয়োগ করা হয় তাহাকে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি বলে।

EXERCISE–11

ইন্টিগ্রাল সমূহ নির্ণয় কর ঃ

1. $\int x \cos x^2 \, dx$

2(i) $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$ (ii) $\int e^x \sqrt{e^x+1}\, dx$ **[NUH(NM)–08]**

3. $\int x\, 7^{x^2} dx$ **[DUH–1978]** 4. $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx$ **[CUH–1984]**

5. $\int e^{a \sin^{-1}x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 6. $\int \frac{1+\cos x}{\sqrt[3]{x+\sin x}} dx$

7. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1+\sin x}}$ 8. $\int \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta$

9. $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1-2x^4}}$ 10. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$

11. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x + 3}}$ 12. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x^2}}{x} dx$

13. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ 14. $\int e^x \tan(e^x) dx$

15. $\int \cos x \cos(\sin x) dx$ 16. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

17. $\int \frac{\tan(\ln x)}{x} dx$ 18. $\int \frac{x \sin^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$

19. $\int \frac{(\sec^{-1}x)^4}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ 20(i). $\int \frac{\cot x}{\ln \sin x} dx$

(ii). $\int \frac{x^{e-1} + e^{x-1}}{x^e + e^x} dx$ **[NUH(NM)–03]**

21. $\int \frac{\sec x \, dx}{\ln(\sec x + \tan x)}$ 22. $\int \frac{\tan x \, dx}{a + b\tan^2 x}$

23. $\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$ **[DUH–1978, RUH–1982]**

24. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$ **[RUH–1981]** 25. $\int \frac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}} dx$

26. $\int \frac{dx}{\sin^{5/3}x \cos^{1/3}x}$ 27. $\int \sec^6 x \, dx$

28. $\int \operatorname{cosec}^8 x \, dx$ 29. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x} dx$ **[RUH–1988]**

30. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ 31. $\int \frac{\cos x}{\sin(x+a)} dx$

32. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$ **[NUH–03]** 33. $\int \frac{ae^{3x} + b}{ce^{3x} + k} dx$

34. $\int \cos\left\{2\cot^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right\} dx$ **[DUH–1962, CUH–1982]**

35. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ 36. $\int \frac{\tan\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

37. $\int \sec x \ln(\sec x + \tan x) dx$ 38. $\int (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) dx$

39. $\int \frac{(x+1)(x+\ln x)^2}{2x} dx$ 40. $\int \frac{\ln x . \sin[1 + (\ln x)^2]}{x} dx$

41. $\int \frac{\sec x dx}{\sin x + 2\cos x}$ **[CUH–1981]**

42. $\int \tan^3 x \sqrt{\sec x} \, dx$ **[NUH–96, 05, BSc(Pass)–06, 08, DUH–87, RUH–94]**

ANSWER–11

1. $\frac{1}{2}\sin x^2 + c$

2(i) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$ (ii) $\frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} + c$

3. $\frac{1}{2} \cdot \frac{7^{x^2}}{\ln 7} + c$ 4. $\frac{1}{1+\cos x} + c$

5. $\frac{1}{a} e^{a \sin^{-1}x} + c$ 6. $\frac{3}{2}(x + \sin x)^{2/3} + c$

7. $2\sqrt{(1+\sin x)} + c$ 8. $\ln|\cos\theta + \sin\theta| + c$

9. $-\frac{1}{4}\sqrt{1-2x^4} + c$ 10. $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + c$

11. $2\sqrt{(\tan^{-1}x + 3)} + c$ 12. $\frac{1}{3}(1 + \ln x^2)^{3/2} + c$

13. $-\frac{1}{\ln|x|} + c$ 14. $\ln|\sec(e^x)| + c$

15. $\sin(\sin x) + c$ 16. $\ln(1 + \ln x) + c$

17. $\ln|\sec(\ln x)| + c$ 18. $\frac{1}{4}(\sin^{-1}x^2)^2 + c$

19. $\frac{1}{5}(\sec^{-1}x)^5 + c$

20(i). $ln\,|ln\sin x| + c$ (ii). $\frac{1}{e}ln\,(e^x + x^e) + c$

21. $ln\{ln|\sec x + \tan x|\} + c$

22. $\frac{1}{2(b-a)}ln\,|a\cos^2x + b\sin^2x| + c$

23. $2\sqrt{x} + \frac{1}{2}(lnx)^2 + c$ 24. $2\sqrt{\tan x} + c$

25. $2\sqrt{\tan x} + \frac{2}{5}\sqrt{\tan^5 x} + c$ 26. $-\frac{3}{2}\cot^{2/3}x + c$

27. $\tan x + \frac{2}{3}\tan^3x + \frac{1}{5}\tan^5x + c$

28. $-\left[\cot x + \cot^3x + \frac{3}{5}\cos^5x + \frac{1}{7}\cot^7x\right] + c$

29. $2\,ln(1 + \sqrt{x}) + c$

30. $\frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)^3 - 3(\sqrt{x}+1)^2 + 6(\sqrt{x}+1) - 2\,ln|\sqrt{x}+1| + c$

31. $(x + a)\sin a + \cos a\, ln\,|\sin(a + x)| + c$

32. $ln(e^x + 1) + ln\,(e^{-x} + 1) + c$

33. $\frac{ak - bc}{3ck}ln|ce^{3x} + k| + \frac{bx}{k} + c_1$ (ধ্রুবক)

34. $-\frac{1}{2}x^2 + c$ 35. $\frac{1}{2}\sec^{-1}x^2 + c$

36. $(\tan\sqrt{x})^2 + c$ 37. $\frac{1}{2}[ln|\sec x + \tan x)]^2 | + c$

38. $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})^2 + c$ 39. $\frac{1}{6}(x + ln\,x)^3 + c$

40. $-\frac{1}{2}\cos[(lnx)^2 + 1] + c$ 41. $ln|\tan x + 2| + c$

42. $\frac{2}{5}\sec^{5/2}x - 2\sqrt{\sec x} + c.$

———×———

Chapter–12(A)
ইন্টিগ্রেশনের কলাকৌশল
TECHNIQUES OF INTEGRATION

ইন্টিগ্র্যল নির্ণয় করার জন্য নিম্নের বিশেষ আকারের ইন্টিগ্রেশন (Special Types of Integration) এর কলাকৌশল (Technique) মনে রাখা আবশ্যক।

12.1. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ এর মান নির্ণয় কর। *

ধরি $x = a\tan\theta \quad \therefore \tan\theta = \frac{x}{a}$ বা $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$\therefore dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\tan^2\theta + a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

উদাহরণ–1. $\int \frac{x^4 dx}{4 + x^{10}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{x^4\,dx}{4 + x^{10}} = \int \frac{x^4\,dx}{(x^5)^2 + 2^2}$ ধরি $x^5 = z$

$\therefore 5x^4\,dx = dz$

বা $x^4\,dx = \frac{1}{5}dz$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{dz}{z^2 + 2^2}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) + c = \frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{x^5}{2}\right) + c$$

উদাহরণ–2. $\int \frac{2\,dx}{x[1 + (lnx)^2]}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{2\,dx}{x[1 + (lnx)^2]}$ ধরি $lnx = z$

$\therefore \frac{1}{x}dx = dz$

$$= 2\int \frac{dz}{1 + z^2}$$

$$= 2\tan^{-1}(z) + c = 2\tan^{-1}(lnx) + c.$$

উদাহরণ–3. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ ধরি $e^x = z$

$\therefore e^x\,dx = dz$

$$= \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x\,dx}{(e^x)^2 + 1} = \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \tan^{-1}z + c = \tan^{-1}(e^x) + c.$$

উদাহরণ-4. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [DUH-1990]

সমাধান ঃ $\int \frac{\sin x \cos x\,dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\frac{\sin x \cos x}{\cos^4 x}}{\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x}}\,dx$

$= \int \frac{\tan x \sec^2 x\,dx}{(\tan^2 x)^2 + 1}$ ধরি $\tan^2 x = z$

$\therefore 2 \tan x . \sec^2 x\,dx = dz$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2 + 1}$ বা $\tan x . \sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}dz$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1} z + c = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan^2 x) + c.$

উদাহরণ-5. $\int \frac{x^2 + \sin^2 x}{1 + x^2}\sec^2 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH-1994, DUH-1963, BScEng (K-BIT)-1993]

সমাধান ঃ $\int \frac{x^2 + \sin^2 x}{1 + x^2}\sec^2 x\,dx = \int \frac{x^2 + 1 - \cos^2 x}{1 + x^2} . \sec^2 x\,dx$

$= \int \frac{(x^2 + 1)\sec^2 x - 1}{x^2 + 1}\,dx = \int \sec^2 x\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 1}\,dx$

$= \tan x - \tan^{-1} x + c.$

উদাহরণ-6. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 9\sin^2 x}$ এর মান নির্ণয় কর। [RUH-1956]

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 9\sin^2 x}$

$= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{4 + 9\tan^2 x} = \int \frac{dz}{4 + 9z^2}$ ধরি $\tan x = z$

$\therefore \sec^2 x\,dx = dz$

$= \frac{1}{9}\int \frac{dz}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + z^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3z}{2}\right) + c = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3\tan x}{2}\right) + c.$

12.2. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$, $x < a$ এর মান নির্ণয়।

$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{(a + x)(a - x)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x + a} + \frac{1}{a - x}\right)$

$\therefore \int \frac{1}{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x + a} + \frac{1}{a - x}\right)dx$

$= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{a + x}dx - \frac{1}{2a}\int \frac{-1}{a - x}dx = \frac{1}{2a}\{ln|a + x| - ln|a - x|\} + c$

$= \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + c.$

উদাহরণ-7. $\int \frac{x\,dx}{a^4 - x^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{x\,dx}{(a^2)^2 - (x^2)^2}$ ধরি $x^2 = z$

$\therefore 2x\,dx = dz$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(a^2)^2 - z^2}$ বা $x\,dx = \frac{1}{2}dz$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2a^2} ln\frac{a^2 + z}{a^2 - z} + c = \frac{1}{4a^2} ln\left(\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}\right) + c.$

উদাহরণ-8. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\{9 - (\tan^{-1} x)^2\}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\{9 - (\tan^{-1} x)^2\}}$ ধরি $\tan^{-1} x = z$

$\therefore \frac{1}{1 + x^2}dx = dz$

$= \int \frac{dz}{3^2 - z^2}$

$= \frac{1}{2.3} ln\left|\frac{3 + z}{3 - z}\right| + c = \frac{1}{6} ln\left|\frac{3 + \tan^{-1} x}{3 - \tan^{-1} x}\right| + c$

উদাহরণ-9. $\int \frac{\cos x\,dx.}{5 + 4\cos^2 x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\cos x\,dx}{5 + 4\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{5 + 4 - 4\sin^2 x}$

$= \int \frac{\cos x\,dx}{9 - 4\sin^2 x}$ ধরি $\sin x = z$

$\therefore \cos x\,dx = dz$

$= \int \frac{dz}{9 - 4z^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - z^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2 . \frac{3}{2}} ln\left|\frac{\frac{3}{2} + z}{\frac{3}{2} - z}\right| + c$

$= \frac{1}{12} ln\left|\frac{3 + 2\sin x}{3 - 2\sin x}\right| + c.$

12.3. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, $x > a$ এর মান নির্ণয়।

$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x + a)(x - a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right)$

$\therefore \int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right)dx$

$= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x - a}dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x + a}dx = \frac{1}{2a}[ln|x - a| - ln|x + a|] + c$

$= \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + c.$

উদাহরণ-10. $\int \frac{x\,dx}{x^4-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{x\,dx}{x^4-1}$

$= \int \frac{x\,dx}{(x^2)^2-1}$ ধরি $x^2 = z$

$\therefore 2x\,dx = dz$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2-1}$ বা $x\,dx = \frac{1}{2}dz$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.1} ln \left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c = \frac{1}{4} ln \left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + c.$

উদাহরণ-11. $\int \frac{dx}{x^4-a^4} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}$

$= \frac{1}{2a^2}\int\left(\frac{1}{x^2-a^2} - \frac{1}{x^2+a^2}\right)dx = \frac{1}{2a^2}\left[\int \frac{1}{x^2-a^2}dx - \int \frac{1}{x^2+a^2}dx\right]$

$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{2a} ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| - \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] + c$

12.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ এর মান নির্ণয়।

ধরি $x = a\sin\theta$ $\Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{a}$

$\therefore dx = a\cos\theta\,d\theta$ $\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}} = \int \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta}d\theta = \int d\theta = \theta + c$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$

উদাহরণ-12. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1988]

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}$

$= \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ ধরি $\tan^{-1}x = z$

$= \sin^{-1}z + c$ $\therefore \frac{1}{1+x^2}dx = dz$

$= \sin^{-1}(\tan^{-1}x) + c.$

উদাহরণ-13. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[RUH-1978, 1988, CUH-1985]

সমাধান ঃ $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{(a^{3/2})^2-(x^{3/2})^2}}$ ধরি $x^{3/2} = z$

$\therefore \frac{3}{2}x^{1/2}dx = dz$

$= \frac{2}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{(a^{3/2})^2-z^2}}$ বা $\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}dz$

$= \frac{2}{3}\sin^{-1}\left(\frac{z}{a^{3/2}}\right) + c = \frac{2}{3}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} + c.$

উদাহরণ-14. $\int \sqrt{(1+\sec x)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-96, BSc(Pass)-08, 10, DUH-93, CUH-83, 85, RUH-64, BSc(KUET)-93]**

সমাধান ঃ $\int \sqrt{(1+\sec x)}\,dx = \int \sqrt{\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}dx$

$= \int \sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{\cos x}\right)}dx = \int \sqrt{\frac{2\cos^2(x/2)}{1-2\sin^2(x/2)}}dx$

$= \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}}dx$ ধরি $\sin\frac{x}{2} = z$

$= \int \frac{2\,dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-z^2}}$ $\therefore \cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}dx = dz$

বা $\cos\frac{x}{2}dx = 2dz$

$= 2\sin^{-1}(\sqrt{2}z) + c = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) + c.$

12.5. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$ এর মান নির্ণয়।

ধরি $x = a\sinh\theta$ $\Rightarrow \sinh\theta = \left(\frac{x}{a}\right)$

$\therefore dx = a\cosh\theta\,d\theta$ $\therefore \theta = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\cosh\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\sinh^2\theta+a^2}}$

$= \int \frac{a\cosh\theta\,d\theta}{a\cosh\theta}$ $[\because 1+\sinh^2\theta = \cosh^2\theta]$

$= \int d\theta = \theta + c$

$= \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad [\because \sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})]$

$= \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right| + c = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + c$

$= \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| - \ln|a| + c = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c_1$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ বা $\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + c$

উদাহরণ–15. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}+1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(x^5)^2+1}}$ ধরি $x^5 = z$

$\therefore 5x^4\,dx = dz$

$= \frac{1}{5}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}$ বা $x^4\,dx = \frac{1}{5}dz$

$= \frac{1}{5}\ln|z+\sqrt{z^2+1}| + c = \frac{1}{5}\ln|x^5+\sqrt{x^{10}+1}| + c.$

উদাহরণ–16. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$ ধরি $e^{-x} = z$

$\therefore e^{-x}\,dx = -dz$

$= \int \frac{dx}{e^x\sqrt{1+e^{-2x}}} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$

$= -\sinh^{-1}(z) + c = -\sinh^{-1}(e^{-x}) + c.$

12.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ এর মান নির্ণয়।

ধরি $x = a\cosh\theta \qquad \Rightarrow \cosh\theta = \left(\frac{x}{a}\right)$

$\therefore dx = a\sinh\theta\,d\theta \qquad \therefore \theta = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sinh\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\cosh^2\theta - a^2}}$

$= \int \frac{a\sinh\theta\,d\theta}{a\sinh\theta} \qquad [\because \cosh^2\theta - 1 = \sinh^2\theta]$

$= \int d\theta = \theta + c = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right| + c$

$= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + c_1$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ বা $\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + c.$

উদাহরণ–17. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}}$

$= \frac{1}{5}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{2/5}\right) + c = \frac{1}{5}\cosh^{-1}\left(\frac{5x}{2}\right) + c.$

উদাহরণ–18. $\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$ ধরি $x^3 = z$

$\therefore 3x^2\,dx = dz$

$= \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \ln|z+\sqrt{(z^2-1)}| + c = \ln|x^3+\sqrt{(x^6-1)}| + c.$

12.7. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয়।

ধরি $x = a\sin\theta \qquad \therefore dx = a\cos\theta\,d\theta$

$\therefore \int \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = \int \sqrt{(a^2-a^2\sin^2\theta)}.\ a\cos\theta\,d\theta$

$= a^2\int \cos^2\theta\,d\theta \qquad \therefore \sin\theta = \frac{x}{a}$

$= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta \qquad \therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$= \frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + c \qquad \therefore \cos\theta = \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

$= \frac{a^2}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{a^2}{2}\theta + c$

$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$\therefore \int \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$

উদাহরণ–19. $\int x^3\sqrt{(1-x^8)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int x^3\sqrt{(1-x^8)}\,dx$ ধরি $x^4 = z$

$= \frac{1}{4}\int \sqrt{1-z^2}\,dz \qquad \therefore 4x^3\,dx = dz$ বা $x^3\,dx = \frac{1}{4}dz$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{z\sqrt{1-z^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}z\right] + c = \frac{x^4\sqrt{1-x^8}}{8} + \frac{1}{8}\sin^{-1}(x^4) + c.$

উদাহরণ–20. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[CUH–1982]**

সমাধান ঃ $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{9-(9-x^2)}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

$= 9\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx - \int \sqrt{9-x^2}\,dx$

$= 9\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \left[\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right] + c$

$= \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + c.$

12.8. $\int \sqrt{(x^2+a^2)}\,dx$ এর মান নির্ণয়।

সমাধান ঃ $\int \sqrt{(x^2+a^2)}\,dx = \int \sqrt{a^2(1+\sinh^2\theta)}.\ a\cosh\theta\,d\theta$

$= a^2\int \cosh^2\theta\,d\theta$ ধরি $x = a\sinh\theta$

$= \frac{a^2}{2}\int (\cosh 2\theta + 1)d\theta$ $dx = a\cosh\theta\,d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\left\{\frac{\sinh 2\theta}{2} + \theta\right\} + c$ $\sinh\theta = \left(\frac{x}{a}\right)$

$= \frac{a^2}{2}\sinh\theta\cosh\theta + \frac{a^2}{2}\theta + c$ $\therefore \theta = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$= \frac{a^2}{2}\sinh\theta\sqrt{(\sinh^2\theta+1)} + \frac{a^2}{2}\theta + c$

$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$\therefore \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + c.$

উদাহরণ–21. $\int \cos\theta\sqrt{1+\sin^2\theta}\,d\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \cos\theta\sqrt{(1+\sin^2\theta)}\,d\theta$ ধরি $\sin\theta = z$

$\therefore \cos\theta\,d\theta = dz$

$= \int \sqrt{1+z^2}\,dz = \frac{z\sqrt{1+z^2}}{2} + \frac{1}{2}\sinh^{-1}z + c$

$= \frac{\sin\theta\sqrt{1+\sin^2\theta}}{2} + \frac{1}{2}\sinh^{-1}(\sin\theta) + c.$

12.9. $\int \sqrt{(x^2-a^2)}\,dx$ এর মান নির্ণয়।

ধরি $x = a\cosh\theta$ $\Rightarrow \cosh\theta = \frac{x}{a}$

$\therefore dx = a\sinh\theta\,d\theta$ $\therefore \theta = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$\therefore \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int \sqrt{(a^2\cosh^2\theta - a^2)}\ .\ a\sinh\theta\,d\theta$

$= a^2\int \sinh^2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int (\cosh 2\theta - 1)d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sinh 2\theta}{2} - \theta\right) + c = \frac{a^2}{2}\sinh\theta\cosh\theta - \frac{a^2}{2}\theta + c$

$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$= \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$\therefore \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$= \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + c.$

উদাহরণ–22. $\int x^3\sqrt{(x^8-a^8)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int x^3\sqrt{(x^8-a^8)}\,dx$ ধরি $x^4 = z$

$= \frac{1}{4}\int \sqrt{(z)^2 - (a^4)^2}\,dz$ $\therefore 4x^3\,dx = dz$ বা $x^3\,dx = \frac{1}{4}dz$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{z\sqrt{z^2-a^8}}{2} - \frac{a^8}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{z}{a^4}\right)\right] + c$

$= \frac{x^4\sqrt{x^8-a^8}}{8} - \frac{a^8}{8}\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + c.$

উদাহরণ–23. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–04, NUH(NM)–02, 09, BSc(Pass)–06, DUH–95, 91, 84, RUH–82, 83, 87, DScEngg (KUET)–95]

সমাধান ঃ $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-(1/x)}{\sqrt{2}}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right) + c.$

উদাহরণ-24. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}\right| + c.$$

উদাহরণ-25. $\int \frac{dx}{x^4+1}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}\right) + c.$$

উদাহরণ-26. $\int \sqrt{\tan x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \sqrt{\tan x}\,dx$

ধরি $\tan x = z^2$

বা $x = \tan^{-1} z^2$

$\therefore dx = \frac{2z}{1+z^4}\,dz$

$$= \int \frac{2z^2}{1+z^4}\,dz$$

$$= \int \frac{(z^2+1)+(z^2-1)}{z^4+1}\,dz$$

$$= \int \frac{z^2+1}{z^4+1}\,dz + \int \frac{z^2-1}{z^4+1}\,dz = \int \frac{1+\frac{1}{z^2}}{z^2+\frac{1}{z^2}}\,dz + \int \frac{1-\frac{1}{z^2}}{z^2+\frac{1}{z^2}}\,dz$$

$$= \int \frac{d\left(z-\frac{1}{z}\right)}{\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+2} + \int \frac{d\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{z+\frac{1}{z}-\sqrt{2}}{z+\frac{1}{z}+\sqrt{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{z^2-1}{z\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{z^2+1-z\sqrt{2}}{z^2+1+z\sqrt{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\tan x+1-\sqrt{2\tan x}}{\tan x+1+\sqrt{2\tan x}}\right| + c.$$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

12.A.1. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ এর সূত্র লিখ। [Write the formula of $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$.]

Ans : $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

12.A.2. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

12.A.3. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = ?$

Ans : $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

12.A.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ?$

Ans : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ বা $\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$

12.A.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = ?$

Ans : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ বা $\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

12.A.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = ?$

Ans : $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

12.A.7. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

12.A.8. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

বা $\frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

12.A.9. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

বা $\frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

12.A.10. $\int \frac{6x^5\, dx}{1 + x^{12}}$ এর মান কত?

Ans : $\int \frac{6x^5\, dx}{1 + x^{12}} = \int \frac{d(x^6)}{1 + (x^6)^2} = \tan^{-1}(x^6) + c$

EXERCISE–12(A)

ইন্টিগ্রাল সমূহ নির্ণয় কর।

1. $\int \frac{6x^5}{1 + x^{12}}\, dx$
2. $\int \frac{\tan^2 x \sec^2 x}{1 + \tan^6 x}\, dx$
3. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ **[RUH–1986]**
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\{4 + (\sin^{-1} x)^2\}}$
5. $\int \frac{\sin x\, dx}{3 + \sin^2 x}$
6. $\int \frac{x\, dx}{1 - x^4}$
7. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 4}$
8. $\int \frac{p dx}{q^2x^2 - r^2}$
9. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x - 9\sin^2 x}$
10. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{36 - x^4}}$
11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - (\ln x)^2}}$
12. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{3 + \cos^2 x}}$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$
14. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{a^8 - x^8}}$ **[RUH–1986]**
15. $\int \frac{x^2\, dx}{1 - x^4}$ **[RUH–1988]**

16. $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$ **[CUH–81, BScEngg (K-BIT)–92]**
17. $\int \frac{\sec x\, dx}{\sqrt{\sin^2 x + 2\cos^2 x}}$
18. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^4 + x^4}}$
19. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\, dx$
20. $\int \frac{dx}{a^2 - b^2\cos^2 x}$, $a > b$ **[BScEngg (K-BIT)–1993]**
21. $\int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})\, dx$ **[NUH(NM)–03, RUH–95]**
22. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx$ **[NUH–1997]**
23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9(\ln x)^2}}$ **[D.U.H. '88]**
24. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{(\tan^{-1} x)^2}}$
25. $\int 2x\sqrt{a^4 - x^4}\, dx$
26. $\int e^x \sqrt{e^{2x} - 1}\, dx$
27. $\int \frac{x^2\, dx}{x^4 + 1}$
28. $\int \frac{x^2\, dx}{x^4 - x^2 - 2}$ **[NUH–93, DUH–85, CUH–88]**
29. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$ **[RUH–88]**
30. $\int \sqrt{\cot x}\, dx$

ANSWER–12(A)

1. $\tan^{-1}(x^6) + c$
2. $\frac{1}{3}\tan^{-1}(\tan^3 x) + c$
3. $\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b\tan x}{a}\right) + c$
4. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1} x\right) + c$
5. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2 - \cos x}{2 + \cos x}\right| + c$
6. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right| + c$
7. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x - 2}{e^x + 2}\right| + c$
8. $\frac{p}{2qr}\ln\left|\frac{qx - r}{qx + r}\right| + c$
9. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2 + 3\tan x}{2 - 3\tan x}\right| + c$
10. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{6}\right) + c$
11. $\sin^{-1}(\ln|x|) + c$
12. $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + c$
13. $\cos^{-1}(e^{-x}) + c$
14. $\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + c$
15. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c$

16. $2\sqrt{e^x - 1} - 2\tan^{-1}\sqrt{(e^x - 1)} + c$

17. $\sinh^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$

18. $\frac{1}{2} ln\,|x^2 + \sqrt{x^4 + a^4}| + c$

19. $\sinh^{-1}(e^x) + c$

20. $\frac{1}{a\sqrt{a^2 - b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{a\tan x}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) + c$

21. $\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{(2\tan x)}}\right) + c$

22. $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{3}x}\right) + c$

23. $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\,ln\,x}{2}\right) + c$

24. $\cosh^{-1}(\tan^{-1}x) + c$

25. $\frac{x^2\sqrt{a^4 - x^4}}{2} + \frac{a^4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + c$

26. $\frac{e^x\sqrt{e^{2x} - 1}}{2} - \frac{1}{2}\cosh^{-1}(e^x) + c$

27. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} ln\left|\frac{x^2 + 1 - \sqrt{2}.x}{x^2 + 1 + \sqrt{2}.x}\right| + c$

28. $\frac{1}{3\sqrt{2}} ln\left|\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}\right| + \frac{1}{3}\tan^{-1}x + c$

29. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{4} ln\left|\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right| + c$

30. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\cot x - 1}{\sqrt{2\cot x}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} ln\left|\frac{\cot x + 1 - \sqrt{2\cot x}}{\cot x + 1 + \sqrt{2\cot x}}\right| + c.$

———×———

Techniques of Integration–12(B)

ইন্টিগ্রেশনের কলাকৌশল–12(B)

12.10. $\int\frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $\int\sqrt{(ax^2 + bx + c)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right\} = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right\}$$

যখন $b^2 < 4ac$ ঃ

$$\int\frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{2a}{\sqrt{4ac - b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right) + c$$

যখন $b^2 > 4ac$ ঃ

$$\int\frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{\sqrt{b^2 - 4ac}} ln\left|\frac{x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} ln\left|\frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right| + c.$$

অনুরূপভাবে $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ও $\int\sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx$ এর মান নির্ণয় করা যায়।

নোট ঃ x^2 এর সহগ '1' করার পর রাশিটিকে দুইটি বর্গের সমষ্টি বা অন্তরূপে প্রকাশ করিতে হইবে।

উদাহরণ-27. $\int \frac{dx}{2x^2+x+1}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-1961]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)+c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)+c.$$

উদাহরণ-28. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$$= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

উদাহরণ-29. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+5}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-1986]**

সমাধান ঃ $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+2e^x+5}$ ধরি $e^x = z$, $\therefore e^x\,dx = dz$

$$= \int \frac{dz}{z^2+2z+5} = \int \frac{dz}{(z+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)+c$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{e^x+1}{2}\right)+c$$

উদাহরণ-30. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+4\sin x+3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x+4\sin x+3}$ ধরি $\sin x = z$, $\therefore \cos x\,dx = dz$

$$= \int \frac{dz}{z^2+4z+3} = \int \frac{dz}{(z+2)^2-1^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+2-1}{z+2+1}\right|+c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z+3}\right|+c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x+3}\right|+c.$$

উদাহরণ-31. $\int \frac{dx}{x\{10+7\ln x+(\ln x)^2\}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{x\{10+7\ln x+(\ln x)^2}$

$$= \int \frac{dz}{10+7z+z^2}$$ ধরি $\ln x = z$, $\therefore \frac{1}{x}dx = dz$

$$= \int \frac{dz}{\left(z+\frac{7}{2}\right)^2+10-\frac{49}{4}}$$

$$= \int \frac{dz}{\left(z+\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2.\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{z+\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}{z+\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}\right|+c$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{z+2}{z+5}\right|+c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\ln x+2}{\ln x+5}\right|+c.$$

উদাহরণ-32. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{3x}{2}+2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+2-\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2}\right|+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3x}{2}+2}\right|+c.$$

উদাহরণ-33. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH-1991]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-2-\frac{1}{4}}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$= \cosh^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right) + c = \cosh^{-1}\left(\frac{2x+1}{3}\right) + c.$$

উদাহরণ-34. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[CUH-1986]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 2ax)}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-a)^2 + a^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + c$$

উদাহরণ-35. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-1959]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x^2 + x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + c.$$

উদাহরণ-36. $\int \sqrt{2ax - x^2}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-1962]**

সমাধান ঃ $\int \sqrt{2ax - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - (x-a)^2}\, dx$

$$= \frac{(x-a)\sqrt{a^2 - (x-a)^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + c$$

$$= \frac{(x-a)\sqrt{2ax - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + c.$$

উদাহরণ-37. $\int \sqrt{4 - 3x - 2x^2}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1965, CUH-1983]

সমাধান ঃ $\int \sqrt{4 - 3x - 2x^2}\, dx = \sqrt{2}\int \sqrt{2 - \frac{3}{2}x - x^2}\, dx$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{2 - \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{16}}\, dx = \sqrt{2}\int \sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2 - \left(x+\frac{3}{4}\right)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\left(x+\frac{3}{4}\right)\sqrt{2 - \frac{3}{2}x - x^2}}{2} + \frac{41}{16.2}\sin^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{41}}\right)\right] + c$$

$$= \frac{(4x+3)\sqrt{4 - 3x - 2x^2}}{8} + \frac{41\sqrt{2}}{32}\sin^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{41}}\right) + c.$$

উদাহরণ-38. $\int \sqrt{18x - 65 - x^2}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH(NM)-2007]

সমাধান ঃ $\int \sqrt{18x - 65 - x^2}\, dx$

$$= \int \sqrt{-65 - (x^2 - 18x + 81) + 81}\, dx$$

$$= \int \sqrt{4^2 - (x-9)^2}\, dx$$

$$= \frac{(x-9)\sqrt{4^2 - (x-9)^2}}{2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-9}{4}\right) + c$$

$$= \frac{(x-9)\sqrt{18x - 65 - x^2}}{2} + 8\sin^{-1}\left(\frac{x-9}{4}\right) + c.$$

উদাহরণ-39. $\int \sqrt{3x - x^2}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[DScEngg(K-BIT)-1993]

সমাধান ঃ $\int \sqrt{3x - x^2}\, dx = \int \sqrt{-(x^2 - 3x)}\, dx$

$$= \int \sqrt{-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}\, dx = \int \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}{2} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{(2x-3)\sqrt{3x - x^2}}{4} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{3}\right) + c.$$

12.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$ এর মান নির্ণয়।

[DUH-1987, RUH-1980, 1983, 1985, 1989]

ধরি $x-\alpha = z^2 \quad \therefore x = z^2+\alpha$ এবং $z = \sqrt{x-\alpha}$, $dx = 2z\,dz$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}} = \int \frac{2z\,dz}{\sqrt{z^2(z^2+\alpha-\beta)}} = 2\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+\alpha-\beta}}$$

$$= 2\ln|z+\sqrt{z^2+\alpha-\beta}| + c = 2\ln|\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}| + c.$$

উদাহরণ–40. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+12}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+12}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)(x-4)}} \qquad \text{ধরি } x-4 = z^2$$

$$\therefore dx = 2z\,dz$$

$$= \int \frac{2z\,dz}{\sqrt{(z^2+4-3)z^2}} \qquad \therefore x = z^2+4$$

$$= 2\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = 2\ln|z+\sqrt{z^2+1}| + c$$

$$= 2\ln|\sqrt{x-4}+\sqrt{x-4+1}| + c = 2\ln|\sqrt{x-4}+\sqrt{x-3}| + c$$

উদাহরণ–41. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH-1994, NUH(NM)-2009, RUH-1983, 1993]

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ ধরি $x-\alpha = z^2$

$dx = 2z\,dz$

$$= \int \frac{2z\,dz}{\sqrt{z^2(\beta-\alpha-z^2)}} = 2\int \frac{dz}{\sqrt{(\sqrt{\beta-\alpha})^2-z^2}}$$

$$= 2\sin^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right) + c = 2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right) + c.$$

উদাহরণ–42. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1985, 1990]

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ ধরি $x-1 = z^2$

$dx = 2z\,dz$

$$= \int \frac{2z\,dz}{\sqrt{z^2(2-1-z^2)}} = 2\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\sin^{-1}z + c$$

$$= 2\sin^{-1}(\sqrt{x-1}) + c.$$

12.12. $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$, $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

$\int (px+q)\sqrt{(ax^2+bx+c)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

$$px+q = \frac{p}{2a}(2ax+b) + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)$$

[ax^2+bx+c এর অন্তরক সহগের সহিত ধ্রুবক গুণ বা যোগ করিয়া সমতা করা]

$$\therefore \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{p}{2a}(2ax+b) + \left(q-\frac{pb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$= \frac{p}{2a}\int \frac{ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$= \frac{p}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(q-\frac{pb}{2a}\right)$$ [12.10 এর নিয়মে]

অনুরূপে $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ ও $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ নির্ণয় করা যায়।

নোট ঃ প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে $f(x) = z$ ধরিয়া প্রমাণ করা যায়,

(i) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$ (ii) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)}$

(iii) $\int f'(x)\sqrt{f(x)} = \frac{2}{3}\{f(x)\}^{3/2}$

উদাহরণ–43. $\int \frac{3x+2}{5x^2+2x+3}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[CUH–1993]**

সমাধান ঃ $\int \frac{3x+2}{5x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{\frac{3}{10}(10x+2)+2-\frac{3}{5}}{5x^2+2x+3}\,dx$

$$= \frac{3}{10}\int \frac{10x+2}{5x^2+2x+3}\,dx + \frac{7}{5}\int \frac{1}{5x^2+2x+3}\,dx$$

$$= \frac{3}{10}\ln|5x^2+2x+3| + \frac{7}{25}\int \frac{dx}{x^2+\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{3}{10}\ln|5x^2+2x+3| + \frac{7}{25}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{3}{5}-\frac{1}{25}}$$

$$= \frac{3}{10} \ln |5x^2 + 2x + 3| + \frac{7}{25} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{3}{10} \ln |5x^2 + 2x + 3| + \frac{7}{25} \cdot \frac{5}{\sqrt{14}} \tan^{-1} \left(\frac{x + \frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{14}}{5}} \right) + c$$

$$= \frac{3}{10} \ln |5x^2 + 2x + 3| + \frac{7}{5\sqrt{14}} \tan^{-1} \left(\frac{5x + 1}{\sqrt{14}} \right) + c.$$

উদাহরণ–44. $\int \frac{3x\,dx}{x^2 - x - 2}$ নির্ণয় কর। **[DUH–1990]**

সমাধান ঃ $\int \frac{3x\,dx}{x^2 - x - 2} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x - 1) + \frac{3}{2}}{x^2 - x - 2} dx$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2}$$

$$= \frac{3}{2} \ln |x^2 - x - 2| + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}$$

$$= \frac{3}{2} \ln |x^2 - x - 2| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}} \right| + c$$

$$= \frac{3}{2} \ln |x^2 - x - 2| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| + c$$

$$= \frac{3}{2} \ln |x - 2|\ |x + 1| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 1} \right| + c$$

$$= \frac{3}{2} \ln |x - 2| + \frac{3}{2} \ln |x + 1| + \frac{1}{2} \ln |x - 2| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + c$$

$$= 2 \ln |x - 2| + \ln |x + 1| + c$$

অথবা $\int \frac{3x\,dx}{x^2 - x - 2} = \int \frac{3x\,dx}{(x - 2)(x + 1)} = \int \left(\frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x + 1} \right) dx$

$$= 2 \ln |x - 2| + \ln |x + 1| + c.$$

উদাহরণ–45. $\int \frac{4 + 7x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[BScEngg (K–BIT)–99]**

সমাধান ঃ $\int \frac{4 + 7x}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \int \frac{-\frac{7}{2}(-2x) + 4}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

$$= -\frac{7}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{4 - x^2}} dx + 4 \int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$= -\frac{7}{2} \cdot 2\sqrt{4 - x^2} + 4 \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c$$

$$= -7\sqrt{4 - x^2} + 4 \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + c.$$

উদাহরণ–46. $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1965]**

সমাধান ঃ $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx = \int \frac{(2x - 2) + 7}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx$

$$= \int \frac{(2x - 2)dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} + 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$= 2\sqrt{(x^2 - 2x + 2)} + 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 1)^2 + 1}}$$

$$= 2\sqrt{(x^2 - 2x + 2)} + 7 \sin h^{-1} (x - 1) + c.$$

উদাহরণ–47. $\int \sqrt{\left(\frac{x}{a - x} \right)} dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–1991]**

সমাধান ঃ $\int \sqrt{\frac{x}{a - x}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{ax - x^2}} dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(a - 2x) + \frac{a}{2}}{\sqrt{ax - x^2}} dx$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{a - 2x}{\sqrt{ax - x^2}} dx + \frac{a}{2} \int \frac{1}{\sqrt{ax - x^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}$$

$$= -\sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2x - a}{a} \right) + c.$$

উদাহরণ-50. $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)-2004]**

সমাধান ঃ $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx = \int \frac{(x^2 + x + 1) - 2x}{x^2 + x + 1}\, dx$

$$= \int dx - \int \frac{2x}{x^2 + x + 1}\, dx = x - \int \frac{(2x + 1) - 1}{x^2 + x + 1}\, dx$$

$$= x - \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx + \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

$$= x - ln|x^2 + x + 1| + \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= x - ln|x^2 + x + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

12.B.1. মান কত? (What is the value?) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$ **[NUH-2010]**

Ans : $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = ln\,|f(x)| + c.$

12.B.2. মান কত? (What is the value?) $\int \frac{3x^2 - 10x}{x^3 - 5x^2 + 7}\, dx$

Ans : $\int \frac{3x^2 - 10x}{x^3 - 5x^2 + 7}\, dx = \int \frac{\frac{d}{dx}(x^3 - 5x^2 + 7)}{x^3 - 5x^2 + 7}$

$$= ln\,|x^3 - 5x^2 + 7| + c.$$

12.B.3. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx$

Ans : $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

12.B.4. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\int \frac{\cos x + 2}{\sqrt{\sin x + 2x + 3}}\, dx$

Ans : $\int \frac{\cos x + 2}{\sqrt{\sin x + 2x + 3}}\, dx = \int \frac{\frac{d}{dx}(\sin x + 2x + 3)}{\sqrt{\sin x + 2x + 3}}$

$$= 2\sqrt{\sin x + 2x + 3} + c$$

12.B.5. মান কত? (What is the vlaue?) : $\int f'(x)\sqrt{(x)}\,dx$

Ans : $\int f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx = \frac{2}{3}\{f(x)\}^{3/2} + c$

12.B.6. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\int (2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$

Ans : যেহেতু প্রদত্ত ইন্টিগ্রালটি $\int f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx$ আকারে।

সুতরাং $\int (2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{3}(x^2+x+1)^{3/2} + c$

EXERCISE–12(B)

মান নির্ণয় কর।

1. $\int \frac{dx}{x^2+7x-18}$ **[DUH–1959, 1986]**

2. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

3. $\int \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+2}$

4. $\int \frac{dx}{x^2-x-6}$ **[DUH–1961]**

5. $\int \frac{dx}{6x^2+7x+2}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ **[DUH–1987, RUH–1978, 1980, 1983]**

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+12}}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{6+11x-10x^2}}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$ **[DUH–1989]**

11. $\int \sqrt{(10-4x+4x^2)}dx$ **[DUH–1959]**

12. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{5\sin^2 x - 12\sin x + 4}}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+3x-2x^2}}$ **[NUH–1995]**

15. $\int \frac{2x}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}dx$ **[NUH–09, DUH–02]**

16. $\int \frac{3x-2}{1-6x-9x^2}dx$

17. $\int \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}\,dx$ **[CUH–1980]**

18. $\int \frac{4x+15}{x^2+6x+10}dx$ **[RUH–1994, CUH–1987]**

19. $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx$

20. $\int \frac{x-1}{\sqrt{4+x^2-2x}}dx$ **[CUH–1978]**

21. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{5+3x-2x^2}}dx$ **[DUH–1954]**

22. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ **[RUH–1989]**

23. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{5x^2+10x+7}}$ **[RUH–1959]**

24. $\int (x-1)\sqrt{x^2-1}\,dx$ **[DUH–1986, RUH–1982]**

25. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+1}\,dx$

26. $\int \frac{x^2}{x^2-9}dx$

27. $\int \frac{x^2+2x}{x^2+2x+2}dx$

28. $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

ANSWER–12(B)

1. $\frac{1}{11}\ln\left|\frac{x-2}{x+9}\right| + c$

2. $\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{2}\right) + c$

3. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2+1) + c$

4. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + c$

5. $\ln\left|\frac{2x+1}{3x+2}\right| + c$

6. $\cosh^{-1}(x-2) + c$

7. $\ln|x+a+\sqrt{x^2+2ax}| + c$

8. $\cosh^{-1}(2x-7) + c$

9. $\frac{1}{\sqrt{10}}\sin^{-1}\frac{20x-11}{19} + c$

10. $\sin^{-1}(2x-3) + c$

11. $\frac{(2x-1)\sqrt{x^2-x+\frac{5}{2}}}{2} + \frac{9}{4}\sinh^{-1}\frac{1}{3}(2x-1) + c$

12. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{6}{5} - \sin x + \sqrt{\left(\sin^2 x - \frac{12}{5}\sin x + \frac{4}{5}\right)}\right| + c$

13. $2\ln|\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}| + c$

14. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x-3}{\sqrt{41}}\right) + c$

15. $2\sin^{-1}\sqrt{\left(\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}\right)} + c$

16. $\frac{\sqrt{2}}{4} ln \left|\frac{3x+1-\sqrt{2}}{3x+1+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{6} ln|1-6x-9x^2| + c$

17. $\frac{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}{2} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} \cos h^{-1}\left[\frac{2x-\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right] + c$

18. $2 ln|x^2+6x+10| + 3\tan^{-1}(x+3) + c$

19. $\frac{1}{2} ln|x^2+4x+5| - \tan^{-1}(x+2) + c$

20. $\sqrt{(x^2-2x+4)} + c$

21. $-\frac{3}{2}\sqrt{5+3x-2x^2} + \frac{17}{4\sqrt{2}} \sin^{-1}\left\{\frac{1}{7}(4x-3)\right\} + c$

22. $2\sqrt{(x^2+x+1)} + 2 ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + c$

23. $\frac{3}{5}\sqrt{(5x^2+10x+7)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \sinh^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}(x+1)}{\sqrt{2}}\right\} + c$

24. $\frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} ln|x+\sqrt{x^2-1}| + c$

25. $\frac{1}{3}(x^2+2x+1)^{3/2} + c$

26. $x + \frac{3}{2} ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$

27. $x - 2\tan^{-1}(x+1) + c$

28. $\frac{(2x+5)\sqrt{x^2+x+1}}{4} + \frac{15}{8} \sinh^{-1}\left\{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right\} + c.$

ইন্টিগ্রেশনের কলাকৌশল–12(C)

12.13. $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px+q}}$ এর মান নির্ণয়।

ধরি $px+q = z^2$ $\therefore x = \frac{z^2-q}{p}$

$\therefore p\,dx = 2z\,dz$ বা $dx = \frac{2}{p} z\,dz$

$$\therefore \int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px+q}} = \frac{2}{p}\int \frac{z\,dz}{\left(a.\frac{z^2-q}{p}+b\right).z}$$

$$= 2\int \frac{dz}{az^2-aq+bp} = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{z^2+\frac{bp-aq}{a}}$$

এখন 12.1 বা 12.3 এর নিয়মানুযায়ী মান নির্ণয় করা যাইবে।

নোট ঃ '$\sqrt{\ }$' এর ভিতর একঘাত রাশিমালা থাকিলে উহাকে z^2 ধরতে হইবে।

উদাহরণ–51. $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x+3}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x+3}}$ ধরি $x+3 = z^2$

$\therefore dx = 2z\,dz$

$= \int \frac{2z\,dz}{(z^2-3-4).z}$ $\therefore x = z^2-3$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2-(\sqrt{7})^2} = 2.\frac{1}{2\sqrt{7}} ln\left(\frac{z-\sqrt{7}}{z+\sqrt{7}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} ln\left(\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{7}}\right) + c$$

উদাহরণ–52. $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x-2}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–1986]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x-2}}$ ধরি $x-2 = z^2$

$\therefore dx = 2z\,dz$

$= \int \frac{2z\,dz}{(z^2+2-3).z}$ $\therefore x = z^2+2$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2-1} = 2.\frac{1}{2} ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c = ln\left|\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}+1}\right| + c.$$

উদাহরণ–53. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–2002, B.Sc(Pass)–2010, DUH–1958]

সমাধান ঃ $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}$ ধরি $x-1=z^2$

$\therefore z=(x-1)^{1/2}$

$\therefore dx=2z\,dz$

$\therefore x=z^2+1$

$$=\int \frac{(z^2+1)^3.2z\,dz}{z}$$

$$=2\int(z^6+3z^4+3z^2+1)\,dz=2\left[\frac{z^7}{7}+\frac{3z^5}{5}+z^3+z\right]+c$$

$$=\frac{2}{7}(x-1)^{7/2}+\frac{6}{5}(x-1)^{5/2}+2(x-1)^{3/2}+2(x-1)^{1/2}+c.$$

উদাহরণ–54. $\int \frac{(x^2+x)dx}{(x+2)\sqrt{x-1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{(x^2+x)dx}{(x+2)\sqrt{x-1}}$ ধরি $x-1=z^2$

$\therefore z=(x-1)^{1/2}$

$dx=2z\,dz$

$\therefore x=z^2+1$

$$=\int \frac{(z^2+1)^2+(z^2+1)}{(z^2+1+2).z}.2z\,dz$$

$$=2\int \frac{z^4+3z^2+2}{z^2+3}\,dz=2\int\left(z^2+\frac{2}{z^2+3}\right)dz$$

$$=\frac{2}{3}z^3+4.\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{3}}+c=\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+\frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{x-1}{3}\right)}+c.$$

উদাহরণ–55. $\int \frac{dx}{(x^2-16)\sqrt{x+1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(x^2-16)\sqrt{x+1}}$ ধরি $x+1=z^2$

$\therefore z=\sqrt{x+1}$

$\therefore dx=2z\,dz$

$\therefore x=z^2-1$

$$=\int \frac{2z\,dz}{\{(z^2-1)^2-16\}.z}$$

$$=2\int\frac{dz}{z^4-2z^2-15}=2\int\frac{dz}{(z^2-5)(z^2+3)}=\frac{2}{8}\int\left(\frac{1}{z^2-5}-\frac{1}{z^2+3}\right)dz$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{z^2-(\sqrt{5})^2}\,dz-\frac{1}{4}\int\frac{1}{z^2+(\sqrt{3})^2}\,dz$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{5}}{z+\sqrt{5}}\right|-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)+c$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5}}\right|-\frac{1}{4\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

12.14. $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{(px^2+qx+r)}}$ এর মান নির্ণয় কর।

ধরি $ax+b=\frac{1}{z}$ $\therefore x=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{z}-b\right)$ $\therefore a\,dx=-\frac{1}{z^2}dz$ বা $dx=-\frac{1}{az^2}dz$

$$\therefore\int\frac{dx}{(ax+b)\sqrt{(px^2+qx+r)}}$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{az^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{p\left\{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{z}-b\right)\right\}^2+q\left\{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{z}-b\right)\right\}+r}}$$

$$=-\int\frac{dz}{z\sqrt{p\left(\frac{1}{z}-b\right)^2+qa\left(\frac{1}{z}-b\right)+ra^2}}$$

$$=-\int\frac{dz}{z\sqrt{\{(pb^2-qab+ra^2)+(qa-2pb)\,1/z+p/z^2\}}}$$

$$=-\int\frac{dz}{\sqrt{(pb^2-qab+ra^2\}z^2+(qa-2pb)z+p)}}$$

$$=-\int\frac{dz}{\sqrt{Az^2+Bz+C}}$$

যেখানে $A=pb^2-qab+ra^2$, $B=qa-2pb$, $C=p$

এখন 12.10 এর নিয়ম অনুযায়ী মান নির্ণয় করা যাইবে।

আকারের বৈশিষ্ট ঃ হরে $\sqrt{\ }$ এর মধ্যে দ্বিঘাত রাশি এবং $\sqrt{\ }$ এর বাহিরে একঘাত বিশিষ্ট রাশি থাকিবে।

সমাধানের নিয়ম ঃ $\sqrt{\ }$ এর বাহিরের একঘাতিক রাশিকে $\frac{1}{z}$ ধরিতে হইবে।

উদাহরণ–56. মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$ **[DUH–1996]**

(ii) $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ **[NUH(NM)–2005]**

সমাধান ঃ (i) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$ ধরি $x-1=\frac{1}{z}$ $\therefore x=\frac{1}{z}+1$

$\therefore dx=-\frac{1}{z^2}dz$

$$\therefore\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\left(\frac{1}{z}+1\right)^2+1}}=-\int\frac{dz}{z\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}+2}}$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{2z^2+2z+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\left(\frac{2z+1}{1}\right)+c$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+c.$$

(ii) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ ধরি, $1+x=\frac{1}{z}$

$\therefore dx = -\frac{1}{z^2}dz$

$$= \int \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{1-\left(\frac{1}{z}-1\right)^2}}$$ এবং $x=\frac{1}{z}-1$

$$= -\int \frac{dz}{z\sqrt{\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{2z-1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{2\,dz}{\sqrt{2z-1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2z-1}+c = -\sqrt{\left(\frac{2}{1+x}-1\right)}+c = -\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}+c$$

উদাহরণ–57. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–1994, BSc(Pass)–08, DUH–1981, CUH–1995]

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}$

$$= \int \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{1+2\left(\frac{1}{z}-1\right)-\left(\frac{1}{z}-1\right)^2}}$$ ধরি $x+1=\frac{1}{z}$

$$= \int \frac{-dz}{z\sqrt{1+\frac{2}{z}-2-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}-1}}$$ $\therefore x=\frac{1}{z}-1$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{-2z^2+4z-1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{-z^2+2z-1/2}}$$ $\therefore dx=-\frac{1}{z^2}dz$

$\therefore z=\frac{1}{x+1}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{-(z-1)^2+1-1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-(z-1)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\{\sqrt{2}(z-1)\}+c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{-x\sqrt{2}}{x+1}\right)+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{x\sqrt{2}}{x+1}\right)+c.$$

উদাহরণ–58. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[BScEngg (KUET) –1993]

সমাধান ঃ $\int \frac{x\,dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx - \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$$ ধরি $x+1=\frac{1}{z}$

$dx=-\frac{1}{z^2}dz$

$$= \sinh^{-1}x - \int \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2+1}}$$

$$= \sinh^{-1}x + \int \frac{dz}{z\sqrt{\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+2}} = \sinh^{-1}x + \int \frac{dz}{\sqrt{1-2z+2z^2}}$$

$$= \sinh^{-1}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{2}-z+z^2}} = \sinh^{-1}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{2}+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$$

$$= \sinh^{-1}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \sinh^{-1}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}(2z-1)+c = \sinh^{-1}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+c.$$

উদাহরণ–59. $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+x^4}}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH–1962, BScEngg (KUET)–1995]

সমাধান ঃ $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+x^4}}dx = \int \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx$

$$= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}}\, dx \qquad \text{ধরি } x + \frac{1}{x} = z$$

$$\therefore \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = dz$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - (\sqrt{2})^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) + c = \cosh^{-1}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{2}x}\right) + c.$$

উদাহরণ–60. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–1963, CUH–1983]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \int \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^4-1}}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} \qquad \text{ধরি } x^2 = z$$

$$= \frac{1}{2}\sec^{-1} z + c \qquad \therefore 2x\,dx = dz$$

$$= \frac{1}{2}\sec^{-1}(x^2) + c. \qquad \text{বা } x\,dx = \frac{1}{2}dz$$

উদাহরণ–61. $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–1965]**

সমাধান ঃ $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx = \int \frac{a^2+x^2}{x\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx + a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \sqrt{a^2+x^2} + a^2\int \frac{-\frac{1}{z^2}\,dz}{\frac{1}{z}\sqrt{a^2+1/z^2}} \qquad \text{ধরি } x = \frac{1}{z}$$

$$dx = -\frac{1}{z^2}dz$$

$$= \sqrt{a^2+x^2} - a^2\int \frac{dz}{\sqrt{a^2z^2+1}} = \sqrt{a^2+x^2} - a\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{a^2+x^2} - a\sinh^{-1}(az) + c = \sqrt{a^2+x^2} - a\sinh^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) + c.$$

12.15. $\int \frac{x\,dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$ এর মান নির্ণয়।

ধরি $cx^2 + d = z^2 \quad \therefore x^2 = \frac{z^2-d}{c} \quad \therefore 2c\,x\,dx = 2z\,dz$ বা $x\,dx = \frac{1}{c}z\,dz$

$$\therefore \int \frac{x\,dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}} = \int \frac{\frac{1}{c}z\,dz}{\left(a.\frac{z^2-d}{c} + b\right).z}$$

$$= \int \frac{dz}{az^2 - ad + bc} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2 + \left(\frac{\sqrt{bc-ad}}{\sqrt{a}}\right)^2} \quad \text{যখন } bc > ad$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{bc-ad}}\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{a}z}{\sqrt{bc-ac}}\right\} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{bc-ad}}\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{a}\sqrt{cx^2+d}}{\sqrt{bc-ad}}\right\} + c.$$

যদি $bc < ad$ হয় তবে *ln* এর সূত্র হইবে।

আকারের বৈশিষ্ট্য ঃ হরে $\sqrt{\ }$ এর মধ্যে দ্বিঘাত ও $\sqrt{\ }$ এর বাহিরে দ্বিঘাত রাশি এবং লবে x পদ থাকিবে।

সমাধানের নিয়ম ঃ $\sqrt{\ }$ এর মধ্যের দ্বিঘাত রাশিকে z^2 ধরিতে হইবে।

12.16. $\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$ এর মান নির্ণয়।

ধরি $x = \frac{1}{z} \quad \therefore dx = -\frac{1}{z^2}dz$

$$\therefore \int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}} = \int \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\left(\frac{a}{z^2}+b\right)\sqrt{\frac{c}{z^2}+d}} = -\int \frac{z\,dz}{(bz^2+a)\sqrt{dz^2+c}}$$

ইহা 12.15 এর নিয়মে সমাধান করিতে হইবে।

বৈশিষ্ট্য ঃ হরে $\sqrt{\ }$ এর মধ্যে দ্বিঘাত এবং $\sqrt{\ }$ এর বাহিরে দ্বিঘাত রাশি থাকিবে।

সমাধানের নিয়ম ঃ $x = \frac{1}{z}$ ধরিতে হইবে।

উদাহরণ–62. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–1997, DUH–1985, 1990, BScEngg (KUET)–1993]

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$

$$= \int \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\left(\frac{1}{z^2}+1\right)\sqrt{\frac{1}{z^2}+4}} \qquad \text{ধরি } x = \frac{1}{z}$$

$$\therefore dx = -\frac{1}{z^2}dz$$

$$= -\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)\sqrt{4z^2+1}}$$

$$= -\int \frac{\frac{1}{4}u\,du}{\left(\frac{u^2-1}{4}+1\right).u}$$

$$= -\int \frac{du}{u^2+3}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)+c$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4z^2+1}}{\sqrt{3}}\right)+c = -\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{x\sqrt{3}}\right)+c.$$

ধরি $4z^2+1=u^2$

$\therefore z^2=\frac{u^2-1}{4}$

$\therefore 8z\,dz = 2u\,du$

বা $z\,dz = \frac{1}{4}u\,du$

উদাহরণ–63. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–2010, DUH–81, 86, 87, RUH–84, 88, 95]

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ ধরি $x=\frac{1}{z}$ $\therefore dx=-\frac{1}{z^2}dz$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}}$$

$$= -\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)\sqrt{z^2-1}}$$

$$= -\int \frac{u\,du}{(u^2+1+1).u}$$

$$= -\int \frac{du}{u^2+(\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{2}}\right)+c, \text{ [u এর মান বসিয়ে]}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}{\sqrt{2}}\right)+c \text{ [z এর মান বসিয়ে]}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}\right)+c.$$

ধরি $z^2-1=u^2$

$\therefore z\,dz = u\,du$

$\therefore z^2 = u^2+1$

উদাহরণ–64. $\int \frac{x+5}{(x^2+2)\sqrt{x^2+3}}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[BScEngg (KUET)–1995]

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \frac{x+5}{(x^2+2)\sqrt{x^2+3}}dx$

বা $I = \int \frac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+3}}dx + 5\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+3}} = I_1 + I_2$ (ধরি) ... (1)

$$\therefore I_1 = \int \frac{x\,dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+3}}$$

$$= \int \frac{z\,dz}{(z^2-3+2)z}$$

$$= \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+c_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+3}-1}{\sqrt{x^2+3}+1}\right)+c_1$$

ধরি $x^2+3=z^2$

$\therefore x\,dx = z\,dz$

$\therefore x^2 = z^2-3$

$$\therefore I_2 = 5\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+3}}$$

$$= 5\int \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\left(\frac{1}{u^2}+2\right)\sqrt{\frac{1}{u^2}+3}}$$

$$= -5\int \frac{u\,du}{(2u^2+1)\sqrt{3u^2+1}}$$

$$= -5\int \frac{\frac{1}{3}t\,dt}{\left(2.\frac{t^2-1}{3}+1\right).t}$$

$$= -\frac{5}{3}.3\int \frac{dt}{2t^2-2+3}$$

$$\therefore I_2 = -5\int \frac{dt}{2t^2+1} = -\frac{5}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)+c_2$$

$$= -\frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}.\sqrt{3u^2+1})+c_2 \quad \text{[t এর মান বসিয়ে]}$$

$$= -\frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{x^2}+1}\right)+c_2 \quad \text{[u এর মান বসিয়ে]}$$

$$= -\frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{6+2x^2}{x^2}\right)}+c_2 = -\frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2(x^2+3)}}{x}\right)+c_2$$

আবার ধরি $3u^2+1=t^2$

$\therefore 6u\,du = 2t\,dt$

$\therefore u\,du = \frac{1}{3}t\,dt$

$\therefore u^2 = \frac{t^2-1}{3}$

(1) নং এ I_1 ও I_2 এর মান বসিয়ে পাই

$$I = \frac{1}{2} ln \left| \frac{\sqrt{x^2+3}-1}{\sqrt{x^2+3}+1} \right| - \frac{5\sqrt{2}}{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{2(x^2+3)}}{x} + (c_1 + c_2)$$

$$= \frac{1}{2} ln \left| \frac{\sqrt{(x^2+3)}-1}{(\sqrt{x^2+3}+1)} \right| - \frac{5\sqrt{2}}{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{2(x^2+3)}}{x} + c$$

উদাহরণ–65. $\int \sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)(x-1)}} dx$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{2} . 2\sqrt{x^2-1} + \cosh^{-1} x + c = \sqrt{x^2-1} + \cosh^{-1} x + c.$$

উদাহরণ–66. $\int x \sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int x \sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)} dx = \int \frac{x(a-x)}{\sqrt{(a-x)(a+x)}} dx$

$$= \int \frac{(a^2-x^2)+ax-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx + \int \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}} dx - a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2} . 2\sqrt{a^2-x^2} - a^2 . \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$= \left(\frac{1}{2}x - a\right)\sqrt{a^2-x^2} - \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

উদাহরণ–67. $\int \sqrt{\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমধান ঃ $\int \sqrt{\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)} dx = \int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{(3x+2)(2x+1)}} = \int \frac{2x+1}{\sqrt{6x^2+7x+2}} dx$

$$= \int \frac{\frac{1}{6}(12x+7) - \frac{1}{6}}{\sqrt{6x^2+7x+2}} dx = \frac{1}{6} \int \frac{12x+7}{\sqrt{6x^2+7x+2}} dx - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\sqrt{6x^2+7x+2}}$$

$$= \frac{1}{6} . 2\sqrt{(6x^2+7x+2)} - \frac{1}{6} . \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{7}{6}x+\frac{2}{6}}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{6x^2+7x+2} - \frac{1}{6\sqrt{6}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{7}{12}\right)^2 + \frac{1}{3} - \frac{49}{144}}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{6x^2+7x+2} - \frac{1}{6\sqrt{6}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{7}{12}\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{6x^2+7x+2} - \frac{1}{6\sqrt{6}} \cosh^{-1}\left(\frac{x+\frac{7}{12}}{\frac{1}{12}}\right) + c.$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(6x^2+7x+2)} - \frac{1}{6\sqrt{6}} \cosh^{-1}(12x+7) + c.$$

উদাহরণ–68. $\int \frac{dx}{x(1+x^{10})}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–2001, 2007]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{x(1+x^{10})}$

$$= -\int \frac{z^{-11/10}\, dz}{10z^{-1/10}\left(1+\frac{1}{z}\right)}$$

ধরি $x^{10} = \frac{1}{z}$

$\Rightarrow x = z^{-1/10}$

$\therefore dx = -\frac{z^{-11/10}}{10} dz$

$$= -\frac{1}{10} \int \frac{dz}{z+1} = -\frac{1}{10} ln|z+1| + c$$

$$= -\frac{1}{10} ln \left|\frac{1}{x^{10}}+1\right| + c = -\frac{1}{10} ln|x^{-10}+1| + c.$$

নোট ঃ $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)^m}$ আকারের ইন্টিগ্রালে যদি m যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে $x^n = \frac{1}{z}$ ধরিয়া মান নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ–69. মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\int \frac{dx}{x^{1/2}(1+x)^{5/2}}$ **[DUH–1992]** (ii) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x-1)^3}$

সমাধান ঃ (i) $\int \frac{dx}{x^{1/2}(1+x)^{5/2}}$ ধরি $1+x=zx$

$\Rightarrow x=\frac{1}{z-1}$

$\therefore dx=-\frac{dz}{(z-1)^2}$

$=\int \frac{-dz}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}(zx)^{5/2}}$

$=-\int \frac{dz}{z^{5/2}(z-1)^2x^3}$

$=-\int \frac{(z-1)^3}{z^{5/2}(z-1)^2}dz \quad \left[\because x=\frac{1}{z-1}\right]$

$=-\int \frac{z-1}{z^{5/2}}dz=-\int z^{-3/2}dz+\int z^{-5/2}dz$

$=2z^{-1/2}-\frac{2}{3}z^{-3/2}+c$

$=2\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-1/2}-\frac{2}{3}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-3/2}+c$

$=2\left(\frac{x}{1+x}\right)^{1/2}-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{3/2}+c.$

(ii) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x-1)^3}$ ধরি $x-2=z(x-1)$

$\Rightarrow x=\frac{2-z}{1-z}$

$dx=\frac{(1-z)(-1)-(2-z)(-1)}{(1-z)^2}dz$

$=\frac{dz}{(1-z)^2}$

$=\int \frac{dz}{(1-z)^2}\cdot\frac{1}{z^2(x-1)^5}$

$=\int \frac{dz}{z^2(1-z)^2\left(\frac{2-z}{1-z}-1\right)^5}$

$=\int \frac{(1-z)^5\,dz}{z^2(1-z)^2}$

$=\int \frac{1-3z+3z^2-z^3}{z^2}dz$

$=\int\left(\frac{1}{z^2}-\frac{3}{z}+3-z\right)dz$

$=-\frac{1}{z}-3\ln|z|+3z-\frac{z^2}{2}+c$

$=-\frac{x-1}{x-2}-3\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+3\left(\frac{x-2}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2+c.$

নোট ঃ $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^p(x-\beta)^q}$ আকারের ইন্টিগ্রালে যদি $p+q$ যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা এবং $p+q>1$ হয়, তবে $x-\alpha=z(x-\beta)$ বা $x-\beta=z(x-\alpha)$ ধরিয়া মান নির্ণয় করা হয়।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

12.C.1. $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px+q}}$ এর মান নির্ণয়ের কৌশল বর্ণনা কর। [State the technique to find the value of $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px+q}}$.]

Ans : প্রদত্ত ইনটিগ্র্যালের মান নির্ণয়ের জন্য $px+q=z^2$ ধরিতে হইবে অর্থাৎ '$\sqrt{\ }$' এর ভিতর একঘাত রাশিমালা থাকিলে উহাকে z^2 ধরিতে হয়।

12.C.2. $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px^2+qx+r}}$ এর মান নির্ণয়ের কৌশল বর্ণনা কর। [State the technique to find the value of $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px^2+qx+r}}$.]

Ans : $ax+b=\frac{1}{z}$ ধরিয়া প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে মান নির্ণয় করা যাইবে।

12.C.3. $\int \frac{x\,dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$ এর মান নির্ণয়ের কৌশল বর্ণনা কর। [State the technique to find the value of $\int \frac{x\,dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$.]

Ans : $cx^2+d=z^2$ ধরিয়অ প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে মান নির্ণয় করা যাইবে।

12.C.4. $\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$ এর মান নির্ণয়ের প্রথম ধাপ কি? [What is the first step to find the value of $\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$?]

Ans : প্রদত্ত ইনটিগ্র্যালের মান নির্ণয়ের প্রথম ধাপ হিসাবে $x=\frac{1}{z}$ ধরিতে হইবে।

12.C.5. $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)^m}$, $m\in\mathbb{N}$ ইনটিগ্র্যালের মান নির্ণয়ের প্রক্রিয়া কি? [What is the process to find the value of the integral $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)^m}$, $m\in\mathbb{N}$?]

Ans : প্রদত্ত ইনটিগ্র্যালের মান নির্ণয়ের জন্য $x^n=\frac{1}{z}$ ধরিতে হইবে।

EXERCISE–12(C)

ইন্টিগ্র্যাল সমূহ নির্ণয় কর।

1. $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x-1}}$ **[RUH–1961, 1986]**

2. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

3. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{(4x+3)}}$ **[DUH–1989]**

4. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}}$ **[DUH–1982]**

5. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$

6. $\int \frac{x-2}{x\sqrt{x+1}}dx$ **[RUH–1962]**

7. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ **[DUH–1960]**

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$ **[DUH–1960]**

9. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ **[DUH–1991]**

10. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2+4x+1}}$

12. $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x^2+3x+2}}$ **[NUH(NM)–2008, DUH–91, 02]**

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ **[DUH–1962]**

14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$ **[NUH–2003, DUH–1978]**

15. $\int \frac{2x\,dx}{(1-x^2)\sqrt{x^4-1}}$ **[RUH–1979]**

16. $\int \frac{\sqrt{9x^2-1}}{x}dx$ **[DUH–1987, RUH–1994]**

17. $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4-1}}dx$

18. $\int \frac{(1+2x)dx}{(1+3x)\sqrt{x^2+2x+5}}$

19. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{x}$

20. $\int \frac{x\,dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$

21. $\int \frac{x+1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+9}}dx$

22. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ **[NUH(NM)–02]**

23. $\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}$

24. $\int \frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)\sqrt{x^2-2}}dx$

25. $\int \sqrt{\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)}dx$

26. $\int x\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}dx$

27. $\int \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}dx$ **[NUH(NM)–05]**

28. $\int \sqrt{\left(\frac{x-3}{x-4}\right)}dx$

29. $\int \frac{x^3\,dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}$ **[NUH–04]**

30. $\int \frac{dx}{x(a+bx^n)^3}$ **[NUH–04, 08]**

31. $\int \frac{dx}{x(6+7x^{20})}$

32. $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^3}$ **[NUH–2001]**

ANSWER–12(C)

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2}}\right|+c$

2. $2\tan^{-1}\sqrt{1+x}+c$

3. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x+3}-1}{\sqrt{4x+3}+1}\right|+c$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}}\right|+c$

5. $\ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|+c$

6. $-2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+2\sqrt{x+1}+c$

7. $-\frac{1}{\sqrt{5}}\sinh^{-1}\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)+c$

8. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh^{-1}\left(\frac{4+x}{3x}\right)+c$

9. $-\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}+c$

10. $\sin^{-1}\left\{\frac{3x+1}{(1+x)\sqrt{5}}\right\}+c$

11. $\ln x-\ln|1+2x+\sqrt{9x^2+4x+1}|+c$

12. $\sec^{-1}(2x+3)+c$

13. $-\sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+c$

14. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right)+c$

15. $-\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}+c$

16. $\sqrt{9x^2-1}-\sec^{-1}(3x)+c$

17. $\frac{1}{2}(\cosh^{-1}x^2-\sec^{-1}x^2)+c$

18. $\frac{2}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{1}{3\sqrt{40}}\sinh^{-1}\left(\frac{7+x}{1+3x}\right)+c$

19. $\sqrt{a^2-x^2}+a\,ln\left(\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)+c$

20. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+c$

21. $\frac{\sqrt{5}}{10}ln\left|\frac{\sqrt{(x^2+9)}-\sqrt{5}}{\sqrt{(x^2+9)}+\sqrt{5}}\right|+\frac{\sqrt{5}}{10}\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}x}{2\sqrt{x^2+9}}\right\}+c$

22. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c$

23. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}+c$

24. $\cosh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{x^2-2}{3}\right)}+\frac{1}{\sqrt{3}}ln\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{3}x-\sqrt{x^2-2}}$

25. $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}+\frac{1}{2}ln\,(2x+\sqrt{4x^2-1})+c$

26. $\frac{1}{2}\cos^{-1}x+\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{1-x^2}+c$

27. $a\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)-\sqrt{a^2-x^2}+c$

28. $\sqrt{(x-3)(x-4)}+ln\{\sqrt{(x-3)}+\sqrt{(x-4)}\}+c.$

29. $\frac{1}{4\sqrt{2}}ln\left[\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+x^4}}\right]+c$

30. $\frac{1}{a^3n}\left\{\frac{b^2x^{2n}}{2(a+bx^n)^2}-\frac{2bx^n}{a+bx^n}-ln\left|\frac{a+bx^n}{x^n}\right|\right\}+c.$

31. $\frac{1}{120}ln\left|\frac{x^{20}}{6+7x^{20}}\right|+c$

32. $-\frac{ax+b}{x}+ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+\frac{3a^2x}{ax+b}-\frac{a^3x^2}{2(ax+b)^2}+c$

ইন্টিগ্রেশনের কলাকৌশল–12(D)

12.17. $\int\frac{dx}{a+b\cos x}$ এর মান নির্ণয়। **[CUH–1982]**

ধরি $I=\int\frac{dx}{a+b\cos x}$

$=\int\frac{dx}{a+b.\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}}\quad\left[\because\cos x=\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}\right]$

$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{(a+b)+(a-b)\tan^2 x/2}$ ধরি $\tan\frac{x}{2}=z$

$=\int\frac{2\,dz}{(a+b)+(a-b)z^2}$ $\therefore\sec^2\frac{x}{2}dx=2dz$

যখন $a>b$ ঃ

$I=\frac{2}{a-b}\int\frac{dz}{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)+z^2}=\frac{2}{a-b}.\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan^{-1}\left(\frac{z\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\right)+c$

$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x/2.\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\right)+c$

$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos^{-1}\left(\frac{1-\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\right)+c\quad\left[\because 2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos^{-1}\left\{\frac{(a+b)\cos^2\frac{x}{2}-(a-b)\sin^2\frac{x}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2}+(a-b)\sin^2\frac{x}{2}}\right\}+c$

$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos^{-1}\left[\frac{a\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}{a\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}\right]+c$

$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos^{-1}\left(\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}\right)+c$

যখন $a < b$ ঃ $I = \frac{2}{b-a}\int \frac{dz}{\frac{b+a}{b-a} - z^2} = \frac{2}{b-a}\int \frac{dz}{\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right)^2 - z^2}$

$= \frac{2}{b-a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} ln \left\{\frac{\sqrt{\frac{b+a}{b-a}} + z}{\sqrt{\frac{b+a}{b-a}} - z}\right\} + c$

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} ln \left\{\frac{\sqrt{(b+a)} + \sqrt{(b-a)}.\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{(b+a)} - \sqrt{(b-a)}\tan\frac{x}{2}}\right\} + c$

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} 2\tanh^{-1}\left[\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+a}\right)}\tan\frac{x}{2}\right] + c \left[\because ln\frac{A+y}{A-y} = 2\tanh^{-1}\frac{y}{A}\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \cosh^{-1}\left\{\frac{1 + \frac{b-a}{b+a}\tan^2\frac{x}{2}}{1 - \frac{b-a}{b+a}\tan^2\frac{x}{2}}\right\} + c \left[\because 2\tanh^{-1}x = \cosh^{-1}\frac{1+x^2}{1-x^2}\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \cosh^{-1}\frac{b\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) + a\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)}{b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + a\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)} + c$

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \cosh^{-1}\left(\frac{b + a\cos x}{b\cos x + a}\right) + c.$

12.18. $\int \frac{dx}{a + b\sin x}$ এর মান নির্ণয়।

[DUH-1977, 1980, CUH-1965, 1983, 198

ধরি $I = \int \frac{dx}{a + b\sin x}$

$= \int \frac{dx}{a + b.\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}\right)} \left[\because \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}\right]$

$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{a + a\tan^2\frac{x}{2} + 2b\tan\frac{x}{2}}$ ধরি $\tan\frac{x}{2} = z$

$\therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2dz$

$= \int \frac{2\,dz}{a + az + 2bz} = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{z^2 + \frac{2b}{a}z + 1} = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{\left(z + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$

যখন $a > b$ ঃ $I = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{\left(z + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)^2}$

$= \frac{2}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \tan^{-1}\left(\frac{z + \frac{b}{a}}{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\right) + c$

$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \tan^{-1}\left(\frac{a\tan\frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) + c$

যখন $a < b$ ঃ $I = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{\left(z + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)^2}$

$= \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}} ln \frac{\left(z + \frac{b}{a}\right) - \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}}{\left(z + \frac{b}{a}\right) + \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}} + c$

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} ln \left(\frac{a\tan\frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}}\right) + c.$

12.19. $\int \frac{dx}{a + b\cosh x}$ এর মান নির্ণয়।

ধরি $I = \int \frac{dx}{a + b\cosh x}$

$= \int \frac{dx}{a + b\frac{1 + \tanh^2\frac{x}{2}}{1 - \tanh^2\frac{x}{2}}} \left[\because \cosh x = \frac{1 + \tanh^2\frac{x}{2}}{1 - \tanh^2\frac{x}{2}}\right]$

$= \int \frac{\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}}{(a+b) - (a-b)\tanh^2\frac{x}{2}} \left[\because 1 - \tanh^2\frac{x}{2} = \operatorname{sech}^2\frac{x}{2}\right]$

ধরি $\tanh\frac{x}{2} = z$ $\therefore \operatorname{sech}^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$

$\therefore I = \int \frac{2\,dz}{(a+b) - (a-b)z^2}$

যখন $a > b$ ঃ $I = \frac{2}{a-b}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 - z^2}}$

$$= \frac{2}{a-b}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}} ln \left\{\frac{\sqrt{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)}+z}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)}-z}\right\}+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} ln\left(\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\tanh\frac{x}{2}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\tanh\frac{x}{2}}\right)+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}.2\tanh^{-1}\left[\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\tan\frac{x}{2}\right]+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cosh^{-1}\left(\frac{b+a\cosh x}{b\cosh x+a}\right)+c$$

$$\left[\because \cosh x = \cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2} \text{ এবং } \cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}=1\right]$$

যখন $a < b$ ঃ

$$I = \frac{2}{b-a}\int \frac{dz}{\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right)^2+z^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{b-a}.z}{\sqrt{b+a}}\right)+c.$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\tanh\frac{x}{2}\right)+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cos^{-1}\left[\frac{1-\frac{b-a}{b+a}\tanh^2\frac{x}{2}}{1+\frac{b-a}{b+a}\tanh^2\frac{x}{2}}\right]+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cos^{-1}\left(\frac{b+a\cosh x}{a+b\cosh x}\right)+c.$$

12.20. $\int \frac{dx}{a+b\sinh x}$ এর মান নির্ণয় করা জন্য

$\sinh x = \frac{2\tanh(x/2)}{1-\tanh^2(x/2)}$ বসিয়ে $\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = z$ ধরতে হবে।

12.21. $\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$ এর মান নির্ণয় করার জন্য

$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ বসিয়ে $\tan\frac{x}{2} = z$ ধরতে হবে।

12.22. $\int \frac{p\cos x+q\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx$ আকারের ইন্টিগ্র্যালের জন্য, লব = L (হর) + M (হরের অন্তরক সহগ) ধরিতে হইবে, অতঃপর sin x ও cos x এর সহগে সমীকৃত করে L ও M মান নির্ণয় করিতে হইবে।

12.23. $\int \frac{p\sin x+q\cos x+r}{a\cos x+b\sin x+c}dx$ আকারের ইন্টিগ্র্যালের জন্য, লব = L (হর) + M (হরের অন্তরক সহগ) + N ধরিতে হইবে, অতঃপর sin x, cos x এর সহগ ও ধ্রুবপদ সমীকৃত করিয়া L, M, N এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

উদাহরণ–70. $\int \frac{dx}{5+4\cos 2x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{5+4\cos 2x} = \int \frac{dx}{5+4.\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}$

$$= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{9+\tan^2 x} \quad \left| \begin{array}{l} \text{ধরি } \tan x = z \\ \therefore \sec^2 x\,dx = dz \end{array} \right.$$

$$= \int \frac{dz}{3^2+z^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{z}{3}\right)+c = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right)+c.$$

উদাহরণ–71. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–87, RUH–86]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{5+3\cos x} = \int \frac{dx}{5+3.\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}}$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{8+2\tan^2\frac{x}{2}} \quad \text{ধরি } \tan\frac{x}{2} = z$$

$$= \int \frac{2\,dz}{8+2z^2} = \int \frac{dz}{2^2+z^2} \quad \therefore \sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}dx = dz$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)+c = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)+c. \quad \text{বা } \sec^2\frac{x}{2}dx = 2\,dz$$

উদাহরণ-72. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-2008, B.Sc(Pass)-2010]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$

$$= \int \frac{dx}{3+2\cdot\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \int \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx}{3+3\tan^2\frac{x}{2}+2-2\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{2+5+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \text{ধরি, } \tan\frac{x}{2}=z$$

$$= \int \frac{2\,dz}{(\sqrt{5})^2+z^2} \qquad \therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{5}}\right)+c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right)+c$$

উদাহরণ-73. $\int \frac{dx}{1+\cos\alpha\cos x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH-1990]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{1+\cos\alpha.\cos x} = \int \frac{dx}{1+\cos\alpha.\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}}$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{(1+\cos\alpha)+(1-\cos\alpha)\tan^2 x/2}$$

$$= \int \frac{2dz}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}z^2} \qquad \text{ধরি } \tan\frac{x}{2}=z$$

$$= \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\int \frac{dz}{\cot^2\frac{\alpha}{2}+z^2} \qquad \therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2dz$$

$$= \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}.\frac{1}{\cot\frac{\alpha}{2}}.\tan^{-1}\left(\frac{z}{\cot\frac{\alpha}{2}}\right)+c$$

$$= \frac{2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2}}\right)+c$$

$$= 2\operatorname{cosec}\alpha\tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}.\tan\frac{\alpha}{2}\right)+c.$$

উদাহরণ-74. $\int \frac{dx}{5+4\sin 2x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[CUH-1984, 1989]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{5+4\sin 2x} = \int \frac{dx}{5+4.\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}}$

$$= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{5+5\tan^2 x+8\tan x} \qquad \text{ধরি } \tan x = z,\ \therefore \sec^2 x\,dx = dz$$

$$= \int \frac{dz}{5+5z^2+8z} = \frac{1}{5}\int \frac{dz}{z^2+\frac{8}{5}z+1}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{4}{5}\right)^2+1-\frac{16}{25}} = \frac{1}{5}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{5}.\frac{5}{3}\tan^{-1}\left(\frac{z+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right)+c = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5z+4}{3}\right)+c$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5\tan x+4}{3}\right)+c.$$

উদাহরণ-75. $\int \frac{dx}{4+5\sin x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH-88, CUH-87]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{4+5\sin x} = \int \frac{dx}{4+5.\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}}$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{4+4\tan^2\frac{x}{2}+10\tan\frac{x}{2}} \qquad \text{ধরি } \tan\frac{x}{2}=z,\ \therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$$

$$= \int \frac{2dz}{4+4z^2+10z} = \int \frac{dz}{2\left(z^2+\frac{5}{2}+1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2.\frac{3}{4}}\ln\left|\frac{z+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}{z+\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}\right|+c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{2\tan\frac{x}{2}+4}\right|+c.$$

উদাহরণ-76. $\int \frac{dx}{1+2\cosh x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{1+2\cosh x} = \int \frac{dx}{1+2.\frac{1+\tanh^2 x/2}{1-\tanh^2 x/2}} = \int \frac{\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}\,dx}{3+\tanh^2\frac{x}{2}}$

$= \int \frac{2\,dz}{3+z^2}$ ধরি $\tanh\frac{x}{2} = z$

$= 2\int \frac{dz}{(\sqrt{3})^2+z^2}$ $\therefore \operatorname{sech}^2\frac{x}{2}\,dx = 2dz$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)+c = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\tanh\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+c.$

উদাহরণ-77. $\int \frac{dx}{2\sinh x - 1}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{2\sinh x-1} = \int \frac{dx}{2.\frac{2\tanh x/2}{1-\tanh^2 x/2}-1}$

$= \int \frac{\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}\,dx}{4\tanh\frac{x}{2}-1+\tanh^2\frac{x}{2}}$ ধরি $\tanh\frac{x}{2} = t$

$\therefore \operatorname{sech}^2\frac{x}{2}\,dx = 2dz$

$= \int \frac{2\,dz}{z^2+4z-1} = 2\int \frac{dz}{(z+2)^2-(\sqrt{5})^2}$

$= 2\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z+2-\sqrt{5}}{z+2+\sqrt{5}}\right|+c = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\tanh\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{\tanh\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right|+c.$

উদাহরণ-78. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x - 3}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-1994]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x-3} = \int \frac{dx}{2.\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}-\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}-3}$

$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{4\tan\frac{x}{2}-1+\tan^2\frac{x}{2}-3-3\tan^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{4\tan\frac{x}{2}-4-2\tan^2\frac{x}{2}}$

$= \int \frac{2\,dz}{4z-4-2z^2}$ ধরি $\tan\frac{x}{2} = z$

$= -\int \frac{dz}{z^2-2z+2}$ $\therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$

$= -\int \frac{dz}{(z-1)^2+1} = -\tan^{-1}(z-1)+c = -\tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)+c.$

উদাহরণ-79. $\int \frac{dx}{3\sin x+2\cos x+5}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH-2004, RUH-1987]

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{3\sin x+2\cos x+5}$

$= \int \frac{dx}{3.\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}+2.\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}+5}$

$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{6\tan\frac{x}{2}+7+3\tan^2\frac{x}{2}}$ ধরি $\tan\frac{x}{2} = z$

$\therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$

$= \int \frac{2dz}{3z^2+6z+7}$

$= \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2+2z+\frac{7}{3}} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{(z+1)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z+1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)+c = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)}{2}\right\}+c.$

উদাহরণ-80. $\int \frac{1+2\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{1+2\cos x}{1+2\sin x}\,dx = \int \frac{1}{1+2\sin x}\,dx + \int \frac{2\cos x}{1+2\sin x}\,dx$

$= \int \frac{1}{1+2.\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}}\,dx + \ln|1+2\sin x|$

$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}+4\tan\frac{x}{2}} + \ln|1+2\sin x|$

$= \int \frac{2\,dz}{1+z^2+4z} + \ln|1+2\sin x|$ ধরি $\tan\frac{x}{2} = z$

$= 2\int \frac{dz}{(z+2)^2-3} + \ln|1+2\sin x|$ $\therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2dz$

$$= 2.\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left(\frac{z+2-\sqrt{3}}{z+2+\sqrt{3}}\right) + \ln|1+2\sin x| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}\right| + \ln|1+2\sin x| + c.$$

উদাহরণ-81. $\int \frac{\cos x}{2\cos x+3}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{\cos x}{2\cos x+3} = \int \frac{\frac{1}{2}(2\cos x+3)-\frac{3}{2}}{2\cos x+3}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{2\cdot\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}+3}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{5+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \text{ধরি } \tan\frac{x}{2}=z$$

$$= \frac{x}{2} - 3\int \frac{dz}{(\sqrt{5})^2+z^2} \qquad \therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$$

$$= \frac{x}{2} - 3.\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{5}}\right) + c = \frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right) + c.$$

উদাহরণ-82. $\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH(NM)-2007, DUH-1979]

সমাধান ঃ $\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x+\sin x)+(-\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(\cos x+\sin x) + c.$$

উদাহরণ-83. $\int \frac{2\sin x+3\cos x}{7\sin x-2\cos x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH-05, NUH(NM)-09, DUH-64, 86, 92, CUH-89]

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \frac{2\sin x+3\cos x}{7\sin x-2\cos x}\,dx$ ..... (1) এবং

$$2\sin x+3\cos x = L(7\sin x-2\cos x) + M\frac{d}{dx}(7\sin x-2\cos x)$$

$$= L(7\sin x-2\cos x) + M(7\cos x+2\sin x)$$

$$= (7L+2M)\sin x + (-2L+7M)\cos x$$

উভয়পক্ষ হতে sin x ও cos x রে সহগ সমীকৃত করে পাই

$7L+2M=2$ এবং $-2L+7M=3$

অর্থাৎ $7L+2M-2=0,\ -2L+7M-3=0$

বজ্রগুণন প্রক্রিয়ায়, $\frac{L}{8}=\frac{M}{25}=\frac{1}{53}$ $\therefore L=\frac{8}{53}, M=\frac{25}{53}$

$$\therefore 2\sin x+3\cos x = \frac{8}{53}(7\sin x-2\cos x) + \frac{25}{53}(7\cos x+2\sin x)$$

(1) হতে পাই

$$I = \int \frac{\frac{8}{53}(7\sin x-2\cos x)+\frac{25}{53}(7\cos x+2\sin x)}{7\sin-2\cos x}\,dx$$

$$= \frac{8}{53}\int dx + \frac{35}{53}\int \frac{7\cos x+7\sin x}{7\sin x-2\cos x}\,dx$$

$$= \frac{8x}{53} + \frac{25}{53}\ln(7\sin x-2\cos x) + c.$$

উদাহরণ-84. $\int \frac{2+3\sin x-\cos x}{1+\cos x+\sin x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[CUH-1985]

সমাধান ঃ $I = \int \frac{2+3\sin x-\cos x}{1+\cos x+\sin x}\,dx$ ..... (1)

ধরি $2+3\sin x-\cos x$

$$= L(1+\cos x+\sin x) + M\frac{d}{dx}(1+\cos x+\sin x) + N$$

$$= L(1+\cos x+\sin x) + M(-\sin x+\cos x) + N$$

$$= (L+N) + (L-M)\sin x + (L+m)\cos x$$

উভয় পক্ষ হতে sin x, cos x এর সহগ ও ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই

$L+N=2,\ L-M=3,\ L+M=-1$

সমাধান করে $L=1, M=-2, N=1$

$\therefore 2+3\sin x-\cos x = (1+\cos x+\sin x) - 2(-\sin x+\cos x) + 1$

(1) হতে পাই $I = \int \frac{(1+\cos x+\sin x)-2(-\sin x+\cos x)+1}{1+\cos x+\sin x}\,dx$

$$= x - 2\ln|1+\cos x+\sin x| + \int \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\,dx$$

$$= x - 2\ln|1+\cos x+\sin x| + I_1 \text{ (ধরি) ..... (2)}$$

$$\therefore I_1 = \int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$$

$$\text{or } I_1 = \int \frac{dx}{1+\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}+\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{2+2\tan\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\,dx = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

(2) হতে পাই $I = x - 2\ln|1+\cos x+\sin x| + \ln\left(1+\tan\frac{x}{2}\right) + c.$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

12.D.1. $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$ এর মান নির্ণয়ের প্রক্রিয়া লিখ। [Write the process to find the value of $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$.]

Ans : প্রদত্ত ইনটিগ্র্যালের মান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে $\cos x = \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2}$ বসিয়ে $\tan\frac{x}{2} = z$ ধরিতে হইবে।

12.D.2. $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$, $a > b$ এর মান কত? [What is the value of $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$, $a > b$?]

Ans : প্রদত্ত ইনটিগ্র্যালের মান $= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cos^{-1}\left(\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x}\right) + c$

12.D.3. $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$, $a < b$ এর মান কত?

Ans : প্রদত্ত ইনটিগ্র্যালের মান $= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cosh^{-1}\left(\frac{b + a\cos x}{b\cos x + a}\right) + c$

12.D.4. $\int \frac{dx}{a + b\sin x}$ এর মান নির্ণয়ের প্রক্রিয়া লিখ। [Write the process to find the value of $\int \frac{dx}{a + b\sin x}$.]

Ans : প্রদত্ত ইনটিগ্র্যালের মান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে $\sin x = \frac{2\tan x/2}{1 + \tan^2 x/2}$ বসাইতে হইবে। অতপর $\tan\frac{x}{2} = z$ ধরিতে হইবে।

12.D.5. $\int \frac{p\cos x + q\sin x}{a\cos x + b\sin x} dx$ এর মান নির্ণয়ের কৌশল লিখ। [Write the technique to find the value of the integral $\int \frac{p\cos x + q\sin x}{a\cos x + b\sin x} dx$.]

Ans : প্রদত্ত ইনটিগ্র্যালের মান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে, লব = L (হর) + M (হরের অন্তরক সহগ) ধরিতে হইবে। অতপর $\sin x$ ও $\cos x$ এর সহগ সমীকৃত করিয়া L ও M এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

EXERCISE-12(D)

ইন্টিগ্র্যাল সমূহ নির্ণয় কর।

1. $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$
2. $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$ **[NUH(NM)-2004, 2009, DUH-1955, 85]**
3. $\int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x}$
4. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$ **[DUH-1989]**
5. $\int \frac{dx}{3 + 2\sin x}$ **[NUH-07, DUH-87, 89]**
6. $\int \frac{dx}{4 + 3\cosh x}$
7. $\int \frac{dx}{4 + 3\sinh x}$
8. $\int \frac{dx}{1 - \cos x + \sin x}$ **[DUH-1991, CUH-1986]**
9. $\int \frac{dx}{3 + 2\sin x + \cos x}$ **[NUH(NM)-2005]**
10. $\int \frac{dx}{3 + 2\cos x}$ **[DUH-1988]**
11. $\int \frac{\cos x\, dx}{5 - 3\cos x}$
12. $\int \frac{dx}{1 + \tan x}$ **[NUH(NM)-07, DUH-79, 82, CUH-82]**
13. $\int \frac{dx}{a + b\tan x}$ **[NUH-04RUH-66, 78, RUH-87]**
14. $\int \frac{\cos x\, dx}{2\sin x + 3\cos x}$
15. $\int \frac{11\cos x - 16\sin x}{2\cos x + 5\sin x} dx$ **[RUH-1960]**
16. $\int \frac{1 - \sin x}{2\cos x + 3} dx$ **[NUH-1994]**
17. $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 4\cos x} dx$ **[NUH-93, 09, DUH-91, RUH-95]**
18. $\int \frac{5\sin x + 4\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx$ **[DUH-2005, CUH-1980]**
19. $\int \frac{5\cos x + 6}{2\cos x + \sin x + 3} dx$ **[NUH-1995]**
20. $\int \frac{6 + 3\sin x + 14\cos x}{3 + 4\sin x + 5\cos x} dx$ **[DUH-2006]**

21. $\int \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx$ [NUH–94, 97, DUH–86, 94, 78]

22. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + \sin x}}$

ANSWER–12(D)

1. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{(2 + \tan x/2)}{(2 - \tan x/2)} \right| + c$

2. $\frac{2}{3} \tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \tan \frac{x}{2} \right) + c$

3. $\frac{1}{\sin \alpha} \ln \left| \frac{\cos \frac{1}{2}(x - \alpha)}{\cos \frac{1}{2}(x + \alpha)} \right|$

4. $\frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{1}{3} \left(5 \tan \frac{x}{2} + 4 \right) + c$

5. $\frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(3 \tan \frac{x}{2} + 2 \right) + c$

6. $\frac{1}{\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \tanh \frac{x}{2}}{\sqrt{7} - \tanh \frac{x}{2}} \right| + c$

7. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{1 + 2 \tanh (x/2)}{4 - 2 \tanh (x/2)} \right| + c$

8. $- \ln \left| 1 + \cot \frac{1}{2} x \right| + c$

9. $\tan^{-1} \left(1 + \tan \frac{x}{2} \right) + c$

10. $\frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \tan \frac{x}{2} \right) + c$

11. $-\frac{1}{3} x + \frac{5}{6} \tan^{-1} \left(2 \tan \frac{x}{2} \right) + c$

12. $\frac{1}{2} \{ x + \ln |\sin x + \cos x| \} + c$

13. $\frac{a}{a^2 + b^2} x + \frac{b}{a^2 + b^2} \ln |a \cos x + b \sin x| + c$

14. $\frac{3}{13} x + \frac{2}{13} \ln |2 \sin x + 3 \cos x| + c$

15. $3 \ln |2 \cos x + 5 \sin x| - 2x + c$

16. $\frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \tan \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln |2 \cos x + 3| + c$

17. $\frac{18}{25} x + \frac{1}{25} \ln |3 \sin x + 4 \cos x| + c$

18. $\frac{22}{13} x - \frac{7}{13} \ln |2 \sin x + 3 \cos x| + c$

19. $2x + \ln |2 \cos x + \sin x + 3| + c$

20. $2x + \ln |3 + 4 \sin x + 5 \cos x| + c$

21. $\ln \left| \frac{\tan (x/2)}{1 + \tan (x/2)} \right| - \ln |1 + \sin x - \cos x| + c$

22. $2 \sqrt{(1 - \sin x)} - \sqrt{2} \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{4} \right) \right| + c.$

———×———

Chapter–13
আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে ইন্টিগ্রেশন
INTEGRATION BY PARTIAL FRACTION

13.1. যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ বহুপদী হয় তবে $\frac{f(x)}{g(x)}$ আকারের ফাংশনকে মূলদীয় ফাংশন বলে। এইরূপ ফাংশনের ইন্টিগ্রেশনের জন্য ফাংশনটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করিয়া নিতে হইবে।

$f(x)$ যদি $g(x)$ এর সমান বা অধিক মাত্রার হয়, তবে সাধারণ ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে $f(x)$ কে $g(x)$ দ্বারা এমন ভাবে ভাগ করিতে হইবে যেন অবশিষ্টের লবের মাত্রা $g(x)$ এর মাত্রা হইতে ছোট হয়।

যখন $f(x)$ এর মাত্রা $g(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তখন মূলদীয় ফাংশনকে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করার সাধারণ সমাধানের নিয়ম ঃ

(i) প্রত্যেক $ax + b$ উৎপাদকের জন্য প্রতিষঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ $\frac{A}{ax + b}$.

(ii) প্রত্যেক $(ax + b)^n$ উৎপাদকের জন্য প্রতিষঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \frac{A_3}{(ax + b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}.$$

(iii) প্রত্যেক $ax^2 + bx + c$ দ্বিঘাত উৎপাদকের জন্য প্রতিষঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

(iv) প্রত্যেক $(ax^2 + bx + c)^n$ পুনরাবৃত্ত দ্বিঘাত উৎপাদকের জন্য প্রতিষঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ $\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$.

একইভাবে এই নিয়মটি সম্প্রসারণ করা যায়।

13.2. মূলদীয় ফাংশনকে কভার আপ রুল (Cover-up rule) পদ্ধতির সাহায্যে সহজে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়। নিম্নে উদাহরণের মাধ্যমে নিয়মটি আলোচনা করা হইয়াছে।

উদাহরণ–1. কভার আপ রুল পদ্ধতির সাহায্যে $\frac{x + 4}{(x - 2)(x - 3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত হয়।

সমাধান ঃ ধরি $\frac{x + 4}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$ ..... (1)

এখানে $A = \left[\frac{x + 4}{x - 3} \right]_{x=2} = \frac{2 + 4}{2 - 3} = -6$ এবং $B = \left[\frac{x + 4}{x - 2} \right]_{x=3} = \frac{3 + 4}{3 - 2} = 7$

সুতরাং (1) $\Rightarrow \frac{x + 4}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{-6}{x - 2} + \frac{7}{x - 3}$.

উদাহরণ-2. $\frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x-2)(x+4)}$ কে কভার-আপ রুল পদ্ধতির সাহায্যে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত কর।

সমাধান ঃ $\frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{1^2+5.1-7}{(x-1)(1-2)(1+4)}$

$$+\frac{2^2+5.2-7}{(2-1)(x-2)(2+4)}+\frac{(-4)^2+5(-4)-7}{(-4-1)(-4-2)(x+4)}$$

$$=\frac{-1}{-5(x-1)}+\frac{7}{6(x-2)}+\frac{11}{30(x+4)}=\frac{\frac{1}{5}}{x-1}+\frac{\frac{7}{6}}{x-2}+\frac{\frac{11}{30}}{x+4}$$

উদাহরণ-3. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-94, DUH-62]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int\left[\frac{1}{(b-a)(x-b)}+\frac{1}{(x-a)(a-b)}\right]dx$

$$=\frac{1}{b-a}\int\frac{1}{x-b}dx+\frac{1}{a-b}\int\frac{1}{x-a}dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\ln|x-b|-\frac{1}{b-a}\ln|x-a|+c$$

$$=\frac{1}{b-a}[\ln|x-b|-\ln|x-a|]+c=\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right|+c.$$

উদাহরণ-4. $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1986, CUH-1982]

সমাধান ঃ $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}dx = \int\left[\frac{3-1}{(3-2)(x-3)}+\frac{2-1}{(x-2)(2-3)}\right]dx$

$$=\int\left(\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx = 2\ln|x-3|-\ln|x-2|+c.$$

উদাহরণ-5. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx$

$$=\int\left[\frac{1^2+1}{(x-1)(1-2)(1+2)}+\frac{2^2+1}{(2-1)(x-2)(2+2)}\right.$$

$$\left.+\frac{(-2)^2+1}{(-2-1)(-2-2)(x+2)}\right]dx$$

$$=\int\left[\frac{2}{-3(x-1)}+\frac{5}{4(x-2)}+\frac{5}{12(x+2)}\right]dx$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{5}{4}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{5}{12}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=-\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+\frac{5}{12}\ln|x+2|+c.$$

উদাহরণ-6. $\int \frac{7x+4}{x^3-4x}dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-1988]**

সমাধান ঃ $\int \frac{7x+4}{x^3-4x}dx = \int \frac{7x+4}{x(x^2-4)}dx = \int \frac{7x+4}{x(x+2)(x-2)}dx$

$$=\int\left[\frac{7.0+4}{x(0+2)(0-2)}+\frac{7(-2)+4}{(-2)(x+2)(-2-2)}+\frac{7.2+4}{2.(2+2)(x-2)}\right]dx$$

$$=-\int\frac{1}{x}dx-\frac{5}{4}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{9}{4}\int\frac{1}{x-2}dx$$

$$=-\ln|x|-\frac{5}{4}\ln|x+2|+\frac{9}{4}\ln|x-2|+c.$$

উদাহরণ-7. $\int \frac{4x+3}{x(2x+1)(2x+3)}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{4x+3}{x(2x+1)(2x+3)}dx$

$$=\int\left[\frac{0+3}{x(0+1)(0+3)}+\frac{-2+3}{-\frac{1}{2}(2x+1)(-1+3)}+\frac{-6+3}{-\frac{3}{2}(-3+1)(2x+3)}\right]dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x+3}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2}{2x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2}{2x+3}dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+3|+c.$$

উদাহরণ-8. $\int \frac{dx}{x^3-x^2-9x+9}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-1955]**

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{x^3-x^2-9x+9} = \int \frac{dx}{x^2(x-1)-9(x-1)} = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2-9)}$

$$=\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)(x-3)}$$

$$=\int\left[\frac{1}{(x-1)(-2).4}+\frac{1}{2(x-3).6}+\frac{1}{(-4)(-6)(x+3)}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{12}\int\frac{1}{x-3}dx+\frac{1}{24}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{12}\ln|x-3|+\frac{1}{24}\ln|x+3|+c.$$

উদাহরণ-9. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ এর মান নির্ণয় কর। [DUH-196

সমাধান ঃ $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

$$= \int\left[\frac{-a^2}{(x^2+a^2)(-a^2+b^2)} + \frac{-b^2}{(-b^2+a^2)(x^2+b^2)}\right]dx$$

$$= \frac{a^2}{a^2-b^2}\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx - \frac{b^2}{a^2-b^2}\int \frac{1}{x^2+b^2}\,dx$$

$$= \frac{a^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)+c$$

$$= \frac{a}{a^2-b^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{b}{a^2-b^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)+c.$$

উদাহরণ-10. $\int \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+16)}$ এর মান নির্ণয় কর। [RUH-195

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+16)}$

$$= \int\left[\frac{1}{(x^2+9)(-9+16)} + \frac{1}{(-16+9)(x^2+16)}\right]dx$$

$$= \int\left[\frac{1}{7(x^2+9)} - \frac{1}{7(x^2+16)}\right]dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{x^2+9}\,dx - \frac{1}{7}\int \frac{1}{x^2+16}\,dx$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{x^2+3^2}\,dx - \frac{1}{7}\int \frac{1}{x^2+4^2}\,dx = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+$$

$$= \frac{1}{21}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{28}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+c.$$

উদাহরণ-11. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2-12}$ এর মান নির্ণয় কর। [RUH-199

সমাধান ঃ $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2-12} = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2-4)(x^2+3)}$

$$= \int\left[\frac{4}{(x^2-4)(4+3)} + \frac{-3}{(-3-4)(x^2+3)}\right]dx$$

$$= \frac{4}{7}\int \frac{1}{x^2-4}\,dx + \frac{3}{7}\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{x^2-2^2} + \frac{3}{7}\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2.2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left|\frac{x}{\sqrt{3}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \frac{\sqrt{3}}{7}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

উদাহরণ-12. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ ধরি $x^2 = z$

$\therefore 2x\,dx = dz$

বা $x\,dx = \frac{1}{2}dz$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(z+a^2)(z+b^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{(z+a^2)(-a^2+b^2)} + \frac{1}{(-b^2+a^2)(z+b^2)}\right]dz$$

$$= \frac{1}{2(b^2-a^2)}\left[\int \frac{1}{z+a^2}\,dz - \int \frac{1}{z+b^2}\,dz\right]$$

$$= \frac{1}{2(b^2-a^2)}\left[\ln|z+a^2| - \ln|z+b^2|\right]+c$$

$$= \frac{1}{2(b^2-a^2)}\ln\left|\frac{z+a^2}{z+b^2}\right| + c = \frac{1}{2(b^2-a^2)}\ln\left|\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}\right| + c.$$

উদাহরণ-13. $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$ ধরি $x^2 = z$

$\therefore 2x\,dx = dz$

বা $x\,dx = \frac{1}{2}dz$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{z\,dz}{(z+4)(z+9)}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\frac{-4}{(z+4)(-4+9)} + \frac{-9}{(-9+4)(z+9)}\right]dz$$

$$= \frac{1}{10}\left[-4\int \frac{1}{z+4}\,dz + 9\int \frac{1}{z+9}\,dz\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[-4\ln|z+4| + 9\ln|z+9|\right]+c$$

$$= -\frac{2}{5}\ln|x^2+4| + \frac{9}{10}\ln|x^2+9| + c.$$

উদাহরণ-14. $\int \frac{\cos x\,dx}{(a+\sin x)(b-\sin x)}$ এর মান নির্ণয় কর। [RUH-1981, CUH-1980]

সমাধান ঃ $\int \frac{\cos x\,dx}{(a+\sin x)(b-\sin x)}$ ধরি $\sin x = z$

$\therefore \cos x\,dx = dz$

$$= \int \frac{dz}{(a+z)(b-z)} = \int\left[\frac{1}{(a+z)(b+a)} + \frac{1}{(a+b)(b-z)}\right]dz$$

$$= \int \frac{1}{(a+b)(a+z)}\,dz + \int \frac{1}{(a+b)(b-z)}\,dz$$

$$= \frac{1}{a+b}\left[\ln|a+z| - \ln|b-z|\right]+c = \frac{1}{a+b}\ln\left|\frac{a+\sin x}{b-\sin x}\right| + c.$$

উদাহরণ–15. $\int \frac{dx}{x(2+lnx)(3-lnx)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{x(2+lnx)(3-lnx)}$ ধরি $lnx = z$

$\therefore \frac{1}{x}dx = dz$

$= \int \frac{dz}{(2+z)(3-z)}$

$= \int\left[\frac{1}{(2+z)(3+2)} + \frac{1}{(2+3)(3-z)}\right]dz$

$= \frac{1}{5}\left[\int \frac{1}{2+z}dz + \int \frac{1}{3-z}dz\right]$

$= \frac{1}{5}[ln|2+z| - ln|3-z|] + c$

$= \frac{1}{5} ln\left|\frac{2+lnx}{3-lnx}\right| + c.$

উদাহরণ–16. $\int \frac{e^x dx}{e^x - 3e^{-x} + 2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{e^x dx}{e^x - 3e^{-x} + 2}$ ধরি $e^x = z$

$\therefore e^x dx = dz$

$= \int \frac{e^x . e^x dx}{(e^x)^2 + 2e^x - 3} = \int \frac{z\,dz}{z^2+2z-3} = \int \frac{z\,dz}{(z+3)(z-1)}$

$= \int\left[\frac{-3}{(z+3)(-3-1)} + \frac{1}{(1+3)(z-1)}\right]dz$

$= \frac{3}{4}\int \frac{1}{z+3}dz + \frac{1}{4}\int \frac{1}{z-1}dz = \frac{3}{4} ln|e^x+3| + \frac{1}{4} ln|e^x-1| + c.$

উদাহরণ–17. $\int \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-6)(x-7)}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-6)(x-7)}dx$

$= \int\left[1 + \frac{(5-1)(5-2)(5-3)}{(x-5)(5-6)(5-7)} + \frac{(6-1)(6-2)(6-3)}{(6-5)(x-6)(6-7)} + \frac{(7-1)(7-2)(7-3)}{(7-5)(7-6)(x-7)}\right]dx$

$= \int\left(1 + \frac{12}{x-5} - \frac{60}{x-6} + \frac{60}{x-7}\right)dx$

$= x + 12\,ln|x-5| - 60\,ln|x-6| + 60\,ln|x-7| + c.$

উদাহরণ–18. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1991]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \frac{x^4}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

$= \int\left[1 + \frac{(-a^2)^2}{(x^2+a^2)(-a^2+b^2)} + \frac{(-b^2)^2}{(-b^2+a^2)(x^2+b^2)}\right]dx$

$= \int\left[1 - \frac{a^4}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} + \frac{b^4}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{x^2+b^2}\right]dx$

$= x - \frac{a^4}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b^4}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) + c$

$= x - \frac{a^3}{a^2-b^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b^3}{a^2-b^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) + c.$

উদাহরণ–19. $\int \frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–1995, RUH–1979, 1983]

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)}dx$ ..... (1)

আংশিক ভগ্নাংশের কভার-আপ রুল হইতে পাই

$\frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{2.2^2-1}{(2+1)^2(x-2)} + \frac{2(-1)^2-1}{(x+1)^2(-1-2)} + \frac{A}{x+1}$

$x = 0$ বসিয়ে পাই $\frac{1}{2} = -\frac{7}{18} - \frac{1}{3} + A \quad \therefore A = \frac{11}{9}$

$\therefore \frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{7/9}{x-2} - \frac{1/3}{(x+1)^2} + \frac{11/9}{x+1}$

$\therefore (1) \Rightarrow I = \int\left\{\frac{7/9}{x-2} - \frac{1/3}{(x+1)^2} + \frac{11/9}{x+1}\right\}dx$

$= \frac{7}{9} ln|x-2| + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{11}{9} ln|x+1| + c.$

উদাহরণ–20. $\int \frac{2x^2+x+17}{(x-1)(x^2+2x-3)}dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–87]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \frac{2x^2+x+17}{(x-1)(x^2+2x-3)}dx = \int \frac{2x^2+x+17}{(x-1)^2(x+3)}dx$

আংশিক ভগ্নাংশের কভার-আপ রুল অনুযায়ী পাই

$\frac{2x^2+x+17}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{2+1+17}{(x-1)^2.4} + \frac{A}{x-1} + \frac{18-3+17}{16(x+3)}$

$x = 0$ বসিয়ে পাই $\frac{17}{3} = 5 - A + \frac{2}{3} \therefore A = 0$

$$\therefore \frac{2x^2 + x + 17}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{2}{x+3}$$

$$(1) \Rightarrow I = \int \frac{2x^2 + x + 17}{(x-1)^2(x+3)}\,dx = \int \left\{\frac{5}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x+3)}\right\} dx$$

$$= -\frac{5}{x-1} + 2\ln|x+3| + c.$$

উদাহরণ–21. $\int \frac{x^2+2}{(x+2)^3(x-1)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–2006]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \frac{x^2+2}{(x+2)^3(x-1)}\,dx$ ..... (1)

আংশিক ভগ্নাংশের কভার-আপ রুল অনুযায়ী পাই,

$$\frac{x^2+2}{(x+2)^3(x-1)} = \frac{1^2+2}{(1+2)^3(x-1)} + \frac{(-2)^2+2}{(x+2)^3(-2-1)} + \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 = \frac{1}{9}(x+2)^3 - 2(x-1) + A(x-1)(x+2) + B(x-1)(x+2)^2$$

উভয়পক্ষ হইতে x^3 ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই

$$0 = \frac{1}{9} + B \text{ এবং } 1 = \frac{2}{3} + A + 3B \quad \therefore B = -\frac{1}{9} \quad \therefore \frac{1}{3} = A - \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{x^2+2}{(x+2)^3(x-1)} = \frac{\frac{1}{9}}{x-1} - \frac{2}{(x+2)^3} + \frac{\frac{2}{3}}{(x+2)^2} - \frac{\frac{1}{9}}{x+2}$$

$$(1) \Rightarrow I = \int \left\{\frac{\frac{1}{9}}{x-1} - \frac{2}{(x+2)^3} + \frac{\frac{2}{3}}{(x+2)^2} - \frac{\frac{1}{9}}{x+2}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{1}{9}\ln|x+2| + c.$$

উদাহরণ–22. $\int \frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–2005]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)}\,dx$ ..... (1)

$$\text{এবং } \frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{-\frac{1}{3}}{(x+1)^2} + \frac{A}{x+1} + \frac{\frac{7}{9}}{x-2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 1 = -\frac{1}{3}(x-2) + A(x+1)(x-2) + \frac{7}{9}(x+1)^2$$

x^2 এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই, $2 = A + \frac{7}{9}$

$$\Rightarrow A = \frac{11}{9}$$

$$\therefore \frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{-\frac{1}{3}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{11}{9}}{x+1} + \frac{\frac{7}{9}}{x-2}$$

$$(1) \Rightarrow I = \int \left\{\frac{-\frac{1}{3}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{11}{9}}{x+1} + \frac{\frac{7}{9}}{x-2}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{3(x+1)} + \frac{11}{9}\ln|x+1| + \frac{7}{9}\ln|x-2| + c$$

উদাহরণ–23. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^3}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–2002]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^3}$ ..... (1)

$$\text{এবং } \frac{1}{(x-1)^2(x-2)^3} = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{A}{x-1} + \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\Rightarrow 1 = -(x-2)^3 + A(x-1)(x-2)^3 + (x-1)^2 + B(x-1)^2(x-2) + C(x-1)^2(x-2)^2$$

$$= -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + A(x-1)(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + (x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - 2x + 1)(x-2) + C(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x + 4)$$

উভয় পক্ষ হতে x^4, x^3, x^2 এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই,

$0 = A + C$ ..... (2)

$0 = -1 - 7A + B - 6C$ ..... (3)

এবং $0 = 6 + 18A + 1 - 4B + 5C$

$\Rightarrow 0 = 7 + 18A - 4B + 5C$ ..... (4)

$(4) + (3) \cdot 4 \Rightarrow 0 = 3 - 10A - 19C$ ..... (5)

$(5) + (2) \cdot 10 \Rightarrow 0 = 3 - 9C$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$\therefore (2) \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore (3) \Rightarrow B = 1 - \frac{7}{3} + \frac{6}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{(x-1)^2(x-2)^3} = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{\frac{2}{3}}{(x-2)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}$$

$$(1) \Rightarrow I = \int \left\{ -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1/3}{x-1} + \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{2/3}{(x-2)^2} + \frac{1/3}{x-2} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{2}{3(x-2)} + \frac{1}{3} \ln|x-2| + C$$

উদাহরণ-24. $\int \frac{dx}{x^3+1}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-2009]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$ ..... (1)

এবং $\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{Ax+B}{x^2-x+1}$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{3}(x^2-x+1) + (Ax+B)(x+1)$

উভয়পক্ষ হইতে x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই,

$0 = \frac{1}{3} + A$ এবং $0 = -\frac{1}{3} + A + B$

$\therefore A = -\frac{1}{3}$ এবং $B = \frac{2}{3}$

$$\therefore \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} - \frac{\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

$$(1) \Rightarrow I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

উদাহরণ-25. $\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}dx$ ..... (1)

এবং $\frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow x^3+1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+c)x(x^2+1) + (Dx+E)x$

উভয় পক্ষ হইতে x^4, x^3, x^2, x এর সহগ এবং ধ্রুবপদ তুলনা করিয়া পাই

$A = 1, A+B = 0 \Rightarrow B = -1$

$C = 1, C+E = 0 \Rightarrow E = -1$ এবং $2A+B+D = 0 \quad \therefore D = -1$

$$\therefore \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{-x-1}{(x^2+1)^2}$$

$$(1) \Rightarrow I = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2} - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$\therefore I = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + \frac{1}{2(x^2+1)} - I_1 \quad \text{..... (2)}$$

যেখানে $I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ ধরি $x = \tan\theta$

$dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}$$

$$= \int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} + c$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\cdot\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} + c$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + c$$

$$(2) \Rightarrow I = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x + \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2(x^2+1)} + c$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + \frac{1-x}{2(x^2+1)} + c.$$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

13.1. যদি f(x) এবং g(x) বহুপদী হয় তবে $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ এর মান নির্ণয় করার নিয়ম কি? [If f(x) and g(x) are polynomials then what is the rule to find the value of $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$?]

Ans : প্রদত্ত ইনটিগ্র্যালের মান নির্ণয়ের জন্য $\frac{f(x)}{g(x)}$ ফাংশনটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করিতে হয়।

13.2. $\frac{x+4}{(x-2)(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [Express $\frac{x+4}{(x-2)(x-3)}$ as partial fractions.]

Ans : $\frac{x+4}{(x-2)(x-3)}=\frac{2+4}{(x-2)(2-3)}+\frac{3+4}{(x-2)(x-3)}$

$=\frac{-6}{x-2}+\frac{7}{x-3}$.

13.3. $\frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x-2)(x+4)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [Express $\frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x-2)(x+4)}$ as partial fractions.]

Ans : $\frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x-2)(x+4)}=\frac{1+5-7}{(x-1)(1-2)(1+4)}$

$+\frac{4+10-7}{(x-2)(2-1)(2+4)}+\frac{16-20-7}{(x+4)(-4-1)(-4-2)}$

$=\frac{1/5}{x-1}+\frac{7/6}{x-2}+\frac{11/30}{x+4}$.

13.4. $\int\frac{(x+4)\,dx}{(x-2)(x-3)}=?$

Ans : $\int\frac{x+4}{(x-2)(x-3)}dx=\int\left(\frac{7}{x-3}-\frac{6}{x-2}\right)dx$

$=7\ln|x-3|-6\ln|x-2|+c$.

EXERCISE–13

মান নির্ণয় কর।

1. $\int\frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)}$
2. $\int\frac{dx}{x^2+x-42}$ **[RUH–1958]**
3. $\int\frac{dx}{x^2+7x-18}$ **[RUH–59]**
4. $\int\frac{3x\,dx}{x^2-x-2}$ **[RUH–1990]**
5. $\int\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}dx$
6. $\int\frac{x\,dx}{x^2-12x+35}$
7. $\int\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}dx$
8. $\int\frac{x\,dx}{(3-x)(3+2x)}$
9. $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
10. $\int\frac{x+4}{(x^2-1)(x+2)}dx$ **[RUH–86]**
11. $\int\frac{x^2\,dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
12. $\int\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx$
13. $\int\frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}$
14. $\int\frac{x^2+1}{(x^2-1)(2x+1)}dx$
15. $\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$
16. $\int\frac{x^2}{1-x^4}dx$
17. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
18. $\int\frac{dx}{x^2(x^2+a^2)}$ **[DUH–1955]**
19. $\int\frac{x^2\,dx}{x^4-x^2-2}$ **[DUH–85]**
20. $\int\frac{dx}{x^4-1}$
21. $\int\frac{x\,dx}{x^4-4}$
22. $\int\frac{x\,dx}{x^4-x^2-2}$
23. $\int\frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
24. $\int\frac{x\,dx}{x^8-1}$ **[CUH–1985]**
25. $\int\frac{e^x\,dx}{(e^x-1)(e^x+1)}$
26. $\int\frac{e^x}{2e^{2x}+3e^x+1}dx$
27. $\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(a+\tan\theta)(b-2\tan\theta)}$
28. $\int\frac{dx}{2e^{2x}+3e^x+1}$ **[DUH–53]**
29. $\int\frac{dx}{(e^x-1)(e^x+3)}$ **[DUH–90]**
30. $\int\frac{(x-1)(x-5)}{(x-2)(x-4)}dx$
31. $\int\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}dx$
32. $\int\frac{x^3\,dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}$
33. $\int\frac{x^3+3}{x^3-3x}dx$
34. $\int\frac{dx}{\sin x+\sin 2x}$ **[NUH–02, DUH–57]**
35. $\int\frac{dx}{\sin x(3+2\cos x)}$ **[Engg–1993]**

36. $\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}$ [DUA–1989]

37. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2}$ [DUH–1969, 1977]

38. $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$

39. $\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-1)^2}\,dx$

40. $\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}\,dx$

41. $\int \frac{x^4}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

42. $\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

43. $\int \frac{x\,dx}{(x-a)^2(x-b)}$

44. $\int \frac{x^3+2}{(x-1)(x-2)^3}\,dx$

45. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3(x+1)}$

46. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+4)}$ [NUH–08]

47. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

48. $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$

49. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$ [DUH–1963]

50. $\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}\,dx.$

51. $\int \frac{dx}{(e^x-1)^2}$ [NUH–2008]

52. $\int \frac{dx}{\sin x+\tan x}$ [NUH(NM)–08]

ANSWER–13

1. $\frac{1}{a-b}[a\,ln|x-a| - b\,ln|x-b|] + c$

2. $\frac{1}{13} ln\left|\frac{x-6}{x+7}\right| + c$

3. $\frac{1}{11} ln\left|\frac{x-2}{x+9}\right| + c$

4. $2\,ln|x-2| + ln|x+1| + c$

5. $\frac{3}{5} ln|x+2| + \frac{2}{5} ln|x-3| + c$

6. $\frac{7}{2} ln|x-7| - \frac{5}{2} ln|x-5| + c$

7. $ln|x-1|\,|x-2| + c$

8. $-\frac{1}{3} ln|3-x| - \frac{1}{6} ln|3+2x| + c$

9. $\frac{1}{2} ln|x+1|\,|x+3| - ln|x+2| + c$

10. $\frac{5}{6} ln|x-1| - \frac{3}{2} ln|x+1| + \frac{2}{3} ln|x+2| + c$

11. $\frac{1}{2} ln|x-1| - 4\,ln|x-2| + \frac{9}{2} ln|x-3| + c$

12. $ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right| + c$

13. $\frac{a}{(a-b)(a-c)} ln|x-a| + \frac{b}{(b-a)(b-c)} ln|x-b| + \frac{c}{(c-a)(c-b)} ln|x-c| + c_1$

14. $\frac{1}{3} ln|x-1| + ln|x+1| - \frac{5}{6} ln|2x+1| + c$

15. $-\frac{3}{2} ln|x| + \frac{5}{3} ln|x-1| - \frac{1}{6} ln|x+2| + c$

16. $\frac{1}{4} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

17. $\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b} - \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right] + c$

18. $\frac{1}{a^2}\left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right] + c$

19. $\frac{1}{3\sqrt{2}} ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{3}\tan^{-1}x + c$

20. $\frac{1}{4} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

21. $\frac{1}{8} ln|x^2-2| - \frac{1}{8} ln|x^2+2| + c$

22. $\frac{1}{6}[ln|x^2-2| - ln|x^2+1|] + c$

23. $\frac{1}{2(a^2-b^2)}[a^2\,ln(x^2+a^2) - b^2 ln(x^2+b^2)] + c$

24. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \tan^{-1}x^2\right] + c$

25. $\frac{1}{2} ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c$

26. $ln|2e^x+1| - ln|e^x+1| + c$

27. $\frac{1}{2a+b}[ln|a+\tan\theta| - ln|b-2\tan\theta|] + c$

28. $x + ln|1+e^x| - 2\,ln|1+2e^x| + c$

29. $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} ln|e^x-1| + \frac{1}{12} ln|e^x+3| + c$

30. $x + \frac{3}{2}[ln|x-2| - ln|x-4|] + c$

31. $x + \frac{(c-a)(c-b)}{c-d} ln|x-c| + \frac{(d-a)(d-b)}{d-c} ln|x-d| + c_1$

32. $x + \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} ln|x-a| + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} ln|x-b| + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} ln|x-c| + c_1$

33. $x - \ln|x| + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\ln|x-\sqrt{3}| + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\ln|x+\sqrt{3}| + c$

34. $\frac{1}{6}\ln|1-\cos x| + \frac{1}{2}\ln|1+\cos x| - \frac{2}{3}\ln|1+2\cos x| + c$

35. $\frac{1}{10}\ln|1-\cos x| - \frac{1}{2}\ln|1+\cos x) + \frac{2}{5}\ln|3+2\cos x| + c$

36. $-2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + c$

37. $-\ln|x+1| + \ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + c$

38. $-\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + c$

39. $\frac{5}{2}\ln|x-3| - \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + c$

40. $3\ln|x+2| - 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + c$

41. $\frac{x^2}{2} + \frac{11}{9}\ln|x-1| + \frac{16}{9}\ln|x+2| - \frac{1}{3(x-1)} + c$

42. $\frac{1}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9}\ln|x+2| - \frac{2}{3|x-1|} + c$

43. $\frac{b}{(a-b)^2}\ln\left|\frac{x-b}{x-a}\right| - \frac{a}{(a-b)(x-a)} + c$

44. $-3\ln|x-1| + 4\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} - \frac{5}{(x-2)^2} + c$

45. $\frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{1}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{4}/(x-1) - \frac{1}{4}/(x-1)^2 + c$

46. $\frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln|x^2+4| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

47. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

48. $\frac{5}{2}\tan^{-1}x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c$

49. $-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\tan^{-1}x + c$

50. $\ln(x^2+1) + \frac{1+3x}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\tan^{-1}x + c.$

51. $\ln|e^x| - \frac{1}{e^x-1} - \ln|e^x-1| + c$

52. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| - \frac{1}{2(\cos x+1)} + c$

———×———

Chapter–14
অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন
INTEGRATION BY PARTS

14.1. অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন (Integration by Parts) পদ্ধিতিতে সাধারণভাবে দুইটি রাশির গুণফলের ইন্টিগ্রেশন নির্ণয় করা হয়। অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন এর সূত্র, $\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\,dx\right\}dx$ ইহাকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়, দুইটি রাশির গুণফলের ইন্টিগ্রাল = প্রথম রাশি × দ্বিতীয় রাশির ইন্টিগ্রাল – (প্রথম রাশির অন্তরক সহগ × দ্বিতীয় রাশির ইন্টিগ্রাল)এর ইন্টিগ্রাল।

সূত্রের প্রমাণ ঃ দুইটি রাশির গুণফলের অন্তরক সহগের সূত্র হইতে পাই

$$\frac{d}{dx}(uv_1) = u\frac{dv_1}{dx} + v_1\frac{du}{dx}$$

ইন্টিগ্রেশন করে পাই $\int\left\{\frac{d}{dx}(uv_1)\right\}dx = \int\left(u\frac{dv_1}{dx}\right)dx + \int\left(v_1\frac{du}{dx}\right)dx$

বা $uv_1 = \int\left(u\frac{dv_1}{dx}\right)dx + \int\left(\frac{du}{dx}v_1\right)dx$

বা $\int\left(u\frac{dv_1}{dx}\right)dx = uv_1 - \int\left(\frac{du}{dx}v_1\right)dx$

বা $\int\left(u\frac{dv_1}{dx}\right)dx = u\int\frac{dv_1}{dx}dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int\frac{dv_1}{dx}dx\right\}dx$

এখন $\frac{dv_1}{dx} = v$ ধরে পাই, $\int(uv)dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\,dx\right\}dx.$

14.2. প্রথম ও দ্বিতীয় রাশি নির্বাচন ঃ অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন পদ্ধতিতে প্রথম রাশি u এর সরাসরি ইন্টিগ্রেশন করিতে হয় না। তাই যে সকল রাশির প্রতি ডেরিভেটিভ (Anti-derivative) সহজে নির্ণয় করা যায় না। অর্থাৎ যে সকল রাশিকে সহজে ইন্টিগ্রেশন করা যায় না। ঐ সকল রাশিকে u ধরা হয়। এইরূপ রাশি সমূহ $\ln x$, $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\operatorname{cosec}^{-1}x$ ইত্যাদি।

উপরোক্ত রাশির সহিত দ্বিতীয় কোন রাশি না থাকিলে $v = 1$ ধরা হয়।

যদি গুণফল রাশি দু'টির প্রত্যেকটিকে ইন্টিগ্রেশন করা যায় এবং একটি রাশি x^n (n পূর্ণ সংখ্যা) হয় তবে $u = x^n$ ধরা হয়। x^n রাশি না থাকিলে নিম্নের নিয়মে অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন করা হয়।

14.3. $\int e^{ax}\cos(bx+c)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int e^{ax}\cos(bx+c)dx$

বা $I = \cos(bx+c).\int e^{ax}dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\cos(bx+c)\int e^{ax}dx\right\}dx$

$$= \cos(bx + c).\frac{e^{ax}}{a} + \int \sin(bx + c).b.\frac{e^{ax}}{a}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx + c) + \frac{b}{a}\left[\sin(bx + c)\int e^{ax}\,dx\right) - \int\left\{\frac{d}{dx}\sin(bx + c)\int e^{ax}\,dx\right.$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx + c) + \frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx + c) - \int \cos(bx + c).b.\frac{e^{ax}}{a}\right.$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx + c) + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin(bx + c) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos(bx + c)dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2}\{a\cos(bx + c) + b\sin(bx + c)\} - \frac{b^2}{a^2}I$$

$\therefore a^2.I = e^{ax}\{a\cos(bx + c) + b\sin(bx + c)\} - b^2.I$

$\therefore I(a^2 + b^2) = e^{ax}\{a\cos(bx + c) + b\sin(bx + c)\}$

$\therefore I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\{a\cos(bx + c) + b\sin(bx + c)\}$

অর্থাৎ $\int e^{ax}\cos(bx + c)dx = \frac{e^{ax}\{a\cos(bx + c) + b\sin(bx + c)\}}{a^2 + b^2}$ .....

ধরি $a = r\cos\theta$ এবং $b = r\sin\theta$

$\therefore r^2 = a^2 + b^2$ বা $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ এবং $\tan\theta = \frac{b}{a}$ বা $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(i) হইতে পাই $\int e^{ax}\cos(bx + c)dx$

$$= \frac{e^{ax}\{r\cos\theta\cos(bx + c) + r\sin\theta\sin(bx + c)\}}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{re^{ax}}{a^2 + b^2}\cos(bx + c - \theta)$$

$$\therefore \int e^{ax}\cos(bx + c)dx = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\left(bx + c - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) \quad \text{..... (2)}$$

নোট ঃ $c = 0$ হলে (i) ও (ii) হইতে পাই

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\{a\cos bx + b\sin bx\}}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\left(bx - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

14.4. $\int e^{ax}\sin(bx + c)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $I = \int e^{ax}\sin(bx + c)dx$

বা $I = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx + c) - \int \frac{e^{ax}}{a}\cos(bx + c).b\,dx$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx + c) - \frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx + c) + \int \frac{e^{ax}.b}{a}\sin(bx + c)dx\right]$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx + c) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx + c) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx + c)dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2}\{a\sin(bx + c) - b\cos(bx + c)\} - \frac{b^2}{a^2}.I$$

বা $a^2.I = e^{ax}\{a\sin(bx + c) - b\cos(bx + c)\} - b^2.I$

বা $I(a^2 + b^2) = e^{ax}\{a\sin(bx + c) - b\cos(bx + c)\}$

$\therefore I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\{a\sin(bx + c) - b\cos(bx + c)\}$

অর্থাৎ $\int e^{ax}\sin(bx + c)dx = \frac{e^{ax}\{a\sin(bx + c) - b\cos(bx + c)\}}{a^2 + b^2}$ ..... (1)

ধরি $a = r\cos\theta$ এবং $b = r\sin\theta$

$\therefore r = \sqrt{a^2 + b^2}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(1) $\Rightarrow \int e^{ax}\sin(bx + c)dx = \frac{e^{ax}\{r\cos\theta\sin(bx + c) - r\sin\theta\cos(bx + c)\}}{a^2 + b^2}$

$$= \frac{re^{ax}}{a^2 + b^2}\sin(bx + c - \theta)$$

$$\therefore \int e^{ax}\sin(bx + c)dx = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\left(bx + c - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

নোট ঃ $c = 0$ হলে $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}\{a\sin bx - b\cos bx\}}{a^2 + b^2}$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\left(bx - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

14.5. $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = \int e^x f(x)dx + \int e^x f'(x)dx$

$$= f(x)\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\int e^x dx\right\}dx + \int e^x f'(x)dx$$

$$= e^x f(x) - \int e^x f'(x)dx + \int e^x f'(x)dx = e^x f(x)$$

সুতরাং $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x)$

অর্থাৎ $\int e^x\{$ $f(x) + f(x)$ এর অন্তরক সহগ$\}\,dx = e^x f(x)$.

উদাহরণ-1. $\int x\cos x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int x\cos x\,dx = x\int \cos x\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}(x)\int \cos x\,dx\right]dx$

$$= x\sin x - \int 1.\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c.$$

উদাহরণ–2. $\int x \ln x \, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int x \ln x \, dx = \ln x \int x \, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\ln x) \int x \, dx\right\} dx$

$= \ln x . \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} . \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c.$

উদাহরণ–3. $\int \ln x \, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \ln x \, dx = \ln x \int 1.dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\ln x) \int 1.dx\right\} dx$

$= x \ln x - \int \frac{1}{x} . x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$

উদাহরণ–4. $\int \cos^{-1}x \, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \cos^{-1}x \, dx = \cos^{-1}x \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) \int dx\right\} dx$

$= x \cos^{-1}x + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . x \, dx = x \cos^{-1} - \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x \cos^{-1}x - \frac{1}{2} . 2\sqrt{1-x^2} + c = x \cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c.$

উদাহরণ–5. $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–199**

সমাধান ঃ $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) dx$

$= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \int dx\right\} dx$

$= x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}\right) . x \, dx$

$= x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$

$= x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{1}{2} . 2\sqrt{x^2 + a^2} + c$

$= x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{(x^2 + a^2)} + c.$

উদাহরণ–6. $\int \text{cosec}^{-1}x \, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \text{cosec}^{-1}x \, dx = \text{cosec}^{-1}x \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) \int dx\right\} dx$

$= x \, \text{cosec}^{-1}x + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} . x \, dx$

$= x \, \text{cosec}^{-1}x + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c.$

উদাহরণ–7. $\int x^2 e^x \, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int x^2 e^x \, dx = x^2 . e^x - \int 2x . e^x \, dx$

$= x^2 e^x - 2[x e^x - \int e^x \, dx] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c.$

উদাহরণ–8. $\int \tan^{-1}x \, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1951, RUH–1961]**

সমাধান ঃ $\int \tan^{-1}x \, dx = \tan^{-1}x . x - \int \frac{1}{1 + x^2} . x \, dx$

$= x \tan^{-1}x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c.$

উদাহরণ–9. $\int (e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}) dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1958]**

সমাধান ঃ $\int (e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}) dx$ ধরি $\sqrt{x} = z$

$= \int (e^z + e^{-z}) . 2z \, dz$ $\therefore \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dz$ বা $dx = 2z \, dz$

$= 2\left[z \int (e^z + e^{-z}) dz - \int \left\{\frac{d}{dz}(z) \int (e^z + e^{-z}) dz\right\} dz\right]$

$= 2z(e^z - e^{-z}) - 2 \int (e^z - e^{-z}) dz$

$= 2\sqrt{x} (e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) - 2(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}) + c.$

উদাহরণ–10. $\int (\sin^{-1}x)^2 \, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH(NM)–05, DUH–58, 92]

সমাধান ঃ $\int (\sin^{-1}x)^2 \, dx = (\sin^{-1}x)^2 \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^2 \int dx\right\} dx$

$= x(\sin^{-1}x)^2 - \int 2 \sin^{-1}x . \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . x \, dx$

$= x(\sin^{-1}x)^2 - 2 \int \frac{x \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ধরি $\sin^{-1}x = z$

$= x(\sin^{-1}x)^2 - 2 \int z \sin z \, dz$ $\therefore \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dz$

$\therefore x = \sin z$

$= x(\sin^{-1}x)^2 - 2[-z \cos z + \int \cos z \, dz]$

$= x(\sin^{-1}x)^2 + 2z \cos z - 2 \sin z + c$

$= x(\sin^{-1}x)^2 + 2z\sqrt{1 - \sin^2 z} - 2 \sin z + c$

$= x(\sin^{-1}x)^2 + 2\sqrt{(1-x^2)} \sin^{-1}x - 2x + c.$

উদাহরণ–11. $\int x^2 \sin^2 x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1965, 1987]**

সমাধান ঃ $\int x^2 \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int x^2(1 - \cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\int x^2\, dx - \frac{1}{2}\int x^2 \cos 2x\, dx$

$= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left[x^2.\ \frac{\sin 2x}{2} - \int 2x.\ \frac{\sin 2x}{2}\, dx\right]$

$= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}\left[-x\ \frac{\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2}\, dx\right]$

$= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4}x^2 \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + c.$

উদাহরণ–12. মান নির্ণয় কর।

(i) $\int \frac{x}{1 + \cos x}\, dx$ **[NUH(NM)–2002, 2009, BSc(Pass)–2006]**

(ii) $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\, dx$ **[NUH–1995, 1996, 2003, RUH–1982, 1989]**

সমাধান ঃ (i) $\int \frac{x\, dx}{1 + \cos x}$

$= \int \frac{x}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int x \sec^2 \frac{x}{2}\, dx$

$= \frac{1}{2}\left[x\int \sec^2 \frac{x}{2}\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int \sec^2 \frac{x}{2}\, dx\right\}dx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[x \cdot \frac{\tan \frac{x}{2}}{1/2} - \int \frac{\tan \frac{x}{2}}{1/2}\, dx\right]$

$= x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2}\, dx$

$= x \tan \frac{x}{2} - 2\int \frac{\frac{1}{2}\sec \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2}\, dx}{\sec \frac{x}{2}}$

$= x \tan \frac{x}{2} - 2\, ln \sec \frac{x}{2} + c.$

(ii) $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\, dx = \int \frac{x + 2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int x \sec^2 \frac{x}{2}\, dx + \int \tan \frac{x}{2}\, dx$

$= \frac{1}{2}\left[x.\ \frac{\tan \frac{x}{2}}{1/2} - \int \frac{\tan \frac{x}{2}}{1/2}\, dx\right] + \int \tan \frac{x}{2}\, dx + c$

$= x \tan \frac{1}{2}x + c.$

উদাহরণ–13. $\int \frac{ln(lnx)}{x}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–2006, DUH–62, 81, RUH–80, 81, CUH–89, BScEngg(KBIT)–94]**

সমাধান ঃ $\int \frac{ln(lnx)\, dx}{x}$ ধরি $lnx = z$

$\therefore \frac{1}{x}dx = dz$

$= \int ln\, z\, dz$

$= lnz.z - \int dz = z\, lnz - z + c = lnx\,[ln(lnx) - 1] + c.$

উদাহরণ–14. $\int \sin^{-1}(3x - 4x^3)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \sin^{-1}(3x - 4x^3)dx$ ধরি $x = \sin\theta$

$dx = \cos\theta\, d\theta$

$= \int \sin^{-1}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta).\ \cos\theta\, d\theta$

$= \int \sin^{-1}(\sin 3\theta).\ \cos\theta\, d\theta = 3\int \theta \cos\theta\, d\theta$

$= 3[\theta \sin\theta - \int \sin\theta\, d\theta] = 3\theta \sin\theta + 3\cos\theta + c$

$= 3\sin\theta.\theta + 3\sqrt{1 - \sin^2\theta} + c = 3x \sin^{-1}x + 3\sqrt{1 - x^2} + c.$

উদাহরণ–15. $\int \cos^{-1}\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1996]**

সমাধান ঃ $\int \cos^{-1}\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)dx$ ধরি $x = \tan\theta$

$\therefore dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$\therefore \theta = \tan^{-1}x$

$= \int \cos^{-1}\left(\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}\right).\ \sec^2\theta\, d\theta$

$= \int \cos^{-1}(\cos 2\theta).\ \sec^2\theta\, d\theta = 2\int \theta \sec^2\theta\, d\theta$

$= 2[\theta \tan\theta - \int 1.\tan\theta\, d\theta] = 2\theta\tan\theta - 2\ln\sec\theta + c$

$= 2x\tan^{-1}x - 2\ln\sqrt{1+\tan^2\theta} + c$

$= 2x\tan^{-1}x - 2.\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = 2x\tan^{-1}x - \ln(1+x^2) + c$

উদাহরণ–16. $\int \frac{x}{\sec x + 1}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[CUH-1**

সমাধান ঃ $\int\frac{x}{\sec x+1} = \int\frac{x\cos x}{1+\cos x}\,dx = \int\frac{x(2\cos^2\frac{x}{2}-1)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$

$= \int x\,dx - \frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left[x\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} - \int\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}dx\right]$

$= \frac{x^2}{2} - x\tan\frac{x}{2} + \int\tan\frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2} - x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\sec\frac{x}{2} + c.$

উদাহরণ–17. $\int\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–07, DUH-**

সমাধান ঃ $\int\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$= \ln(x+1)\int\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\ln(x+1)\int\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx\right\}dx$

$= \ln(x+1).2\sqrt{x+1} - \int\frac{1}{x+1}.2\sqrt{x+1}\,dx$

$= 2\sqrt{(x+1)}\ln(x+1) - 2\int\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$= 2\sqrt{(x+1)}\ln(x+1) - 4\sqrt{(x+1)} + c.$

উদাহরণ–18. $\int\frac{\ln x}{(1+x)^3}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–96, DUH–87,**

সমাধান ঃ $I = \int\frac{\ln x}{(1+x)^3}\,dx$

$= \ln x\int\frac{1}{(1+x)^3}\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int\frac{1}{(1+x)^3}\,dx\right\}dx$

$= \ln x.\left\{-\frac{1}{2(1+x)^2}\right\} - \int\frac{1}{x}.\left\{-\frac{1}{2(1+x)^2}\right\}dx$

$= -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x(1+x)^2}\,dx = -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}I_1 \quad \ldots\ldots (1)$ ধরি

$\therefore I_1 = \int\frac{1}{x(1+x)^2}$

ধরি $\frac{1}{x(1+x)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2}$

বা $1 \equiv A(1+x)^2 + Bx(1+x) + Cx$

$x = -1$ হলে $C = -1$, $x = 0$ হলে $A = 1$

x^2 এর সহগ তুলনা করে পাই $A + B = 0 \quad \therefore B = -1$

$\therefore \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$

$\therefore I_1 = \int\frac{1}{x(1+x)^2}\,dx = \int\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right\}dx$

$= \ln x - \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} + c$

(1) নং এ I_1 এর মান বসিয়ে

$I = -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\left\{\ln x - \ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right\} + c.$

উদাহরণ–19. $\int\sin^{-1}\sqrt{\left(\frac{x}{a+x}\right)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH(NM)–2006, RUH–1988, CUH–1982, 1984]

সমাধান ঃ $\int\sin^{-1}\sqrt{\left(\frac{x}{a+x}\right)}\,dx$

$= \int\sin^{-1}\sqrt{\frac{a\tan^2\theta}{a(1+\tan^2\theta)}}\cdot 2a\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

$= \int\sin^{-1}(\sin\theta).2a\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

$= 2a\int\theta\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

ধরি $x = a\tan^2\theta$

$\therefore dx = 2a\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

$\therefore \tan^2\theta = \frac{x}{a}$

বা $\tan\theta = \sqrt{\frac{x}{a}}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$

$= 2a\left[\theta\int\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta - \int\left\{\frac{d}{d\theta}(\theta)\int\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta\right\}d\theta\right]$

$= 2a\left[\theta.\frac{\tan^2\theta}{2} - \int 1.\frac{\tan^2\theta}{2}\,d\theta\right] = a\theta\tan^2\theta - a\int(\sec^2\theta - 1)d\theta$

$= a\theta\tan^2\theta - a\tan\theta + a\theta + c = (a\tan^2\theta + a)\theta - a\tan\theta + c$

$= (x+a)\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)} - a\sqrt{\frac{x}{a}} + c = (x+a)\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)} - \sqrt{ax} + c.$

উদাহরণ–20. $\int x \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a-x}{a}}\right)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[BScEngg(KUET)–1995]

সমাধান ঃ $\int x \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a-x}{a}}\right)dx$

$= \int 2a\cos\theta \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a-2a\cos\theta}{a}}\right)$ ধরি $x = 2a\cos\theta$

$\therefore dx = -2a\sin\theta\, d\theta$

$\times (-2a\sin\theta\, d\theta)$ $\therefore \cos\theta = \frac{x}{2a}$

$= \int 2a\cos\theta.\ \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\,2\sin\frac{\theta}{2}\right)$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{2a}\right)$

$\times (-2a\sin\theta\, d\theta)$

$= \int 2a\cos\theta \sin^{-1}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)(-2a\sin\theta)d\theta$

$= -a^2\int \theta.\ 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = -a^2\int \theta\sin 2\theta\, d\theta$

$= -a^2\left[-\theta\frac{\cos 2\theta}{2} + \int 1\frac{\cos 2\theta}{2}d\theta\right] = a^2\left[\frac{\theta\cos 2\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right] + c$

$= \frac{a^2}{2}[\theta(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}] + c$

$= \frac{a^2}{2}\left[\left(2.\frac{x^2}{4a^2} - 1\right)\cos^{-1}\left(\frac{x}{2a}\right) - \frac{x}{2a}\sqrt{1-\frac{x^2}{4a^2}}\right] + c$

$= \frac{a^2}{2}\left[\left(\frac{x^2}{2a^2} - 1\right)\cos^{-1}\left(\frac{x}{2a}\right) - \frac{x}{4a^2}\sqrt{4a^2-x^2}\right] + c$

$= \frac{1}{8}\left[2(x^2-2a^2)\cos^{-1}\left(\frac{x}{2a}\right) - x\sqrt{4a^2-x^2}\right] + c.$

উদাহরণ–21. $\int \frac{x^2\sin^{-1}x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{x^2\sin^{-1}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$ ধরি $\sin^{-1}x = z$ বা $x = \sin z$

$= \int \frac{z\sin^2 z}{1-\sin^2 z}dz = \int z\tan^2 z\, dz$ $\therefore \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dz$

$= \int z\sec^2 z\, dz - \int z\, dz = z\tan z - \int \tan z\, dz - \frac{z^2}{2}$

$= z\tan z - ln|\sec z| - \frac{z^2}{2} + c$

$= z.\frac{\sin z}{\sqrt{1-\sin^2 z}} + ln|\cos z| - \frac{z^2}{2} + c$

$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin^{-1}x + ln\sqrt{1-x^2} - \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} + c$

$= \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}ln|1-x^2| - \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} + c.$

উদাহরণ–22. $\int e^{2x}\cos^2 x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int e^{2x}\cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}(1+\cos 2x\, dx)$

$= \frac{1}{2}\int e^{2x}dx + \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\, dx = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}.\frac{e^{2x}(2\cos 2x + 2\sin 2x)}{8} + c$

$= \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{8}e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x) + c.$

উদাহরণ–23. $\int \cos(b\ ln\ x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[BScEngg(KUET)–1995]

সমাধান ঃ $\int \cos(b\ lnx)dx = \int e^z\cos bz\, dz$ ধরি $lnx = z$

$= \frac{e^z}{\sqrt{b^2+1}}\cos(bz - \tan^{-1}b) + c$ $\therefore x = e^z$

$= \frac{x}{\sqrt{b^2+1}}\cos(b\ lnx - \tan^{-1}b) + c.$ $\therefore dx = e^z dz$

উদাহরণ–24. $\int e^{2x}\sin 2x\cos 4x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH–1989, RUH–1995]

সমাধান ঃ $\int e^{2x}\sin 2x\cos 4x\, dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}(\sin 6x - \sin 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin 6x\, dx - \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}.\frac{e^{2x}}{\sqrt{40}}\sin\left(6x - \tan^{-1}\frac{6}{2}\right) - \frac{1}{2}.\frac{e^{2x}}{\sqrt{8}}\sin(2x - \tan^{-1}1) + c$

$= \frac{1}{4\sqrt{10}}e^{2x}\sin(6x - \tan^{-1}3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{2x}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + c.$

উদাহরণ-25. $\int e^{2x}\left(\frac{1+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH-05, NUH(NM)-09, DUH-90, CUH-89, BIT -93]

সমাধান ঃ $\int e^{2x}\left(\frac{1+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)dx$ ধরি $2x = z$

$dx = \frac{1}{2}dz$

$= \frac{1}{2}\int e^{z}\left(\frac{1+\sin z}{1+\cos z}\right)dz$

$= \frac{1}{2}\int e^{z}.\left(\frac{1+2\sin\frac{7}{2}\cos\frac{z}{2}}{2\cos^2(z/2)}\right)dz = \frac{1}{2}\int e^{z}\left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{z}{2}+\tan\frac{z}{2}\right)dz$

$= \frac{1}{2}\int e^{z}.\left\{\tan\frac{z}{2}+\frac{d}{dz}\left(\tan\frac{z}{2}\right)\right\}dz = \frac{1}{2}.\ e^{z}.\tan\frac{z}{2}+c = \frac{1}{2}e^{2x}\tan x + c.$

উদাহরণ-26. $\int e^{x}\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int e^{x}\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx = \int e^{x}\left(\frac{1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2(x/2)}\right)dx$

$= \int e^{x}\left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right)dx = -\int e^{x}\left(\cot\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}\right)dx$

$= -\int e^{x}\left\{\cot\frac{x}{2}+\frac{d}{dx}\left(\cot\frac{x}{2}\right)\right\}dx = -e^{x}.\cot\frac{x}{2}+c.$

উদাহরণ-27. $\int\frac{xe^{x}}{(1+x)^2}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-62, 64, 84, BSc(Pass)-08, RUH-66, CUH-86]

সমাধান ঃ $\int\frac{xe^{x}}{(1+x)^2} = \int e^{x}\left\{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right\}dx$

$= \int e^{x}\left\{\frac{1}{1+x}+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)\right\}dx = e^{x}.\frac{1}{1+x}+c$

উদাহরণ-28. $\int e^{x}\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)-2006, DUH-1977, 1992, CUH-1986, BIT-1993]**

সমাধান ঃ $\int e^{x}\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx = \int e^{x}\left\{\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right\}dx$

$= \int e^{x}\left\{\frac{1}{1+x^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right\}dx = e^{x}.\frac{1}{1+x^2}+c.$

উদাহরণ-29. $\int\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1965, CRUH-1994, UH-1988]

সমাধান ঃ $\int\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$ ধরি $\tan^{-1}x = z$

$\therefore x = \tan z$

$= \int\frac{e^{mz}}{(1+\tan^2 z)^{3/2}}.\sec^2 z\,dz$ বা $dx = \sec^2 z\,dz$

$= \int\frac{e^{mz}.\sec^2 z}{\sec^3 z}dz = \int e^{mz}\cos z\,dz = \frac{e^{mz}}{m^2+1}(m\cos z+\sin z)+c$

$= \frac{e^{mz}}{m^2+1}\left\{\frac{m}{\sqrt{\tan^2 z+1}}+\frac{\tan z}{\sqrt{\tan^2 z+1}}\right\}+c = \frac{e^{m\tan^{-1}x}}{m^2+1}.\frac{m+x}{\sqrt{x^2+1}}+c.$

উদাহরণ-30. $\int\frac{x}{1+\operatorname{cosec} x}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[BScEngg(KUET)-1995]

সমাধান ঃ $\int\frac{x}{1+\operatorname{cosec} x}dx = \int\frac{x\sin x}{1+\sin x}dx$

$= \int\frac{x\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}dx = \int\frac{x\sin x - x\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

$= \int x\tan x\sec x\,dx - \int\frac{x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}dx$

$= \int x\tan x\sec x\,dx - \int x\sec^2 x\,dx + \int x\,dx$

$= \int x(\tan x\sec x - \sec^2 x)\,dx + \int x\,dx$

$= x(\sec x-\tan x) - \int(\sec x-\tan x)dx + \frac{x^2}{2}$

$= x(\sec x-\tan x) - \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\ln\sec x+\frac{x^2}{2}+c.$

উদাহরণ-31. $\int\frac{xe^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int\frac{xe^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ধরি $\sin^{-1}x = z$

$\therefore x = \sin z$

$dx = \cos z\,dz$

$= \int\frac{\sin z.\ e^{mz}}{\sqrt{1-\sin^2 z}}.\cos z\,dz$

$= \int e^{mz}\sin z\,dz = \frac{e^{mz}}{\sqrt{m^2+1}}\sin\left(z-\tan^{-1}\frac{1}{m}\right)+c$

$= \frac{e^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{m^2+1}}\sin(\sin^{-1}x-\cot^{-1}m)+c.$

উদাহরণ-32. $\int \left\{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right\} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \left\{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right\} dx$ ধরি $\ln x = z$

$\therefore x = e^z$

$dx = e^z\, dz$

$$= \int e^z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) dz = \int e^z \left\{\frac{1}{z} + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)\right\} dz$$

$$= e^z \cdot \frac{1}{z} + c = x \frac{1}{\ln x} + c.$$

উদাহরণ-33. $\int \sinh ax \cos bx\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \sinh ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int (e^{ax} - e^{-ax}) \cos bx\, dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} - \frac{e^{-ax}(-a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}\right] + c$$

উদাহরণ-34. $\int \ln \frac{a}{x} \cdot \sin^{-1} x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[CUH-1989]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \ln \frac{a}{x} \cdot \sin^{-1} x\, dx$

বা $I = \ln \frac{a}{x} \cdot \sin^{-1} x \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{a}{x} \cdot \sin^{-1} x\right) \int dx\right\} dx$

$$= x \ln \frac{a}{x} \sin^{-1} x - \int \left(\frac{\ln \frac{a}{x}}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{\sin^{-1} x}{x}\right) x.\, dx$$

$$= x \ln \frac{a}{x} \cdot \sin^{-1} x - \int \frac{x \ln \frac{a}{x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx + \int \sin^{-1} x\, dx$$

$$= x \ln \frac{a}{x} \cdot \sin^{-1} x - \ln \frac{a}{x} \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$+ \int \left\{\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{a}{x}\right) \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx\right\} dx + \sin^{-1} x.\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$= x \ln \frac{a}{x} \sin^{-1} x - \ln \frac{a}{x} \cdot \left\{-\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2}\right\}$$

$$+ \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2}\, dx + x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2})$$

$$= x \ln \frac{a}{x} \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} \cdot \ln \frac{a}{x} + \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} dx + x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$$

$$= \ln \frac{a}{x} [x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}] + x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + \int \frac{1 - x^2}{x\sqrt{1 - x^2}} dx$$

এখন $\int \frac{1 - x^2}{x\sqrt{1 - x^2}} dx = \int \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

$$= \int \frac{\frac{1}{x^2} dx}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} + \sqrt{1 - x^2}\, dx$$ ধরি $\frac{1}{x} = z$

$$= -\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) + \sqrt{1 - x^2} + c$$ $\therefore \frac{1}{x^2} dx = -dz$

$$= -\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) + \sqrt{1 - x^2} + c$$

$$\therefore I = \ln \frac{a}{x} [x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}] + x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$$

$$- \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) + \sqrt{1 - x^2} + c$$

$$= \ln \frac{a}{x} [x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}] + x \sin^{-1} x + 2\sqrt{1 - x^2} - \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) + c$$

উদাহরণ-35. যদি $u = \int e^{ax} \cos bx\, dx$, $v = \int e^{ax} \sin bx\, dx$ হয়, তবে দেখাও যে, (i) $\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = bx$ (ii) $(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) = e^{2ax}$.

প্রমাণ ঃ $u = \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(bx - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$

এবং $v = \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(bx - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$

(i) $\frac{v}{u} = \tan\left\{bx - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right\}$ বা $\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) = bx - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

বা $\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = bx$

(ii) $u^2 + v^2 = \frac{e^{2ax}}{a^2 + b^2}\left[\cos^2\left\{bx - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right\} + \sin^2\left\{bx - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right\}\right]$

$= \frac{e^{2ax}}{a^2 + b^2} \cdot 1$ বা $(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) = e^{2ax}$.

উদাহরণ-36. $\int \frac{x(\tan^{-1}x)^2}{(1+x^2)^{1/2}(1+x^2)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-2006]**

সমাধান ঃ $\int \frac{x(\tan^{-1}x)^2}{(1+x^2)^{1/2}(1+x^2)}\,dx$

ধরি $\tan^{-1}x = z$

বা $x = \tan z$

$\therefore dx = \sec^2 z\,dz$

$= \int \frac{\tan z \cdot z^2}{(1+\tan^2 z)^{3/2}} \cdot \sec^2 z\,dz$

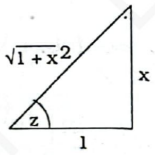
$= \int z^2 \sin z\,dz$

$= z^2(-\cos z) + \int 2z \cdot \cos z\,dz$

$= -z^2\cos z + 2z\sin z + 2\cos z + c$

$= -\frac{(\tan^{-1}x)^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2x\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + c$

$= -\frac{(\tan^{-1}x)^2 - 2x\tan^{-1}x - 2}{\sqrt{1+x^2}} + c$



$\tan z = x$

$\Rightarrow \cos z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\sin z = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

14.1. অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন কি? (What is the integration by parts?)

Ans : দুইটি রাশির গুণফলের ইন্টিগ্রাল নির্ণয়কে অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন বলা হয়। অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন এর সূত্র।

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int v\,dx\right\}dx$$

14.2. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + c$

বা $\frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(bx - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + c$

14.3. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ এর সূত্র লিখ।

Ans : $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + c$

বা $\frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(bx - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + c$

14.4. মান কত? (What is the value?) : $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}\,dx$

Ans : $\int\{e^x\{f(x) + f'(x)\}\,dx = e^x f(x) + c$

14.5. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\int e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)dx$

Ans : যেহেতু প্রদত্ত ইন্টিগ্রালটি $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}\,dx$ আকারের,

সুতরাং $\int e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)dx = e^x \ln x + c$

EXERCISE-14

মান নির্ণয় কর ঃ

1. $\int x\,e^{ax}\,dx$
2. $\int x\ln x\,dx$ **[DUH-1960]**
3. $\int (\ln x)^2\,dx$
4. $\int \sin^{-1}x\,dx$ **[BScEngg(KBIT)-1992]**
5. $\int x^n \ln x\,dx$ **[RUH-1962]**
6. $\int \sec^{-1}x\,dx$
7. $\int \frac{\ln(\sec^{-1}x)}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$
8. $\int x^2(\ln x)^2\,dx$ **[DUH-1963]**
9. $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$ **[DUH-1960, 1994]**
10. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$ **[CUH-1982]**
11. $\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **[DUH-1979]**
12. $\int x^2\cos x\,dx$ **[RUH-1956]**
13. $\int \frac{b+ax}{1+\sin x}\,dx$ **[NUH-96, DUH-54, RUH-06]**
14. $\int \cos^{-1}(4x^3 - 3x)dx$
15. $\int \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)dx$ **[RUH-1979]**
16. $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$ **[CUH-1982]**
17. $\int x\ln(1+x)dx$ **[DUH-1965]**
18. $\int \cos^{-1}\sqrt{\left(\frac{a}{a+x}\right)}\,dx$

19. $\int \frac{x^3 \sin^{-1}x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$

20. $\int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}\,dx$

21. $\int \frac{x + \sqrt{(1-x^2)}\,\sin^{-1}x}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx$

22. $\int \frac{x^2 \tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ **[DUH–1983]**

23. $\int \tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\,dx$ **[NUH–09, NUH(NM)–2009]**

24. $\int e^x \sin x\,dx$

25. $\int 3^x \cos x\,dx$ **[NUH–2002]**

26. $\int e^x \sin^2 x\,dx$

27. $\int e^x \sin x \sin 2x\,dx$ **[DUH–91]**

28. $\int e^x \sin x \cos x \cos 2x\,dx$

29. $\int x\,e^{2x} \cos x\,dx$

30. $\int \sin h\,2x \sin 2x\,dx$

31. $\int \cos(\ln x)dx$

32. $\int x \sin(2 \ln x)dx$

33. $\int e^{3x} \cos 4x\,dx$ **[NUH–1993]**

34. $\int e^{4x} \cos(3x+5)dx$ **[RUH–1956]**

35. $\int \frac{e^{m \tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}\,dx$ **[NUH–07, NUH(NM)–09, 10, DUH–85, 93, RUH–78, 84, BIT–96]**

36. $\int e^x \frac{1+x}{(2+x)^2}\,dx$ **[DUH–1951, 1984]**

37. $\int e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ **[NUH–09, DUH–61, 07, CUH–81, RUH–60]**

38. $\int \left(\frac{1 + x \ln x}{x}\right) e^x\,dx$ **[NUH(NM)–2003, 2007, BSc(Pass)–2006]**

39. $\int \left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right) e^x\,dx$

40. $\int e^x(\tan x - \ln \cos x)dx$

41. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x\,dx$ **[NUH(NM)–04, RUH–87, CUH–82, BIT–93]**

42. $\int \frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$

43. $\int \frac{\ln x\,dx}{(1+\ln x)^2}$

44. $\int \frac{1}{x^2} \sin(\ln x)dx.$

ANSWER–14

1. $\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+c$
2. $\frac{1}{4}x^2(2\ln|x|-1)+c$
3. $x(\ln x)^2 - 2x\ln|x| + 2x + c$
4. $x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$
5. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\ln x - \frac{1}{n+1}\right]+c$
6. $x\sec^{-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$
7. $\sec^{-1}x(\ln \sec^{-1}x - 1) + c$
8. $\frac{1}{27}x^3\{9(\ln|x|)^2 - 6\ln x + 2\}$
9. $x\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \tan^{-1}\sqrt{x} + c$
10. $2[\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}] + c$
11. $x - \sqrt{1-x^2}.\sin^{-1}x + c$
12. $(x^2-2)\sin x + 2x\cos x + c$
13. $(b+ax)(\tan x - \sec x) - a\ln|\sec x| + a\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+c$
14. $3[x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}] + c$
15. $3x\tan^{-1}x - \frac{3}{2}\ln(1+x^2) + c$
16. $2x\tan^{-1}x - \ln(1+x^2) + c$
17. $\frac{1}{2}x^2\ln|1+x| - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|1+x| + c$
18. $(a+x)\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)} - \sqrt{ax} + c$
19. $\frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\sin^{-1}x - x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$
20. $-x\cot\frac{x}{2} + c$
21. $x\sin^{-1}x + c$
22. $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2 + c$
23. $\frac{1}{2}[x\cos^{-1}x - \sqrt{(1-x^2)}] + c$
24. $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$
25. $\frac{3^x(\sin x + \ln 3 \cdot \cos x)}{1+(\ln 3)^2} + c$

26. $\frac{1}{2}e^x\left\{1-\frac{1}{5}(\cos 2x+2\sin 2x)\right\}+c$

27. $\frac{1}{4}e^x\left\{(\cos x+\sin x)-\frac{1}{5}(\cos 3x+3\sin 3x)\right\}+c$

28. $\frac{1}{4\sqrt{17}}e^x.\sin(4x-\tan^{-1}4)+c$

29. $e^{2x}\left[\frac{x}{\sqrt{5}}\cos\left(x-\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}\cos\left(x-2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]+c$

30. $\frac{1}{4}\cosh 2x.\sin 2x-\frac{1}{4}\sinh 2x.\cos 2x+c$

31. $\frac{1}{\sqrt{2}}x\cos\left(\ln|x|-\frac{\pi}{4}\right)+c$

32. $\frac{1}{2\sqrt{2}}x^2\sin\left(2\ln|x|-\frac{\pi}{4}\right)+c$

33. $\frac{1}{5}e^{3x}\cos\left(4x-\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)+c$

34. $\frac{1}{5}e^{4x}\cos\left(3x+5-\tan^{-1}\frac{3}{4}\right)+c.$

35. $\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{2}\left[\frac{1}{m}+\frac{1}{\sqrt{m^2+4}}\cos\left(2\tan^{-1}x-\tan^{-1}\frac{2}{m}\right)\right]+c$

36. $\frac{e^x}{2+x}+c$

37. $e^x\tan\frac{x}{2}+c$

38. $e^x\ln|x|+c$

39. $e^x\tan x+c$

40. $e^x\ln|\sec x|+c$

41. $e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+c$

42. $-e^{-\frac{1}{2}x}\sec\frac{1}{2}x+c$

43. $\frac{x}{1+\ln|x|}+c$

44. $-\frac{1}{2x}[\cos(\ln|x|+\sin(\ln|x|)]+c.$

Chapter–15

ক্রমিক লঘুকরণ প্রক্রিয়ার সাহায্যে ইন্টিগ্রেশন

INTEGRATION BY SUCCESSIVE REDUCTION

15.1. পর্যায়ক্রমে অংশক্রমের (Integration by Parts) সাহায্যে ধাপে ধাপে ইন্টিগ্রালের ঘাত লঘু বা হ্রাস করার পদ্ধতিকে লঘুকরণ সূত্র বলা হয়। সাধারণতঃ অংশক্রমের পদ্ধতি প্রয়োগ করিয়া লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় করা হয়।

15.2. $\int\sin^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর। **[NUH–2010]**

প্রমাণ ঃ ধরি $I_n=\int\sin^n x\,dx=\int\sin^{n-1}x\sin x\,dx$

$$=\sin^{n-1}x\int\sin x\,dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\sin^{n-1}x)\int\sin x\,dx\right\}dx$$

$$\therefore I_n=\sin^{n-1}x(-\cos x)-\int(n-1)\sin^{n-2}x\cos x(-\cos x)dx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)dx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\sin^n x\,dx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$\therefore nI_n=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}$$

$$\therefore I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

অর্থাৎ $\int\sin^n x\,dx=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

উদাহরণ–1. $\int\sin^6 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I=\int\sin^6 x\,dx$ ..... (1)

আমরা জানি $\int\sin^n x\,dx=\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$

$$\therefore (1)\Rightarrow I=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}+\frac{5}{6}\int\sin^4 x\,dx$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}+\frac{5}{6}\left[-\frac{\cos x\sin^3 x}{4}+\frac{3}{4}\int\sin^2 x\,dx\right]$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}+\frac{5}{8}\left[-\frac{\cos x\sin x}{2}+\frac{1}{2}\int dx\right]$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}-\frac{5\cos x\sin x}{16}+\frac{5x}{16}+c.$$

উদাহরণ–2. $\int \sin^5 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \sin^5 x\,dx$

লঘুকরণ সূত্রের সাহায্যে পাই $I = -\frac{\cos x \sin^4 x}{5} + \frac{4}{5}\int \sin^3 x\,dx$

$$= -\frac{\cos x \sin^4 x}{5} + \frac{4}{5}\left[-\frac{\cos x \sin^2 x}{3} + \frac{2}{3}\int \sin x\,dx\right]$$

$$= -\frac{\cos x \sin^4 x}{5} - \frac{4\cos x \sin^2 x}{15} - \frac{8}{15}\cos x + c$$

$$= -\frac{\cos x}{5}(1-\cos^2 x)^2 - \frac{4\cos x}{15}(1-\cos^2 x) - \frac{8}{15}\cos x + c$$

$$= -\frac{\cos x}{5} + \frac{2\cos^3 x}{5} - \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{4\cos x}{15} + \frac{4\cos^3 x}{15} - \frac{8\cos x}{15} + c$$

$$= -\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{15} + \frac{8}{15}\right)\cos x + \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{15}\right)\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c.$$

নোট ঃ 'ঘাত' বেজোড় হইলে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সহজে ইন্টিগ্রেশন করা যায়।

অর্থাৎ $\int \sin^5 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$ ধরি $\cos x = z$

$$= -\int (1-z^2)^2 dz \qquad \therefore \sin x\,dx = -dz$$

$$= -\int (1 - 2z^2 + z^4)dz = -z + \frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + c$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c.$$

15.3. $\int \cos^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–2006]**

প্রমাণ ঃ ধরি $I_n = \int \cos^n x\,dx \Rightarrow I_n = \int \cos^{n-1}x.\cos x\,dx$

$$= \cos^{n-1}x \int \cos x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\cos^{n-1}x)\int \cos x\,dx\right\}dx$$

$$= \cos^{n-1}x \sin x - \int (n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x).\sin x\,dx$$

$$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx$$

$$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx$$

$$= \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$\therefore I_n(1 + n - 1) = \cos^{n-1}x \sin x + (n-1)I_{n-1}$

বা $I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

অর্থাৎ $\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x \cos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

উদাহরণ–3. $\int \cos^8 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \cos^8 x\,dx$ ..... (1)

লঘুকরণ সূত্রের সাহায্যে পাই $I = \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7}{8}\int \cos^6 x\,dx$

$$= \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7}{8}\left[\frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{5}{6}\int \cos^4 x\,dx\right]$$

$$= \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7\cos x \cos^5 x}{48} + \frac{35}{48}\left[\frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx\right]$$

$$= \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7\sin x \cos^5 x}{48} + \frac{35\sin x \cos^3 x}{192} + \frac{35}{64}\left[\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx\right]$$

$$= \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7\sin x \cos^5 x}{48} + \frac{35\sin x \cos^3 x}{192} + \frac{35\sin x \cos x}{128} + \frac{35x}{128} + c.$$

15.4. $\int \tan^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর। **[NUH–02, NUH(NM)–07, DUH–04]**

প্রমাণ ঃ ধরি $I_n = \int \tan^n x\,dx$

$$\Rightarrow I_n = \int \tan^{n-2}x.\tan^2 x\,dx = \int \tan^{n-2}x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int \tan^{n-2}x \sec^2 x\,dx - \int \tan^{n-2}x\,dx$$

$$= \int \tan^{n-2}x\,d(\tan x) - I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$$

অর্থাৎ $\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

উদাহরণ–4. $\int \tan^6 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \tan^6 x\,dx$

লঘুকরণ সূত্রের সাহায্যে পাই $I = \frac{\tan^5 x}{5} - \int \tan^4 x\,dx$

$$= \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{\tan^3 x}{3} + \int \tan^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan x}{1} - \int \tan^0 x\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c.$$

উদাহরণ–5. $\int \tan^5 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–02, NUH(NM)–07]**

সমাধান ঃ $\int \tan^5 x\,dx$

$= \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan^3 x\,dx$ (লঘুকরণ সূত্র ব্যবহার করিয়া)

$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \int \tan x\,dx$

$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\sec x| + c$

15.5. $\int \cot^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি $I_n = \int \cot^n x\,dx \Rightarrow I_n = \int \cot^{n-2} x\,(\operatorname{cosec}^2 x - 1)dx$

$= -\int \cot^{n-2} x\,d(\cot x) - \int \cot^{n-2} x\,dx$

$\therefore \int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\,dx$, ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

15.6. $\int \sec^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি $I_n = \int \sec^n x\,dx \Rightarrow I_n = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\,dx$

$= \sec^{n-2} x \int \sec^2 x\,dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\sec^{n-2} x) \int \sec^2 x\,dx\right\} dx$

$= \sec^{n-2} x \tan x - \int (n-2)\sec^{n-3} x.\sec x \tan x.\tan x\,dx$

$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x(\sec^2 x - 1)dx$

$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^n x\,dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx$

$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}$

$\therefore I_n (1 + n - 2) = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2}$

বা $I_n = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$

অর্থাৎ $\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

উদাহরণ–6. $\int \sec^5 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \sec^5 x\,dx$

লঘুকরণ সূত্রের সাহায্যে পাই $I = \frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3 x\,dx$

$= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx\right]$

$= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3 \sec x \tan x}{8} + \frac{3}{8}\ln(\sec x + \tan x) + c.$

15.7. $\int \operatorname{cosec}^n x\,dx$ এর লঘুরকণ সূত্র নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি $I_n = \int \operatorname{cosec}^n x\,dx \Rightarrow I_n = \int \operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x\,dx$

$= \operatorname{cosec}^{n-2} x\,(-\cot x) - \int (n-2)\operatorname{cosec}^{n-3} x.\operatorname{cosec} x \cot x.\cot x\,dx$

$\therefore I_n = -\operatorname{cosec}^{n-2} x \cot x - (n-2)\int \operatorname{cosec}^{n-2} x\,(\operatorname{cosec}^2 x - 1)dx$

$= -\operatorname{cosec}^{n-2} x \cot x - (n-2)\{I_n - I_{n-2}\}$

$\therefore I_n(1 + n - 2) = -\operatorname{cosec}^{n-2} x \cot x + (n-2) I_{n-2}$

বা $I_n = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$

অর্থাৎ $\int \operatorname{cosec}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosec}^{n-2} x\,dx$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

15.8. $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\,dx$

$\Rightarrow I_{m,n} = \int \cos^{n-1} x\,(\sin^m x \cos x)dx$

$= \cos^{n-1} x \int \sin^m x\,d(\sin x) - \int \left\{\frac{d}{dx}(\cos^{n-1} x)\int \sin^m x\,d(\sin x)\right\} dx$

$= \cos^{n-1} x.\frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \int (n-1)\cos^{n-2} x.\sin x.\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\,dx$

$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{n-2} x \sin^m x.\sin^2 x\,dx$

$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{n-2} x \sin^m x(1 - \cos^2 x)dx$

$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{n-2} x\,\mathrm{sim}^m x\,dx - \frac{n-1}{m+1} I_{m,n}$

$\Rightarrow I_{m,n}\left(1 + \frac{n-1}{m+1}\right) = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{n-2} x\,\mathrm{sim}^m x\,dx$

$\Rightarrow I_{m,n} = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^{n-2} x \sin^m x\,dx$

$\Rightarrow \int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^{n-2} x \sin^m x\,dx$

আবার $\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int \sin^{m-1} x\,(\cos^n x \sin x)dx$

এখন উপরোক্তভাবে প্রমাণ করা যাইবে

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x\cos^n x\,dx$$

অর্থাৎ $\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^{n-2}x\sin^m x\,dx$

$$= -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x\cos^n x\,dx$$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

উদাহরণ–7. $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$

লঘুকরণ সূত্রের সাহায্যে পাই $I = -\frac{\sin x\cos^5 x}{6} + \frac{1}{6}\int \cos^4 x\,dx$ ..... (1)

এখন $\int \cos^4 x\,dx = \sin x\cos^3 x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx$

$$= \frac{\sin x\cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{\sin x\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx\right]$$

$$= \frac{\sin x\cos^3 x}{4} + \frac{3\sin x\cos x}{8} + \frac{3x}{8} + c_1$$

$$(1) \Rightarrow \int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = -\frac{\sin x\cos^5 x}{6} + \frac{1}{6}\left[\frac{\sin x\cos^3 x}{4} + \frac{3\sin x.\cos x}{8} + \frac{3x}{8}\right] + c$$

15.9. $\int \cos^m x\cos nx\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর।

[DUH–1982, CUH–1985]

প্রমাণ ঃ ধরি $I_{m,n} = \int \cos^m x\cos nx\,dx$

$$\Rightarrow I_{m,n} = \cos^m x\int \cos nx\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\cos^m x)\int \cos nx\,dx\right\}dx$$

$$= \frac{\cos^m x\sin nx}{n} - \int m\cos^{m-1}x(-\sin x).\frac{\sin nx}{n}\,dx$$

$$= \frac{\cos^m x\sin nx}{n} + \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\sin nx\sin x\,dx$$ ..... (1)

এখন $\cos(n-1)x = \cos nx + \sin nx\sin x$

$\therefore \sin nx\sin x = \cos(n-1)x - \cos nx\cos x$

$$(1) \Rightarrow I_{m,n} = \frac{\cos^m x\sin nx}{n} + \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\{\cos(n-1)x - \cos nx\cos x\}dx$$

$$= \frac{\cos^m x\sin nx}{n} + \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\cos(n-1)x\,dx - \frac{m}{n}\int \cos^m x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{\cos^m x\sin nx}{n} + \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\cos(n-1)x\,dx - \frac{m}{n}I_{m,n}$$

$$\therefore I_{m,n}\left(1+\frac{m}{n}\right) = \frac{\cos^m x\sin nx}{n} + \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\cos(n-1)\int^x dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^m x\cos nx\,dx = \frac{\cos^m x\sin nx}{m+n} + \frac{m}{m+n}\int \cos^{m-1}x\cos(n-1)x\,dx$$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

উদাহরণ–8. $\int \cos^3 x\cos 2x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \cos^3 x\cos 2x\,dx = \frac{\cos^3 x\sin 2x}{3+2} + \frac{3}{3+2}\int \cos^2 x\cos x\,dx$

$$= \frac{\cos^3 x\sin 2x}{5} + \frac{3}{5}\left[\frac{\cos^2 x\sin x}{2+1} + \frac{2}{2+1}\int \cos x\,dx\right]$$

$$= \frac{\cos^3 x\sin 2x}{5} + \frac{\cos^2 x\sin x}{5} + \frac{2}{5}\sin x + c.$$

15.10. $\int \cos^m x\sin nx\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি $I_{m,n} = \int \cos^m x\sin nx\,dx$

$$\Rightarrow I_{m,n} = -\frac{\cos^m x\cos nx}{n} - \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\cos nx\sin x\,dx$$ ..... (1)

এখন $\sin(n-1)x = \sin nx\cos x - \cos nx\sin x$

$\therefore \cos nx\sin x = \sin nx\cos x - \sin(n-1)x$

$$(1) \Rightarrow I_{m,n} = -\frac{\cos^m x\cos nx}{n} - \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\{\sin nx\cos x - \sin(n-1)x\}dx$$

$$= -\frac{\cos^m x\cos nx}{n} - \frac{m}{n}I_{m,n} + \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\sin(n-1)dx$$

$$\Rightarrow I_{m,n}\left(1+\frac{m}{n}\right) = -\frac{\cos^m x\cos nx}{n} + \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\sin(n-1)x\,dx$$

$$\therefore I_{m,n} = -\frac{\cos^m x\cos nx}{m+n} + \frac{m}{m+n}\int \cos^{m-1}x\sin(n-1)x\,dx$$

ইহাই নির্ণের লঘুকরণ সূত্র।

উদাহরণ–9. $\int \cos^2 x\sin 3x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \cos^2 x\sin 3x\,dx = -\frac{\cos^2 x\cos 3x}{2+3} + \frac{2}{2+3}\int \cos x\sin 2x\,dx$

$$= -\frac{\cos^2 x\cos 3x}{5} + \frac{2}{5}\left[-\frac{\cos x\cos 2x}{1+2} + \frac{1}{1+2}\int \sin x\right]dx$$

$$= -\frac{\cos^2 x\cos 3x}{5} - \frac{2}{15}\cos x\cos 2x - \frac{2}{15}\cos x + c.$$

15.11. $\int x^n e^{ax}\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর। **[NUH-08, RUH-91, 95]**

প্রমাণ ঃ ধরি $I_n = \int x^n e^{ax}\,dx \Rightarrow I_n = x^n \int e^{ax}\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x^n)\int e^{ax}\,dx\right\}dx$

$$= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

অর্থাৎ $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx$, ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

উদাহরণ-10. $\int x^3 e^{5x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int x^3 e^{5x}\,dx = \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3}{5}\int x^2 e^{5x}\,dx$

$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3}{5}\left[\frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int x e^{5x}\,dx\right]$$

$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6}{25}\left[\frac{x e^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\int e^{5x}\,dx\right]$$

$$= \frac{x^3 e^{5x}}{5} - \frac{3x^2 e^{5x}}{25} + \frac{6x e^{5x}}{125} - \frac{6}{125} e^{5x} + c.$$

15.12. $\int x^m (\ln x)^n\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি $I = \int x^m (\ln x)^n\,dx$

$$= (\ln x)^n \int x^m\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\ln x)^n \int x^m\,dx\right\}dx$$

$$\therefore \int x^m (\ln x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m (\ln x)^{n-1}dx$$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

15.13. $\int e^{ax} \sin^n bx\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি $I_n = \int e^{ax} \sin^n bx\,dx$

$$\Rightarrow I_n = \sin^n bx \int e^{ax}\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\sin^n bx)\int e^{ax}\,dx\right\}dx$$

$$= \sin^n bx.\frac{e^{ax}}{a} - \int n \sin^{n-1}(bx)\cos bx.\, b\,.\frac{e^{ax}}{a}\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}\sin^n bx}{a} - \frac{nb}{a}\int e^{ax}.\sin^{n-1} bx \cos bx\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}\sin^n bx}{a} - \frac{nb}{a}\left[\sin^{n-1} bx \cos bx.\int e^{ax}\,dx\right)$$

$$- \int\left\{\frac{d}{dx}(\sin^{n-1} bx \cos bx)\int e^{ax}\,dx\right\}dx\Bigg]$$

$$= \frac{e^{ax}\sin^n bx}{a} - \frac{nb\sin^{n-1} bx\cos bx.\, e^{ax}}{a^2}$$

$$+ \frac{nb}{a}\int\{(n-1)\sin^{n-2} bx.\cos^2 bx.\, b - b\sin^n bx\}\frac{e^{ax}}{a}\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}\sin^n bx}{a} - \frac{nb}{a^2} e^{ax}\sin^{n-1} bx\cos bx + \frac{n(n-1)b^2}{a^2}\times$$

$$\int e^{ax}\sin^{n-2} bx(1-\sin^2 bx)\,dx - \frac{nb^2}{a^2} I_n$$

$$= \frac{e^{ax}\sin^n bx}{a} - \frac{nb}{a^2} e^{ax}\sin^{n-1} bx\cos bx + \frac{n(n-1)b^2}{a^2} I_{n-2}$$

$$- \frac{n(n-1)b^2}{a^2} I_n - \frac{nb^2}{a^2} I_n$$

$$\Rightarrow I_n\left(1 + \frac{n^2 b^2}{a^2}\right) = \frac{e^{ax}\sin^n bx}{a} - \frac{nb}{a^2} e^{ax}\sin^{n-1} bx\cos bx$$

$$+ \frac{n(n-1)b^2}{a^2} I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{ae^{ax}\sin^n bx}{a^2+n^2b^2} - \frac{nbe^{ax}\sin^{n-1} bx\cos bx}{a^2+n^2b^2} + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2} I_{n-2}$$

অর্থাৎ $\int e^{ax}\sin^n bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1} bx}{a^2+n^2b^2}(a\sin bx - nb\cos bx)$

$$+ \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\sin^{n-2} bx\,dx$$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

15.14. $\int e^{ax}\cos^n bx\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি $I_n = \int e^{ax}\cos^n bx\,dx$

$$\Rightarrow I_n = \cos^n bx\int e^{ax}\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\cos^n bx)\int e^{ax}\,dx\right\}dx$$

$$= \cos^n bx.\frac{e^{ax}}{a} - n\int\cos^{n-1} bx.(-b\sin bx)\frac{e^{ax}}{a}\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}\cos^n bx}{a} + \frac{nb}{a}\int\cos^{n-1} bx\sin bx.\, e^{ax}\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}\cos^n bx}{a} + \frac{nb}{a}\left[\cos^{n-1} bx.\sin bx.\frac{e^{ax}}{a}\right.$$

$$\left. - \int\{(n-1)\cos^{n-2} bx.(-b\sin bx).\sin bx + b\cos^n bx\}\frac{e^{ax}}{a}\,dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}\cos^n bx}{a} + \frac{nb}{a}\left[\frac{e^{ax}\cos^{n-1} bx \sin bx}{a}\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)b}{a}\int \cos^{n-2}bx\,(1-\cos^2 bx)e^{ax}\,dx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos^n bx\,dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}\cos^n bx}{a} + \frac{nb}{a}\left[\frac{e^{ax}\cos^{n-1} bx \sin bx}{a}\right.$$

$$+ \frac{(n-1)b}{a}\int e^{ax}\cos^{n-2} bx\,dx - \frac{(n-1)b}{a}\int e^{ax}\cos^n bx\,dx$$

$$\left. - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos^n bx\,dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax}\cos^n bx}{a} + \frac{nbe^{ax}\cos^{n-1} bx \sin bx}{a^2} + \frac{n(n-1)b^2}{a^2} I_{n-2}$$

$$- \left\{\frac{n(n-1)b^2}{a^2} + \frac{nb^2}{a^2}\right\} I_n$$

$$= \frac{e^{ax}\cos^n bx}{a} + \frac{nb\,e^{ax}\cos^{n-1} bx.\,\sin bx}{a^2} + \frac{n(n-1)b^2}{a^2} I_{n-2} - \frac{n^2b^2}{a^2} I_n$$

$$\Rightarrow I_n\left(1 + \frac{n^2b^2}{a^2}\right) = \frac{e^{ax}\cos^n bx}{a} + \frac{nbe^{ax}\cos^{n-1} bx \sin bx}{a^2}$$

$$+ \frac{n(n-1)b^2}{a^2} I_{n-2}$$

$$\therefore I_n = \frac{ae^{ax}\cos^n bx}{a^2+n^2b^2} + \frac{nbe^{ax}\cos^{n-1} bx.\,\sin bx}{a^2+n^2b^2} + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2} I_{n-2}$$

অর্থাৎ $\int e^{ax}\cos^n bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}bx}{a^2+n^2b^2}(a\cos bx + nb\sin bx)$

$$\frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx$$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

উদাহরণ–11. $\int e^{2x}\sin^3 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int e^{2x}\sin^3 x\,dx$

$$= \frac{e^{2x}\sin^2 x}{2^2+3^2}(2\sin x - 3\cos x) + \frac{3.2}{2^2+3^2}\int e^{2x}\sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{13}e^{2x}\sin^2 x(2\sin x - 3\cos x) + \frac{6}{13}\left[\frac{e^{2x}}{2^2+1^2}(2\sin x - \cos x)\right] + c$$

$$= \frac{1}{13}e^{2x}\sin^2 x(2\sin x - 3\cos x) + \frac{6}{65}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + c.$$

15.15. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+a^2)^{-n}\int dx\right\}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + n\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\cdot 2x.\,x\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\,I_n - 2na^2\,I_{n+1}$$

$$\Rightarrow 2na^2\,I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n$$

n এর পরিবর্তে n – 1 বসাই $2(n-1)a^2\,I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}$

$$\therefore I_n = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}$$

অর্থাৎ $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)\,a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

উদাহরণ–12. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{x}{2.3(x^2+1)^3} + \frac{5}{2.3}\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

$$= \frac{x}{6(x^2+1)^3} + \frac{5}{6}\left[\frac{x}{2.2(x^2+1)^2} + \frac{3}{2.2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\right]$$

$$= \frac{x}{6(x^2+1)^3} + \frac{5x}{24(x^2+1)^2} + \frac{15}{24}\left[\frac{x}{2.1(x^2+1)} + \frac{1}{2.1}\int \frac{dx}{x^2+1}\right].$$

$$= \frac{x}{6(x^2+1)^3} + \frac{5x}{24(x^2+1)^2} + \frac{5}{8}\left[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x\right] + c$$

$$= \frac{x}{6(x^2+1)^3} + \frac{5x}{24(x^2+1)^2} + \frac{5x}{16(x^2+1)} + \frac{5}{16}\tan^{-1}x + c.$$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

15.1. ইন্টিগ্রেশনের লঘুকরণ সূত্র কি? (What is the reduction formula of integration?)

Ans : অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন এর সাহায্যে ধাপে ধাপে ইন্টিগ্রাল ফাংশনের ঘাত লঘু বা হ্রাস করার পদ্ধতিকে ইন্টিগ্রেশনের লঘুকরণ সূত্র বলা হয়।

15.2. $\int \sin^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র লিখ।

Ans : $\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$

15.3. $\int \cos^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র লিখ।

(Write the reduction formula of $\int \cos^n x\,dx$)

Ans : $\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

15.4. $\int \tan^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র লিখ।

Ans : $\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx$

15.5. $\int \cot^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র লিখ।

Ans : $\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\,dx$

15.6. $\int \sec^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র লিখ।

Ans : $\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$

15.7. $\int \text{cosec}^n x\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র লিখ।

Ans : $\int \text{cosec}^n x\,dx = -\frac{\text{cosec}^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \text{cosnce}^{n-2} x\,dx$

15.8. $\int \sin^m x \cos^m x\,dx$ এর লঘূকরণ সূত্র লিখ।

Ans : $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^{n-2} x \sin^m x\,dx$$

বা, $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx$$

15.9. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ এর লঘুকরণ সূত্র লিখ।

Ans : $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$.

15.10. $\int \cos^m x \cos nx\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর। [Write the reduction formula of $\int \cos^m x \cos nx\,dx$.]

Ans : $\int \cos^m x \cos nx\,dx$

$$= \frac{\cos^m x \sin nx}{m+1} + \frac{m}{m+n}\int \cos^{m-1} x \cos(n-1)x\,dx$$

EXERCISE–15

মান নির্ণয় কর ঃ

1. $\int \cos^6 x\,dx$
2. $\int \tan^4 x\,dx$
3. $\int \cot^5 x\,dx$
4. $\int \sin^8 x\,dx$
5. $\int \sec^8 x\,dx$
6. $\int \text{cosec}^4 x\,dx$
7. $\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$
8. $\int \cos^2 x \sin 4x\,dx$
8. $\int x^3 e^{3x}\,dx$
10. $\int x^3 (\ln x)^2\,dx$
11. $\int e^{-x} \cos^3 x\,dx$
12. $\int e^{-3x} \cos^3 x\,dx$
13. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$
14. $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx$ **[CUH–1980]**
15. $\int \text{cosec}^3 x\,dx$.

ANSWER–15

1. $\frac{\sin x \cos^3 x}{6}\left(\cos^2 x + \frac{5}{4}\right) + \frac{5}{16}(\sin x \cos x + x) + c$

2. $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$

3. $-\frac{1}{4}\cot^4 x + \frac{1}{2}\cot^2 x + ln(\sin x) + c$

4. $\frac{1}{2^7}\left[\frac{1}{8}\sin 8x - \frac{4}{3}\sin 6x + 7\sin 4x - 28\sin 2x + 35x\right] + c$

5. $\tan x + \tan^3 x + \frac{3}{5}\tan^5 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + c$ 6. $-\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + c$

7. $\frac{\sin x \cos x}{2}\left(\frac{\sin^4 x}{3} - \frac{\sin^2 x}{12} - \frac{1}{8}\right) + \frac{x}{16} + c$

8. $-\frac{\cos^2 x \cos 4x}{6} - \frac{\cos x \cos 3x}{12} - \frac{\cos 2x}{24} + c$

9. $\frac{e^{3x}}{3}\left(x^3 - x^2 + \frac{2x}{3} - \frac{2}{9}\right) + c$

10. $\frac{x^4}{4}\left\{(ln\, x)^2 - \frac{ln_e x}{2} + \frac{1}{8}\right\} + c$

11. $\frac{e^{-x}}{10}\{3(\sin x - \cos x) + \cos^2 x(3\sin x \quad \cos x)\} + c$

12. $\frac{e^{-3x}}{8}\left\{\frac{1}{3}(\sin 3x - \cos 3x) + \frac{3}{5}(\sin x - 3\cos x)\right\} + c$

13. $\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\tan^{-1} x + c$

14. $\frac{1}{8}\sin^5 x \cos^3 x + \frac{1}{16}\sin^5 x \cos x - \frac{1}{64}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{256}\sin 2x + \frac{3x}{128} + c$

15. $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x \cot x + \frac{1}{2} ln \tan\frac{x}{2} + c.$

———×———

Chapter–16(A)
নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল
DEFINITE INTEGRAL

16.1. যদি [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে f(x) ফাংশনটি সীমাবদ্ধ (bounded) হয় এবং [a, b] ব্যবধিকে অসীমভাবে অধিক সংখ্যক উপব্যবধি δ_r এ (infinitely large number of sub-intervals) এমনভাবে বিভক্ত করা হয় যে, সর্বাপেক্ষা দীর্ঘ্য উপব্যবধি δ এর দৈর্ঘ্য শূন্যের দিকে অগ্রসর হয় এবং u_r যদি δ_r এর ভিতরে x এর যে কোন মান হয়, যেখানে $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} f(u_r)\,\delta_r$ এর নির্দিষ্ট একটি মাত্র পরিমেয় মান থাকে, তবে এই মানকে নিম্নসীমা a হইতে উচ্চসীমা b পর্যন্ত f(x) এর নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল বলে। ইহাকে $\int_a^b f(x)\,dx$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} f(u_r)\,\delta_r$.

16.2. ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্যটি (Fundamental theorem) বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

[NUH–03, 05, 09, NUH(NM)–04, DUH–05, 07, PSc(Pass)–07]

বর্ণনা ঃ যদি f(x) ফাংশন [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন (Continuous) এবং f(x) এর প্রতি অন্তরক (anti-derivative) F(x) হয়

তবে $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

প্রমাণ ঃ ধরি [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ এইরূপ বিন্দুসমূহ যে, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$ হয়। সুতরাং বিন্দুসমূহ [a, b] ব্যবধিকে $[a, x_1]$, $[x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, b]$ উপ-ব্যবধিতে বিভক্ত করে।

ধরি উপ-ব্যবধি সমূহের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$.

যেহেতু f(x) এর প্রতি-অন্তরক (anti-derivative) F(x) অর্থাৎ $F'(x) = f(x)$, সুতরাং F(x) ফাংশন মধ্যমান উপপাদ্যের সকল শর্ত সিদ্ধ করে।

∴ অন্ততঃ পক্ষে একটি বিন্দু $u_r \in (x_{r-1}, x_r)$ এর জন্য পাই

$F(x_1) - F(a) = (x_1 - a)\,F'(u_1) = \delta_1 f(u_1)$
$F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1)\,F'(u_2) = \delta_2 f(u_2)$
$F(x_3) - F(x_2) = (x_3 - x_2)\,F'(u_3) = \delta_3 f(u_3)$
... ...
$F(b) - F(x_{n-1}) = (b - x_{n-1})\,F'(u_n) = \delta_n f(u_n)$

যোগ করিয়া পাই, $F(b) - F(a) = \sum_{r=1}^{n} \delta_r f(u_r)$

যেহেতু f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন, সুতরাং $n \to \infty$ এর জন্য $\delta \to 0$ হইবে।

$$\therefore F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \delta_r f(u_r) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

নোট ঃ (i) $F(b) - F(a)$ কে $[F(x)]_a^b$ বা $F(x)]_a^b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ii) $F(x)$ এর পরিবর্তে প্রতি-অন্তরক (antiderivative) $F(x) + c$, (ইন্টিগ্রাল ধ্রুবক হইলে $\int_a^b f(x)dx = [F(x) + c]_a^b$ হইবে

$$= \{F(b) + c\} - \{F(a) + c\} = F(b) - F(a)$$

অর্থাৎ ইন্টিগ্রাল ধ্রুবক নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রেশনের জন্য প্রয়োজন নাই।

16.3. প্রমাণ কর $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ **[NUH-2007]**

প্রমাণ ঃ মনে করি $f(x)$ ফাংশনের প্রতি-অন্তরক (anti-derivative) $F(x)$ অর্থাৎ $F'(x) = f(x)$ বা $\int f(x)dx = F(x)$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \cdots\cdots (1)$$

এবং $-\int_b^a f(x)dx = -[F(x)]_b^a = -\{F(a) - F(b)\}$

$$= -F(a) + F(b) = F(b) - F(a) \cdots\cdots (2)$$

(1) ও (2) হতে পাই $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

16.4. প্রমাণ কর $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)dz$ **[NUH-07, NUH(NM)-09]**

প্রমাণ ঃ ধরি $\int f(x)dx = F(x)$ এবং $\int f(z)dz = F(z)$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

এবং $\int_a^b f(z)dz = [F(z)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \therefore \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz$

উদাহরণ-1. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH-1983]**

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sec^2\frac{x}{2}\,dx$

$$= \left[\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1.$$

উদাহরণ-2. $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2} = \int_0^3 \frac{dx}{3^2+x^2} = \left[\frac{1}{3}\text{tna}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^3$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}(1) - \frac{1}{3}\tan^{-1}(0) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{12}.$$

উদাহরণ-3. $\int_0^2 \frac{dx}{16-x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^2 \frac{dx}{4^2-x^2} = \frac{1}{2.4}\left[ln\frac{4+x}{4-x}\right]_0^2$

$$= \frac{1}{8}ln\left(\frac{4+2}{4-2}\right) - \frac{1}{8}ln\left(\frac{4+0}{4-0}\right) = \frac{1}{8}ln3 - \frac{1}{8}ln1 = \frac{1}{8}ln3.$$

উদাহরণ-4. $\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\,d\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1955, 1965, CUH-1984]

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (1+\cos 2\theta)d\theta$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right] - 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}(\pi+2).$$

উদাহরণ-5. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH-1969]**

সমাধান ঃ $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_0^1$

$$= 0 + \frac{1}{2}\sin^{-1}(1) - 0 - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

উদাহরণ-6. $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{3+4\sin x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-1983]**

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{3+4\sin x}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \frac{4\cos x}{3+4\sin x}\,dx$

$$= \frac{1}{4}\left[ln_e(3+4\sin x)\right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{4}\left[ln\left(3+4\sin\frac{\pi}{3}\right) - ln(3+0)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[ln\left(3+\frac{4\sqrt{3}}{2}\right) - ln3\right] = \frac{1}{4}ln\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

উদাহরণ-7. $\int_0^1 x^3\sqrt{(1+3x^4)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[CUH-1982, 1978]**

সমাধান ঃ $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}\,dx$

ধরি $1+3x^4 = z^2$

$\therefore 12x^3\,dx = 2z\,dz$

বা $x^3\,dx = \frac{1}{6}z\,dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 1$

যখন $x = 1$ তখন $z = 2$

$$= \int_1^2 \frac{1}{6}z^2\,dz = \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{z^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{18}[8-1] = \frac{7}{18}$$

উদাহরণ–8. $\int_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–1983]**

সমাধান ঃ $\int_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_{\ln_e a}^{\ln_e b} z\,dz$ ধরি $\ln x = z$

$\therefore \frac{1}{x}\,dx = dz$

$= \left[\frac{z^2}{2}\right]_{\ln_e a}^{\ln_e b} = \frac{1}{2}[(\ln b)^2 - (\ln a)^2]$ যখন $x = a$ তখন $z = \ln a$

যখন $x = b$ তখন $z = \ln b$

$= \frac{1}{2}(\ln b + \ln a)(\ln b - \ln a) = \frac{1}{2}\ln ab.\ln\frac{b}{a}$.

উদাহরণ–9. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ ধরি $\tan^{-1}x = z$

$\therefore \frac{1}{1+x^2}\,dx = dz$

$= \int_0^{\pi/4} z\,dz$ যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

$= \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32}$. যখন $x = 1$ তখন $z = \frac{\pi}{4}$

উদাহরণ–10. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2} = \int_1^3 \frac{1}{z^2}\,dx$ ধরি $1 + \ln x = z$ $\therefore \frac{1}{x}\,dx = dz$

যখন $x = 1$ তখন $z = 1$

$= \left[-\frac{1}{z}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$. যখন $x = e^2$ তখন $z = 3$

উদাহরণ–11. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1988]**

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}\,dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}\,dx = -\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$

$= -\int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)dx = [x - \tan x]_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) - 0 = \frac{\pi}{4} - 1$

উদাহরণ–12. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/4} \frac{2\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x}}{\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x}}\,dx$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{2\tan x \sec^2 x\,dx}{(\tan^2 x)^2 + 1}$ ধরি $\tan^2 x = z$

$\therefore 2\tan x \sec^2 x\,dx = dz$

$= \int_0^1 \frac{dz}{z^2+1} = [\tan^{-1} z]_0^1$ যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

যখন $x = \frac{\pi}{4}$ তখন $z = 1$

$= \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4}$.

উদাহরণ–13. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,(\sin x)^{1/4}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,(\sin x)^{1/4}dx$

$= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)(\sin x)^{1/4}\cos x\,dx$

$= \int_0^1 (1 - z^2)\,z^{1/4}\,dz$ ধরি $\sin x = z$

$\therefore \cos x\,dx = dz$

$= \int_0^1 (z^{1/4} - z^{9/4})\,dz$ যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

$= \left[\frac{z^{5/4}}{5/4} - \frac{z^{13/4}}{13/4}\right]_0^1$ যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = 1$

$= \frac{4}{5} - \frac{4}{13} = \frac{52-20}{65} = \frac{32}{65}$

উদাহরণ–14. $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)^3 \cos x\,dx$

$= \int_0^1 (1 - z^2)^3\,dz$ ধরি $\sin x = z$

$\therefore \cos x\,dx = dz$

$= \int_0^1 (1 - 3z^2 + 3z^4 - z^6)dz$ যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

$= \left[z - x^3 + \frac{3}{5}z^5 - \frac{z^7}{7}\right]_0^1$ যখন $z = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = 1$

$= 1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}$.

উদাহরণ–15. $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^3\theta\,d\theta$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1991]**

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^3\theta\,d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta(1 - \sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$ ধরি $\sin\theta = z$

$\therefore \cos\theta\,d\theta = dz$

$= \int_0^1 z^2(1 - z^2)dz$ যখন $\theta = 0$ তখন $z = 0$

$= \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ যখন $\theta = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = 1$

উদাহরণ–16. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1988]**

সমাধান ঃ $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

ধরি $x = \sin\theta$
$\therefore dx = \cos\theta\,d\theta$
যখন $x = 0$ তখন $\theta = 0$
যখন $x = 1$ তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

$= \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta.\cos\theta.\cos\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (2\sin\theta\cos\theta)^2\,d\theta$

$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} 2.\sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)d\theta$

$= \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] - 0 = \frac{\pi}{16}.$

উদাহরণ–17. $\int_0^{\pi/6} \sec^3\theta\,d\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/6} \sec^3\theta\,d\theta$

ধরি $\tan\theta = z$
$\therefore \sec^2\theta\,d\theta = dz$
যখন $\theta = 0$ তখন $z = 0$
যখন $\theta = \frac{\pi}{6}$ তখন $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \int_0^{\pi/6} \sqrt{1+\tan^2\theta}\,.\,\sec^2\theta\,d\theta$

$= \int_0^{1/\sqrt{3}} \sqrt{1+z^2}\,dz$

$= \left[\frac{z\sqrt{1+z^2}}{2} + \frac{1}{2}\log(z+\sqrt{1+z^2})\right]_0^{1/\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\frac{1}{3}}\right) - 0$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}}.\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\sqrt{3}.$

উদাহরণ–18. $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–02, RUH–59]**

সমাধান ঃ $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

ধরি $x = \sin\theta$
$\therefore dx = \cos\theta\,d\theta$
যখন $x = \frac{1}{2}$ তখন $\theta = \frac{\pi}{6}$
যখন $x = 1$ তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cosec}\theta\,d\theta$

$= [\log(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta]_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln(1-0) - \ln(2-\sqrt{3})$

$= \ln\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right) = \ln(2+\sqrt{3}).$

উদাহরণ–19. মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\int_0^3 \frac{dx}{(3+x^2)^{3/2}}$ **[NUH–2007, NUH(NM)–2009]**

(ii) $\int_0^3 \frac{dx}{(x^2+16)^{3/2}}$ **[RUH–1965]**

সমাধান ঃ (i) $\int_0^3 \frac{dx}{(3+x^2)^{3/2}}$

ধরি, $x = \sqrt{3}\tan\theta$
$\therefore dx = \sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta$
যখন $x = 0$ তখন $\theta = 0$
যখন $x = 3$ তখন $\theta = \pi/3$

$= \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta}{(3+3\tan^2\theta)^{3/2}}$

$= \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta}{3\sqrt{3}\sec^3\theta}$

$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/3} \cos\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{3}[\sin\theta]_0^{\pi/3}$

$= \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

(ii) $\int_0^3 \frac{dx}{(x^2+16)^{3/2}}$

ধরি $x = 4\tan\theta$
$\therefore dx = 4\sec^2\theta\,d\theta$
যখন $x = 0$ তখন $\theta = 0$
যখন $x = 3$ তখন $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

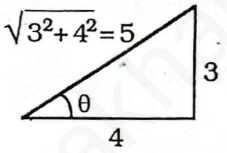
$= \int_0^{\tan^{-1}\frac{3}{4}} \frac{4\sec^2\theta\,d\theta}{(16+16\tan^2\theta)^{3/2}}$

$= \int_0^{\tan^{-1}\frac{3}{4}} \frac{4\sec^2\theta\,d\theta}{4^3\sec^3\theta} = \frac{1}{16}\int_0^{\tan^{-1}\frac{3}{4}} \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{16}[\sin\theta]_0^{\tan^{-1}\frac{3}{4}}$

$= \frac{1}{16}\sin\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}\right) - 0$

$= \frac{1}{16}\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$

$= \frac{1}{16}.\frac{3}{5} = \frac{3}{80}.$



$\therefore \tan^{-1}\frac{3}{4} = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

উদাহরণ–20. $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$

ধরি $x+1 = z^2$
$\therefore dx = 2z\,dz$
যখন $x = 0$, তখন $z = 1$
যখন $x = 3$ তখন $z = 2$

$= \int_1^2 \frac{2z\,dz}{(z^2+1).z}$

$$= 2\int_1^2 \frac{dz}{z^2+1} = 2\left[\tan^{-1} z\right]_1^2$$

$$= 2\tan^{-1}2 - 2\tan^{-1}1 = 2\tan^{-1}2 - \frac{\pi}{2}.$$

উদাহরণ-21. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+2\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-61, CUH-89]**

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+2\cos\theta}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+2\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)}$$

ধরি $\tan\frac{\theta}{2} = z$

$\therefore \sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2\,dz$

যখন $\theta = 0$ তখন $z = 0$

যখন $\theta = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = 1$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\frac{\theta}{2}\,d\theta}{3-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{2\,dz}{3-z^2} = 2\int_0^1 \frac{dz}{(\sqrt{3})^2 - z^2} = 2.\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\log_e \frac{\sqrt{3}+z}{\sqrt{3}-z}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} ln\,1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} ln\left(\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} ln(2+\sqrt{3}).$$

উদাহরণ-22. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH-1958, 1967]**

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}}$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{3+\tan^2\frac{x}{2}}$$

ধরি $\tan\frac{x}{2} = z$

$\therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2\,dz}{3+z^2}$$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

যখন $x = \pi$ তখন $z = \infty$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{3}}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

উদাহরণ-23. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x + a^2}$, $1 + a^2 > 2a$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1984, RUH-1987]

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x + a^2} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1+a^2) - 2a.\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}}$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{(1-2a+a^2) + (1+2a+a^2)\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{(1-a)^2 + (1+a)^2\tan^2\frac{x}{2}}$$

ধরি $\tan\frac{x}{2} = z$

$\therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$

যখন $x = 0$, $z = 0$

যখন $x = \pi$, $z = \infty$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2\,dz}{(1-a)^2 + (1+a)^2 z^2}$$

$$= \frac{2}{(1+a)^2}\int_0^{\infty} \frac{dz}{\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 + z^2}$$

$$= \frac{2}{(1+a)^2}\cdot\frac{1+a}{1-a}\left[\tan^{-1}\frac{(1+a)z}{1-a}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{1-a^2}(\tan^{-1}\infty - 0) = \frac{\pi}{1-a^2}$$

উদাহরণ-24. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH-1980, 1988]**

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3.\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{8+2\tan^2\frac{x}{2}} = \int_0^1 \frac{2\,dz}{8+2z^2}$$

ধরি $\tan\frac{x}{2} = z$

$\therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$

যখন $x = 0$, তখন $z = 0$

যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = 1$

$$= \int_0^1 \frac{dz}{2^2+z^2} = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{z}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}.$$

উদাহরণ-25. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\sin x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\sin x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5.\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{4\tan^2\frac{x}{2} + 10\tan\frac{x}{2} + 4}$$

ধরি $\tan\frac{x}{2} = z$

$\therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = 1$

$$= \int_0^1 \frac{dz}{2z^2 + 5z + 2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{\left(z + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.\frac{3}{4}}\left[\log\frac{z + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{z + \frac{5}{4} + \frac{3}{4}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{6}{12}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{1}{3}\ln 2.$$

উদাহরণ–26. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} + \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{2 + 2\tan\frac{x}{2}}$

$$= \left[\ln\left(2 + 2\tan\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} = \ln(2 + 2) - \ln 2 = \ln 2.$$

উদাহরণ–27. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\left(2 + \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}\right)^2}$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sec^2\frac{x}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)}{\left(3 + \tan^2\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

ধরি $\tan\frac{x}{2} = z$

$\therefore \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

যখন $x = \pi$ তখন $z = \infty$

$$= \int_0^{\infty} \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 3)^2}\cdot 2dz$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{(z^2 + 3) - 2}{(z^2 + 3)^2}\,dz$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{z^2 + 3}\,dz - 4\int_0^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\infty} - 4\int_0^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} - 4\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta}{(3 + 3\tan^2\theta)^2}$$

ধরি $z = \sqrt{3}\tan\theta$

$\therefore dz = \sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta$

যখন $z = 0$ তখন $\theta = 0$

যখন $z = \infty$ তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{9}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

উদাহরণ–28. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{(1 + \sin x)(2 + \sin x)}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH(NM)–2008]

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{(1 + \sin x)(2 + \sin x)}$

$$= \int_0^1 \frac{dz}{(1 + z)(2 + z)}$$

ধরি $\sin x = z$

$\therefore \cos x\,dx = dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = 1$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{z + 1} + \frac{-1}{z + 2}\right)dz$$

$$= \left[\ln\left(\frac{z + 1}{z + 2}\right)\right]_0^1 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

উদাহরণ–29. $\int_2^3 \frac{x^2 + 1}{(2x + 1)(x^2 - 1)}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_2^3 \frac{x^2 + 1}{(2x + 1)(x^2 - 1)}\,dx$

$$= \int_2^3 \left[\frac{\frac{1}{4} + 1}{(2x + 1)(-3/2)(1/2)} + \frac{1 + 1}{2\cdot 3(x - 1)} + \frac{1 + 1}{-1(-2)(x + 1)}\right]dx$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{-5/3}{2x + 1} + \frac{1/3}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{5}{6}\ln(2x + 1) + \frac{1}{3}\ln(x - 1) + \ln(x + 1)\right]_2^3$$

$$= -\frac{5}{6}(\ln 7 - \ln 5) + \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 4 - \ln 3)$$

$$= \frac{5}{6}\ln\frac{5}{7} + \frac{1}{3}\ln 2 + \ln\frac{4}{3}.$$

উদাহরণ–30. $\int_0^4 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+9}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–1996]**

সমাধান ঃ $\int_0^4 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+9}} = \int_0^4 \frac{x(x^2+9) - 9x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

$$= \int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx - 9\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 2x\sqrt{x^2+9}\,dx - \frac{9}{2}\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(x^2+9)^{3/2}\right]_0^4 - \frac{9}{2}2\left[\sqrt{x^2+9}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{3}[(25)^{3/2} - (9)^{3/2}] - 9[\sqrt{25} - \sqrt{9}]$$

$$= \frac{1}{3}(125 - 27) - 9(5 - 3)$$

$$= \frac{98}{3} - 18 = \frac{44}{3}.$$

উদাহরণ–31. $\int_0^a \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[B.Sc(Pass)–2010]**

সমধান ঃ $\int_0^a \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}\,dx$

$$= -\int_{\pi/2}^0 \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\,(a\sin\theta\,d\theta)$$

ধরি $x = a\cos\theta$,

$\therefore dx = -a\sin\theta\,d\theta$

যখন $x = 0$ তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

যখন $x = a$ তখন $\theta = 0$

$$= a\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= a\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= a\int_0^{\pi/2} (1+\cos\theta)\,d\theta$$

$$= a[\theta + \sin\theta]_0^{\pi/2} = a\left(\frac{\pi}{2} + 1\right).$$

উদাহরণ–32. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH–1962, RUH–1981, CUH–1984]

সমাধান ঃ $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

ধরি $x = \sin\theta$

$\therefore dx = \cos\theta\,d\theta$

যখন $x = 0$ তখন $\theta = 0$

যখন $x = 1$ তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,d\theta}{(1+\sin^2\theta)\cos\theta}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^2\theta + \tan^2\theta}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{1+2\tan^2\theta}$$

ধরি $\tan\theta = z$

$\therefore \sec^2\theta\,d\theta = dz$

যখন $\theta = 0$ তখন $z = 0$

যখন $\theta = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = \infty$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dz}{1+2z^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dz}{\frac{1}{2}+z^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\left[\tan^{-1}(\sqrt{2}z)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\tan^{-1}\infty - 0] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

উদাহরণ–33. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–2007, 2009, DUH–1994, 2007]

সমাধান ঃ $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$

$$= -\int_1^{1/2} \frac{\frac{1}{z^2}\,dz}{\frac{1}{z}\sqrt{1+2\left(\frac{1}{z}-1\right)-\left(\frac{1}{z}-1\right)^2}}$$

ধরি $1 + x = \frac{1}{z}$

$\therefore dx = -\frac{1}{z^2}\,dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 1$

যখন $x = 1$ তখন $z = \frac{1}{2}$

$$= \int_{1/2}^1 \frac{dz}{z\sqrt{1+\frac{2}{z}-2-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}-1}}$$

$$= \int_{1/2}^{1} \frac{dz}{z\sqrt{-2+\frac{4}{z}-\frac{1}{z^2}}} = \int_{1/2}^{1} \frac{dz}{\sqrt{-2z^2+4z-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/2}^{1} \frac{dz}{\sqrt{-(z^2-2z)-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/2}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-(z-1)^2-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/2}^{1} \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-(z-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/2}^{1} \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-(1-z)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin^{-1}\sqrt{2}(1-z)\right]_{1/2}^{1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[0-\sin^{-1}\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

উদাহরণ-34. $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx = \left[\tan^{-1}x\int dx - \int\left\{\frac{d}{x}(\tan^{-1}x)\int dx\right\}dx\right]_0^1$

$$= [x\tan^{-1}x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\cdot x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[ln_e(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

উদাহরণ-35. $\int_0^a \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^a \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = 2\int_0^a \tan^{-1}x\,dx$

$$= 2\,[x\tan^{-1}x]_0^a - 2\int_0^a \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= 2a\tan^{-1}a - [ln(1+x^2)]_0^a = 2a\tan^{-1}a - ln(1+a^2).$$

উদাহরণ-36. $\int_0^1 x\sin^{-1}x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[CUH-198**

সমাধান ঃ $\int_0^1 x\sin^{-1}x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}1 - \frac{1}{2}\int \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2})\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}x\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\left(0+\frac{\pi}{4}\right)-0\right] = \frac{\pi}{8}.$$

উদাহরণ-37. $\int_0^1 x\,ln\,x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-2006]**

সমাধান ঃ $\int_0^1 x\,ln\,x\,dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2}lnx\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

$\lim_{x\to 0} x^2\,ln\,x = \lim_{x\to 0}\frac{ln\,x}{x^{-2}}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\text{ আকার}\right]$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2x^{-3}}$

$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$

উদাহরণ-38. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2x + b^2\sin^2x}$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1960, 2004, RUH-1960, 1984, 1989, CUH-1989]

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2x + b^2\sin^2x}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2x\,dx}{a^2+b^2\tan^2x}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dz}{a^2+b^2z^2}$$

ধরি $\tan x = z$

$\therefore \sec^2x\,dx = dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = \infty$

$$= \frac{1}{b^2}\int_0^{\infty} \frac{dz}{(a/b)^2+z^2} = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\left[\tan^{-1}\left(\frac{bz}{a}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{ab}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2ab}.$$

উদাহরণ–39. $\int_0^{\pi/2} e^x(\sin x + \cos x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[CUH–1982, 1987]

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} e^x(\sin x + \cos x)dx$

$= \int_0^{\pi/2} e^x\left\{\sin x + \frac{d}{dx}(\sin x)\right\}dx$

$= [e^x \sin x]_0^{\pi/2} = e^{\pi/2}\sin\frac{\pi}{2} - 0$

$= e^{\pi/2}\sin\frac{\pi}{2} = e^{\pi/2}.$

উদাহরণ–40. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$, $a > 0$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–1996, DUH–1986]

সমাধান ঃ $\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \left[\frac{e^{-ax}(-a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}\right]_0^{\infty}$

$= 0 - \frac{1(0-b)}{a^2+b^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.$

উদাহরণ–41. $\int_2^e \left\{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right\}dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–1990]**

সমাধান ঃ $\int_2^e \left\{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}\right\}dx$

$= \int_{\ln 2}^1 e^z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)dz$ ধরি $\ln x = z$

$\therefore x = e^z$

$\therefore dx = e^z\,dz$

$= \int_{\ln 2}^1 e^z\left\{\frac{1}{z} + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}dz$ যখন $x = 2$ তখন $z = \ln 2$

যখন $x = e$ তখন $z = 1$

$= \left[e^z - \frac{1}{z}\right]_{\ln 2}^1 = e - e^{\ln 2}.\frac{1}{\ln 2} = e - \frac{2}{\ln 2}.$

উদাহরণ–42. $\int_2^4 \frac{(x-3)dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1986]**

সমাধান ঃ $\int_2^4 \frac{(x-3)dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} = \int_2^4 \frac{-\frac{1}{2}(6-2x)}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx$

$= -\left[\sqrt{6x-x^2-5}\right]_2^4 = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0.$

উদাহরণ–43. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–88, 94]**

সমাধান ঃ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

$= \frac{1}{b^2-a^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+b^2}\right)dx$

$= \frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)\right]_0^{\infty}$

$= \frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2b}\right]$

$= \frac{\pi}{2(a+b)}.$

উদাহরণ–44. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2e^x + b^2e^{-x}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–1996]**

সমাধান ঃ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2e^x + b^2e^{-x}}$

$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{a^2 + b^2(e^{-x})^2}$ ধরি $e^{-x} = z$

$\therefore e^{-x}\,dx = -dz$

$= \int_1^0 \frac{-dz}{a^2 + b^2z^2}$ যখন $x = 0$ তখন $z = 1$

যখন $x = \infty$ তখন $z = 0$

$= \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{dz}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + z^2} = \frac{1}{b^2}.\frac{b}{a}\left[\tan^{-1}\left(\frac{bz}{a}\right)\right]_0^1$

$= \frac{1}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{b}{a} - 0\right] = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$

উদাহরণ–45. $\int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[CUH–1988]**

সমাধান ঃ $\int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}$

$= \left[\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)\right]_0^{2a}$

$= \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

উদাহরণ–46. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–200**

সমাধান ঃ $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}$

$$= \left[\sin^{-1}\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{a/2}\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

উদাহরণ–47. $\int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $I = \int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ ..... (1)

ধরি $x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$

$\therefore x - a = (b-a)\sin^2\theta$ এবং $b - x = (b-a)\cos^2\theta$

$\therefore dx = 2(b-a)\cos\theta\sin\theta\, d\theta$

যখন $x = a$ তখন $\theta = 0$, যখন $x = b$ তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$(1) \Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{2(b-a)\cos\theta\sin\theta\, d\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta).(b-a)\sin\theta\cos\theta}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}$$

ধরি $\tan\theta = z$

$\therefore \sec^2\theta\, d\theta = dz$

যখন $\theta = 0$ তখন $z = 0$

যখন $\theta = \frac{\pi}{2}$ তখন $t = \infty$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{a + b\tan^2\theta}$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{dz}{a + bz^2}$$

$$\therefore I = \frac{2}{b}\int_0^{\infty} \frac{dz}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 + z^2} = \frac{2}{b}\cdot\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}\left[\tan^{-1}\left(\frac{z\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{ab}}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}.$$

উদাহরণ–48. $\int_0^{16} \frac{x^{1/4}}{x^{1/2}}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–2006]**

সমাধান ঃ $\int_0^{16} \frac{x^{1/4}}{x^{1/2}}\, dx$

ধরি $x = z^4$

$\therefore dx = 4z^3\, dz$

x	0	16
z	0	2

$$= \int_0^2 \frac{z}{z^2}\cdot 4z^3\, dz$$

$$= 4\int_0^2 z^2\, dz$$

$$= 4\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^2 = 4\cdot\frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

উদাহরণ–49. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2\sin x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–2009]**

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2\cdot\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\frac{x}{2}\, dx}{3\tan^2\frac{x}{2} + 4\tan\frac{x}{2} + 3}$$

ধরি, $\tan\frac{x}{2} = z$

$\therefore \sec^2\frac{x}{2}\, dx = 2\, dz$

x	0	π/2
z	0	1

$$= \int_0^1 \frac{2\, dz}{3z^2 + 4z + 3}$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dz}{z^2 + \frac{4}{3}z + 1} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dz}{\left(z + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{z + \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\tan^{-1}\sqrt{5} - \tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

উদাহরণ–50. $\int_0^1 \frac{x^3 \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^1 \frac{x^3 \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

ধরি, $x = \sin\theta$

$\therefore dx = \cos\theta\, d\theta$

x	0	1
θ	0	π/2

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3\theta \cdot \theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \cdot \cos\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \theta \cdot 4\sin^3\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \theta(3\sin\theta - \sin 3\theta)\, d\theta$

$= \frac{1}{4}\left[\theta\left(-3\cos\theta + \frac{\cos 3\theta}{3}\right)\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(-3\cos\theta + \frac{\cos 3\theta}{3}\right)d\theta$

$= \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(3\cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{3}\right)d\theta$

$= \frac{1}{4}\left[3\sin\theta - \frac{\sin 3\theta}{9}\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{4}\left[3 + \frac{1}{9}\right] = \frac{7}{9}.$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

16.A.1. ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্যের বর্ণনা দাও। (State the fundamental theorem of integral calculus.)

Ans : যদি f(x) ফাংশন [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং f(x) এর প্রতিঅন্তরক F(x) হয় তবে $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

16.A.2. যদি $\int_a^b f(x)\,dx = 2$ হয় তবে $\int_b^a f(x)\,dx$ এর মান কত? (If $\int_a^b f(x)\,dx = 2$, then what is the value of $\int_b^a f(x)\,dx$?)

Ans : যদি $\int_a^b f(x)\,dx = 2$ হয় তবে $\int_b^a f(x)\,dx = -2$ হইবে।

16.A.3. যদি $\int_a^b f(x)\,dx = 5$ হয় তবে $\int_a^b f(z)\,dz$ এর মান নির্ণয় কর।

(If $\int_a^b f(x)\,dx = 5$, then evaluate $\int_a^b f(z)\,dz$.)

Ans : $\int_a^b f(x)\,dx = 5$ হইলে $\int_a^b f(z) = 5$ হইবে। [$\because \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz$]

16.A.4. $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$ এবং $\int_2^5 f(x)\,dx = 7$ হইলে $\int_1^5 f(x)\,dx$ এর মান কত?

(If $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$ and $\int_2^5 f(x)\,dx = 7$, then what is the value of $\int_1^5 f(x)\,dx$?]

Ans : $\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx = 3 + 7 = 10$

16.A.5. $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$ এর মান কত? [What is the value of $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$.]

Ans : $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{12}.$

EXERCISE–16(A)

মান নির্ণয় কর ঃ

1. $\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$
3. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$
4. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{3}\,dx$
5. $\int_0^{2a/3} \sqrt{4a^2 - 9x^2}\,dx$ [DUH–53]
6. $\int_0^{\pi/4} \cos^3 2x\,dx$ **[CUH–1989]**
7. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
8. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ **[DUH–1985]**
9. $\int_0^{\log 2} \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$
10. $\int_1^3 \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$
11. $\int_0^1 \frac{\sqrt{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\,dx$
12. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{(\sin^3 x + \cos^3 x)^2}\,dx$

13. $\int_0^{\pi} \sqrt{(2+2\cos\theta)}\, d\theta$

14. $\int_0^{\pi/3} \frac{2+3\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

15. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\, dx$

16. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x\, dx$

17. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^2}$ **[DUH–1986]**

18. $\int_0^1 \frac{5x^3\, dx}{\sqrt{1-x^8}}$

19. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx$ **[CUH–1986]**

20. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx$ **[RUH–1960]**

21. $\int_8^{15} \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ **[RUH–1980]**

22. $\int_3^8 \frac{2-3x}{x\sqrt{1+x}} dx$

23. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

[DUH–1978]

24. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$

[DUH–54, 67, 06, CUH–82]

25. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\sin x}$

26. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\sin x+\cos x}$

27. $\int_0^{\alpha} \frac{dx}{1-\cos\alpha\cos x}$

28. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\cos x}$

[DUH–90, RUH–63]

29. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2-2ab\cos x+b^2}; a>b>0$

[DUH–86, RUH–78, CUH–88]

30(i) $\int_1^3 \frac{x-3}{x^3+x^2} dx$ **[DUH–55]** (ii) $\int_2^{\infty} \frac{2x^2}{x^4-1} dx$ **[NUH–2008]**

31. $\int_0^2 \frac{x^4+1}{x^2+1} dx$

32. $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+2x)^2}$

33. $\int_2^3 \frac{(3-x)dx}{x^3+4x^2+3x}$

34. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{4+5\cos^2\theta}$

35. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

36. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$

[CUH–1985]

37. $\int_0^1 \tan^{-1}\sqrt{x}\, dx$

38. $\int_0^1 (\cos^{-1}x)^2\, dx$

39. $\int_0^{2a} \sqrt{(2ax-x^2)}dx$ **[CUH–88]**

40. $\int_0^a \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} dx$

[DUH–1986]

41. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{3+x} dx$

42. $\int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

[DUH–1988]

43. $\int_0^{\pi/6} e^{20}\sin 3\theta\, d$

[NUH–03, DUH–87]

44. $\int_1^3 ln(x+\sqrt{x^2-1})\, dx$

[DUH–1988]

45. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

[RUH–1981]

46. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$

[BSc(Pass)–2008]

47. $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{x-\alpha}{\beta-x}\right)} dx$

[DUH–1984]

48. $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\, dx$ **[DUH–76, 02, RUH–88, 56, CUH–86]**

49. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx; a, b>0$

50(i) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$.

(ii) $\int_0^a x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}} dx$ **[NUH–2004] [NUH(NM)–2009]**

ANSWER–16(A)

1. $ln2$
2. $\frac{\pi}{4}$
3. 2
4. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
5. $\frac{\pi a^2}{3}$
6. $\frac{1}{3}$
7. $\frac{\pi^2}{8}$
8. $\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}$
9. $ln\frac{3}{2}$
10. $\sin(ln\ 3)$
11. $\frac{\pi\sqrt{\pi}}{12}$
12. $\frac{1}{6}$
13. 4
14. $3+2\sqrt{3}$
15. $\frac{16}{35}$

16. $\frac{8}{693}$ 17. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}$ 18. $\frac{5\pi}{8}$

19. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 20. $2\ln 2-1$ 21. $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$

22. $2\ln\frac{3}{2}-6$ 23. $\ln\left(\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right)-\ln\left(3+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

24. $\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$ 25. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3}$ 26. $\frac{1}{2}\ln 3$

27. $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$ 28. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3}$ 29. $\frac{\pi}{a^2-b^2}$

30(i) $4\ln\frac{3}{2}-2$ (ii) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}2+\frac{1}{2}\ln 3$

31. $\frac{2}{3}+2\tan^{-1}2$ 32. $\ln\frac{6}{5}-\frac{2}{15}$

33. $\ln\left(\frac{81}{80}\right)$ 34. $\frac{\pi}{12}$ 35. $\frac{1}{4}\ln 2+\frac{\pi}{8}$

36. $\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$ 37. $\frac{\pi}{2}-1$ 38. $\pi-2$

39. $\frac{1}{2}\pi a^2$ 40. $\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})$

41. $2(\ln 3-1)$ 42. $3-4\ln 2$ 43. $(2e^{\pi/3}+3)/13$

44. $3\ln(3+2\sqrt{2})-2\sqrt{2}$ 45. π

46. π 47. $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\pi$ 48. $\frac{1}{8}\pi(\beta-\alpha)^2$

49. $\frac{\pi}{2(a+b)}$ 50(i). $\frac{4}{3}\sqrt{a}(\sqrt{2}-1)$. (ii) $\frac{a^2}{4}(\pi-2)$

———×———

নির্দিষ্ট ইন্টিগ্র্যাল–16(B)

16.5. প্রমাণ কর ঃ $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$. যখন $a<e<b$.

প্রমাণ ঃ মনে করি $\int f(x)\,dx=F(x)$

$\therefore \int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)\cdots(1)$

এবং $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=[F(x)]_a^c+[F(x)]_c^b$

$=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$

$=F(b)-F(a)\cdots(2)$

(1) ও (2) হইতে পাই $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$. (প্রমাণিত)

16.6. প্রমাণ কর ঃ $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$.

[NUH–2008, NUH(NM)–2008, DUH–1986, 2004]

প্রমাণ ঃ ডানপক্ষ $=\int_0^a f(a-x)dx$ ধরি $a-x=z$

$\therefore dx=-dz$

$=\int_a^0 f(z)\,(-dz)$ যখন $x=0$ তখন $z=a$

যখন $x=a$ তখন $z=0$

$=-\int_a^0 f(z)dz=\int_0^a f(z)dz$ [16.3 এর সাহায্যে]

$=\int_0^a f(x)dx$ [16.4 এর সাহায্যে]

= বামপক্ষ

অর্থাৎ $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$. (প্রমাণিত)

16.7. প্রমাণ কর ঃ $\int_0^{2a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$, যদি $f(2a-x)=f(x)$.

প্রমাণ ঃ 16.5 এর সাহায্যে পাই $\int_0^{2a} f(x)\,dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a} f(x)dx\cdots\cdots(1)$

ডানপক্ষের দ্বিতীয় ইন্টিগ্র্যালে ধরি $x=2a-z$ $\therefore dx=-dz$

যখন $x=a$ তখন $z=a$, যখন $x=2a$ তখন $z=0$

$\therefore$ (1) $\Rightarrow \int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^0 f[2a - z)\,(-dz)$

$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f[2a - z)dz$

$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f[2a - x)dx \quad \left[\because \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz\right]$

$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \quad [\because f[2a - x) = f[x)]$

$\therefore \int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ (প্রমাণিত)

নোট ঃ $f[2a - x) = -f(x)$ হলে $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = 0$ হবে।

16.8. প্রমাণ কর ঃ $\int_0^{na} f(x)dx = n\int_0^a f(x)dx$, যদি $f[a + x) = f(x)$.

[NUH(NM)-2009, DUH-1990]

প্রমাণ ঃ 16.5 এর সাহায্যে পাই

$\int_0^{na} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx + \int_{2a}^{3a} f(x)dx + \cdots + \int_{(n-1)a}^{na} f(x)dx$

$= I_1 + I_2 + \cdots + I_n$ ধরি ... (1)

এখন $I_2 = \int_a^{2a} f(x)dx$ ধরি $x = a + z$

$\therefore dx = dz$

যখন $x = a$ তখন $z = 0$

যখন $x = 2a$ তখন $z = a$

$= \int_0^a f[a + z)dz$

$= \int_0^a f[a + x)dx = \int_0^a f(x)dx \quad [\because f[a + x) = f[x)]$

$= I_1$.

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $I_3 = I_4 = \cdots = I_n = I_1$

(1) $\Rightarrow \int_0^{na} f(x)dx = I_1 + I_1 + \cdots + I_1 = nI_1$

$\therefore \int_0^{na} f(x)dx = n\int_0^a f(x)dx$. (প্রমাণিত)

16.9. প্রমাণ কর ঃ $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}dx$.

আরও দেখাও যে $\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & \text{যখন } f(x) \text{ যুগ্ম ফাংশন} \\ 0 & \text{যখন } f(x) \text{ অযুগ্ম ফাংশন} \end{cases}$

[NUH-2008, DUH-2007]

প্রমাণ ঃ আমরা জানি $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

$\therefore \int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)dx$ ..... (1)

ডানপক্ষের দ্বিতীয় ইন্টিগ্র্যালের জন্য, ধরি $x = -z \therefore dx = -dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$, যখন $x = -a$ তখন $z = a$

(1) $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_a^0 f(-z)dz = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-z)dz$

$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx \quad \left[\because \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz\right]$

$= \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}dx$. (প্রমাণিত)

২য় অংশ ঃ $f(x)$ যুগ্ম ফাংশন হইলে $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

$f(x)$ অযুগ্ম ফাংশন হইলে $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

$\therefore \int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx & \text{যখন } f(x) \text{ যুগ্ম ফাংশন} \\ 0 & \text{যখন } f(x) \text{ অযুগ্ম ফাংশন} \end{cases}$

উদাহরণ-49. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cot x}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH-1997, DUH-1989, RUH-1993, CUH-1984]

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cot x} \Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\cos x + \sin x}$ ..... (1)

বা $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$

বা $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ ..... (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

$= \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore I = \frac{\pi}{4}$.

উদাহরণ-50. $\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{3/2}}{(\sin x)^{3/2} + (\cos x)^{3/2}} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1987]

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{3/2}}{(\sin x)^{3/2} + (\cos x)^{3/2}} dx$ ..... (1)

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}^{3/2}}{\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}^{3/2} + \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}^{3/2}} dx$

বা $I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{3/2}}{(\cos x)^{3/2} + (\sin x)^{3/2}} dx$ ..... (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{3/2} + (\sin x)^{3/2}}{(\cos x)^{3/2} + (\sin x)^{3/2}} dx = \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore I = \frac{\pi}{4}$

উদাহরণ–51. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

বা $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\cot x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

বা $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{1 + \sqrt{\tan x}} dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-07, NUH(NM)-09, 10, B. Sc.(Pass)–10, DUH–81, 84, 90, 92, CUH–84, 86, 89]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ ..... (1)

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$ ..... (2)

(1) এবং (2) যোগ করিয়া পাই $2I = \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$ $\therefore I = \frac{\pi}{4}$.

নোট ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\cot x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}\, dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

উদাহরণ–52. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x\, dx}{\sin^n x + \cos^n x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x\, dx}{\sin^n x + \cos^n x}$ ..... (1)

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$$

বা $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$ ..... (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore I = \frac{\pi}{4}.$$

উদাহরণ–53. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}} dx$ ..... (1)

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$$

বা $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}} dx$ ..... (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}}{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}} dx$

$$= \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \therefore I = \frac{\pi}{4}.$$

উদাহরণ–54. $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1 + \sin x}$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH–1989, RUH–1962, 1982]

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1 + \sin x}$ ..... (1)

বা $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{1 + \sin(\pi - x)}$

বা $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{1 + \sin x}$ ..... (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2I = \int_0^{\pi} \frac{\pi\, dx}{1 + \sin x} = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$

$$= \pi[\tan x - \sec x]_0^{\pi}$$

$$= \pi[0 + 1 - 0 + 1] = 2\pi \quad \therefore I = \pi.$$

উদাহরণ-55. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-2003, 200**

NUH(NM)-09, DUH-82, 84, 86, 91, 94, 07, RUH-79, 8

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ ..... (1)

বা $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} dx$

বা $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ ..... (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cox^2 x} dx$

বা $2I = -\int_1^{-1} \frac{\pi\, dz}{1+z^2}$ ধরি $\cos x = z$

$\therefore \sin x\, dx = -dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 1$

বা $2I = \pi \int_{-1}^{1} \frac{dz}{z^2+1}$ যখন $x = \pi$ তখন $z = -1$

$= \pi [\tan^{-1} z]_{-1}^{1} = \pi[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}(-1)]$

$= \pi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2}$

$\therefore I = \frac{\pi^2}{4}$.

উদাহরণ-56. $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ এর মান নির্ণয় কর।

[RUH-1988, CUH-197

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ ..... (1)

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ ..... (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

বা $2I = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

বা $I = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

$= \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x\, dx}{a^2 + b^2\tan^2 x}$ ধরি $\tan x = z$

$\therefore \sec^2 x\, dx = dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

$= \pi \int_0^{\infty} \frac{dz}{a^2 + b^2 z^2}$ যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = \infty$

$= \frac{\pi}{b^2} \int_0^{\infty} \frac{dz}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + z^2} = \frac{\pi}{b^2} \cdot \frac{b}{a}\left[\tan^{-1}\left(\frac{bz}{a}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{ab}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi^2}{2ab}$.

উদাহরণ-57. $\int_0^1 ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^1 ln\left(\frac{1-x}{x}\right)dx$ ..... (1)

বা $I = \int_0^1 ln\left\{\frac{1-(1-x)}{1-x}\right\} dx$

বা $I = \int_0^1 ln\left(\frac{x}{1-x}\right)dx$ ..... (2)

(1) ও (2) যোগ করে পাই $2I = \int_0^1 \left\{ln\left(\frac{1-x}{x}\right) + ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right\} dx$

$= \int_0^1 ln\, 1\, dx = 0 \quad \therefore I = 0.$

উদাহরণ-58. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^7 x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}dx$

$\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^7 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \{\sin^7 x + \sin^7(-x)\}dx$

$= \int_0^{\pi/2} \{\sin^7 x - \sin^7 x\}dx = 0.$

উদাহরণ-59. $\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-1991]**

সমাধান ঃ $\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

$= \int_0^a \{x\sqrt{a^2 - x^2} + (-x)\sqrt{a^2 - (-x)^2}\}dx$

$= \int_0^a \{x\sqrt{a^2 - x^2} - x\sqrt{a^2 - x^2}\}dx = 0.$

উদাহরণ–60. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\cos^2 x}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–02, RUH–1990, CUH–1976]

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\cos^2 x}$ ..... (1)

বা $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{1+\cos^2(\pi - x)}$

বা $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{1+\cos^2 x}$ ..... (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

বা $2I = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

বা $I = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x\,dx}{\sec^2 x + 1}$ ধরি $\tan x = z$

$\therefore \sec^2 x\,dx = dz$

$= \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x\,dx}{2+\tan^2 x}$ যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = \infty$

$= \pi \int_0^{\infty} \frac{dz}{(\sqrt{2})^2 + z^2}$

$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\infty}$

$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$.

উদাহরণ–61. $\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x}$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH(NM)–07, CUH–1983, 1985]

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x}$ ..... (1)

বা $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ বা $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx}{\cos x + \sin x}$ ..... (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi/2}{\cos x + \sin x}\,dx$

বা $I = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + \sin x} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x}$

$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$

$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[ln\left\{\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left\{ln\left(\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right) - ln\left(\sec\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} ln\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} ln(\sqrt{2}+1)$.

উদাহরণ–62. $\int_0^{\pi} x\cos^4 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH(NM)–2008, CUH–1981]

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi} x\cos^4 x\,dx$ ..... (1)

বা $I = \int_0^{\pi} (\pi - x)\cos^4(\pi - x)dx$ বা $I = \int_0^{\pi} (\pi - x)\cos^4 x\,dx$ ..... (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2I = \int_0^{\pi} \pi\cos^4 x\,dx$

$\therefore I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} (2\cos^2 x)^2\,dx$

$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2x)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx$

$= \frac{\pi}{4} [x + \sin 2x]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi/2} 2\cos^2 2x\,dx$

$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 4x)dx$

$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{8}\left[x + \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$

$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{16} = \frac{3\pi^2}{16}$.

উদাহরণ–63. (i) $\int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx$ **[NUH–2006]**

(ii) $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) \, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–06, 09]**

সমাধান ঃ (i) ধরি $I = \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx$ ..... (1)

$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin^2 (\pi - x) \, dx$

$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin^2 x \, dx$ ..... (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi} \pi \sin^2 x \, dx$

$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$

$= \pi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) \, dx$

$= \pi \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}$

$\therefore I = \frac{\pi^2}{4}$.

(ii) ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \ln \tan x \, dx$ ..... (1)

$= \int_0^{\pi/2} \ln \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$

$= \int_0^{\pi/2} \ln \cot x \, dx$ ..... (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} (\ln \tan x + \ln \cot x) \, dx$

$= \int_0^{\pi/2} \ln 1 \, dx = 0$

$\therefore I = 0$

উদাহরণ–64. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–94, 02, 09, NUH(NM)–2010, DUH–83, 90, 93, 03, CUH–86]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ ..... (1)

ধরি $x = \tan\theta \quad \therefore dx = \sec^2\theta \, d\theta$

যখন $x = 0$ তখন $\theta = 0$, যখন $x = 1$ তখন $\theta = \frac{\pi}{4}$

(1) $\Rightarrow I = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan\theta)}{(1+\tan^2\theta)} \sec^2\theta \, d\theta$

$\therefore I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\theta) d\theta$ ..... (2) বা $I = \int_0^{\pi/4} \ln\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\} d$

বা $I = \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) d\theta$ বা $I = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right) d\theta$ ..... (3)

(2) ও (3) যোগ করিয়া পাই $2I = \int_0^{\pi/4} \ln 2 \, d\theta$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln 2 \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{1}{2} \ln 2. \, [\theta]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} \ln 2.$

উদাহরণ–65. $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$ এবং $\int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–03, 05, 10, NUH(NM)–03, BSc(Pass)–06, 08, DUH–75, 91, 02, RUH–81, CUH–77]

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$ ..... (1)

বা $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ বা $I = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx$ ..... (2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \cos x \, dx$

$= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$

$= \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx - \ln 2 \int_0^{\pi/2} dx$ ..... (3)

ডানপক্ষের প্রথম ইন্টিগ্র্যালের জন্য

ধরি $2x = z, \; dx = \frac{1}{2} dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$, যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = \pi$

$\therefore 2I = \int_0^{\pi} \ln \sin z.\ \frac{1}{2}\,dz - \ln 2\ [x]_0^{\pi/2} = \int_0^{\pi/2} \ln \sin z\,dz - \frac{\pi}{2}\ln 2$

$= \int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx + \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2} = I + \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$

$\therefore I = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$.

২য় অংশ ঃ $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x\,dx$

$\therefore \int_0^{\pi/2} \ln \cos x\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$. **[NUH(NM)-2007]**

উদাহরণ-66. $\int_0^{\pi} x \ln \sin x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-2010, NUH(NM)-2010, DUH-92, CUH-89, RUH-85, 86, 89, 79]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi} x \ln \sin x\,dx$ ..... (1)

$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \ln \sin(\pi - x)dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \ln \sin x\,dx$ ..... (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} \ln \sin x\,dx$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}.\ \pi\ln\frac{1}{2}$ [উদা. 65 এর সাহায্যে]

$= \frac{\pi^2}{2}\ln\frac{1}{2}$.

উদাহরণ-67. $\int_0^1 \ln \sin\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)d\theta$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH-79, 87]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^1 \ln \sin\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} \ln \sin z.\ \frac{2}{\pi}dz$ ধরি $\frac{\pi}{2}\theta = z$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln \sin z\,dz$ $\therefore\ d\theta = \frac{2}{\pi}dz$

$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}\right)$ [উদা. 65 এর সাহায্যে] যখন $\theta = 0$ তখন $z = 0$

$= \ln\frac{1}{2}$. যখন $\theta = 1$ তখন $z = \frac{\pi}{2}$

উদাহরণ-68. $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x + \cot x)dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\tan x + \cot x)dx$ ..... (1)

বা $I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)dx$

বা $I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)dx$

$= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{2}{\sin 2x}\right)dx = \int_0^{\pi/2} \ln 2\,dx - \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x\,dx$

$= \ln 2\,[x]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin z\,dz$ ধরি $2x = z$

$\therefore dx = \frac{1}{2}dz$

$= \frac{\pi}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin z\,dz$ যখন $x = 0, z = 0$

$x = \frac{\pi}{2}, z = \pi$

$= \frac{\pi}{2}\ln 2 - \int_0^{\pi/2} \ln \sin z\,dz$

$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2}\ln 2$ [উদা. 65 এর সাহায্যে]

$= \pi \ln 2$.

উদাহরণ-69. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{1 + \sin x \cos x}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-1994]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{1 + \sin x \cos x}$ ..... (1)

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x \cos x}dx$ ..... (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x \cos x}$

$\therefore 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{2\,dx}{2 + \sin 2x}$

বা $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x\, dx}{2\tan^2 x + 2\tan x + 2}$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2+z+1}$ ধরি $\tan x = z$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ $\therefore \sec^2 x\, dx = dz$

যখন $x = 0, z = 0$

$x = \frac{\pi}{2}, z = \infty$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

উদাহরণ–70. $\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, ln \sin\theta\, d\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, ln \sin\theta\, d\theta$ ..... (1)

$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, ln\sqrt{1-\cos^2\theta}\, d\theta = -\int_1^0 ln\sqrt{1-z^2}.\, dz$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 ln(1-z^2)dz$ ধরি $\cos\theta = z$

$\therefore \sin\theta\, d\theta = -dz$

যখন $\theta = 0$ তখন $z = 1$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-z^2 - \frac{z^4}{2} - \frac{z^6}{3} \cdots\right)dz$ যখন $\theta = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = 0$

$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(z^2 + \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} + \cdots\right)dz = -\frac{1}{2}\left[\frac{z^3}{1.3} + \frac{z^5}{2.5} + \frac{z^7}{3.7} + \ldots\right]_0^1$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.7} + \cdots\right] = -\left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \cdots\right)$

$= -\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \cdots\right\} = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots\right) - 1$

$= ln\, 2 - ln\, e = ln\left(\frac{2}{e}\right).$

উদাহরণ–67. $\int_0^1 \frac{ln(1-x)}{x} dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1986]**

সমাধান ঃ $\int_0^1 \frac{ln(1-x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots\right) dx$

$= -\left[x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots\right]_0^1 = -\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ..\right) = -\frac{\pi^2}{6}.$

উদাহরণ–71. $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}$ ..... (1)

$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{\{a^2\cos^2(\pi - x) + b^2\sin^2(\pi - x)\}^2}$

$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}$ ..... (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi} \frac{\pi\, dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}$

বা $I = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^4 x\, dx}{(a^2 + b^2\tan^2 x)^2}$

$= \pi\int_0^{\pi/2} \frac{(1+\tan^2 x)\sec^2 x\, dx}{(a^2 + b^2\tan^2 x)^2}$ ধরি $\tan x = z$

$= \pi\int_0^{\infty} \frac{z^2+1}{(a^2+b^2z^2)^2}$ $\therefore \sec^2 x\, dx = dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

$= \frac{\pi}{b^4}\int_0^{\infty} \frac{\left(z^2 + \frac{a^2}{b^2}\right) + \left(\frac{b^2-a^2}{b^2}\right)}{\left(z^2+\frac{a^2}{b^2}\right)^2} dx$ যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তখন $z = \infty$

$= \frac{\pi}{b^4}\int_0^{\infty} \frac{1}{z^2 + \frac{a^2}{b^2}} dz + \frac{\pi(b^2-a^2)}{b^6}\int_0^{\infty} \frac{dz}{\left(z^2+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}$

$= \frac{\pi}{b^4}\cdot\frac{b}{a}\left[\tan^{-1}\left(\frac{bz}{a}\right)\right]_0^{\infty} + \frac{\pi^2(b^2-a^2)}{b^6}\int_0^{\infty} \frac{dz}{\left(z^2+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}$

$= \frac{\pi^2}{2a\,b^3} + \frac{\pi(b^2-a^2)}{b^6}\int_0^{\pi/2} \frac{\frac{a}{b}\sec^2\theta\, d\theta}{\frac{a^4}{b^4}(1+\tan^2\theta)^2}$

$= \frac{\pi^2}{2ab^3} + \frac{\pi(b^2-a^2)}{a^3b^3}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$ ধরি $z = \frac{a}{b}\tan\theta$

$= \frac{\pi^2}{2ab^3} - \frac{\pi(a^2-b^2)}{a^3b^3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\, d\theta$ $\therefore dz = \frac{a}{b}\sec^2\theta\, d\theta$

যখন $z = 0$ তখন $\theta = 0$

$= \frac{\pi^2}{2ab^3} - \frac{\pi(a^2-b^2)}{2a^3\,b^3}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)d\theta$ যখন $z = \infty$ তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{\pi^2}{2ab^3} - \frac{\pi(a^2-b^2)}{2a^3b^3}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^2}{2ab^3} - \frac{\pi^2(a^2-b^2)}{4\,a^3b^3}$$

$$= \frac{\pi^2(2a^2-a^2+b^2)}{4a^3b^3} = \frac{\pi^2(a^2+b^2)}{4a^3b^3}.$$

উদাহরণ–72. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{x}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–2008]**

সমাধান ঃ ধরি, $I = \int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{x}\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{z}{\sin z}\cdot \cos z\,dz$

$= \int_0^{\pi/2} z\cot z\,dz$

এবং $\sin^{-1}x = z$

$\Rightarrow x = \sin z$

$\therefore dx = \cos z\,dz$

x	0	1
z	0	$\pi/2$

$= [z\ln\sin z]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \ln\sin z\,dz$

$= -\int_0^{\pi/2} \ln\sin z\,dz \quad \left[\because \lim_{z\to 0} z\ln\sin z = 0\right]$

$= \frac{\pi}{2}\ln 2.$

উদাহরণ–73. $\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2 d\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \theta^2\,\mathrm{cosec}^2\theta\,d\theta$

$= -\left[\theta^2\cot\theta\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2\theta\cot\theta\,d\theta$

$= 0 + 2\int_0^{\pi/2} \theta\cot\theta\,d\theta \quad \left[\because \lim_{\theta\to 0} \theta^2\cot\theta = 0\right]$

$= 2\int_0^{\pi/2} z\cot z\,dz$

$= 2\cdot\frac{\pi}{2}\ln 2$ [উদাহরণ–72 এর সাহায্যে]

$= \pi\ln 2.$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

16.B.1. $\int_0^a f(x)\,dx$ ও $\int_0^a f(a-x)\,dx$ এর মধ্যে সম্পর্ক কি? (What is the relation between $\int_0^a f(x)\,dx$ and $\int_0^a f(a-x)\,dx$?)

Ans : $\int_0^a f(x)\,dx$ ও $\int_0^a f(a-x)\,dx$ উভয়ের মান সমান। অর্থাৎ $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$

16.B.2. $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$ হইলে $\int_0^2 f(2-x)\,dx$ কত? (If $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$, then what is $\int_0^2 f(2-x)\,dx$?)

Ans : $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$ হইলে $\int_0^2 f(2-x)\,dx = 3$ হইবে।

16.B.3. $\int_0^{\pi/2} \sin^7x\,dx = \frac{6}{35}$ হইলে $\int_0^{\pi/2} \cos^7 dx$ কত?

Ans : $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^7\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^7x\,dx$

$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^7x\,dx = \frac{16}{35}$ হইলে $\int_0^{\pi/2} \cos^7x\,dx = \frac{16}{35}.$

16.B.4. যদি $f(2a-x) = -f(x)$ হয় তবে $\int_0^{2a} f(x)\,dx$ কত?

(If $f(2a-x) = -f(x)$, then what is $\int_0^{2a} f(x)\,dx$?)

Ans : $f(2a-x) = -f(x)$ হইলে $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0$

16.B.5. $\int_0^{2a} \sin^7x\,dx$ এর মান কত? (What is the value of $\int_0^{2a} \sin^7x\,dx$?)

Ans : এখানে $\sin^7(2\pi - x) = -\sin^7x \quad \therefore \int_0^{2a} \sin^7x\,dx = 0$

16.B.6. কোন শর্তে $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)$ হইবে?

Ans : যদি $f(x) = f(2a-x)$ হয় তবে $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ হইবে।

16.B.7. $f(2a - x) = f(x)$ এবং $\int_0^a f(x) = 5$ হইলে $\int_0^{2a} f(x)\,dx$ কত?

Ans : $\int_0^{2a} f(x) = 2\int_0^a f(x)\,dx = 10$ $[\because f(2a - x) = f(x)]$

16.B.8. কোন্ শর্তে $\int_0^{na} f(x)\,dx = n\int_0^a f(x)\,dx$ হইবে?

Ans : যদি $f(a + x) = f(x)$ হয় তবে $\int_0^{na} f(x)\,dx = n\int_0^a f(x)\,dx$ হইবে।

16.B.9. যদি $f(x)$ বেজোড় বা অযুগ্ম ফাংশন হয় তবে $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ এর মান কত?

(If $f(x)$ is an odd functin, then what is the value of $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$?)

Ans : $f(x)$ বেজোড় হইলে $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

16.B.10. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^7 x\,dx$ এর মান কত?

(What is the value of $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^7 x\,dx$?)

Ans : $\sin^7(-x) = -\sin^7 x$ অর্থাৎ $\sin^7 x$ একটি বেজোড় ফাংশন।

$\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^7 x\,dx = 0$

16.B.11. $f(x)$ একটি জোড় ফাংশন এবং $\int_0^a f(x)\,dx = 6$ হইলে $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। (If $f(x)$ is an even function and $\int_0^a f(x)\,dx = 6$ then evaluate $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.)

Ans : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ $[\because f(x)$ জোড় ফাংশন$]$

$= 2 \cdot 6 = 12$ $\left[\because \int_0^a f(x)\,dx = 6\right]$

16.B.12. $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$ হইলে $\int_0^{\pi/2} \ln \cos x\,dx$ কত?

Ans : $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x\,dx$

$\therefore \int_0^{\pi/2} \ln \cos x\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$ $\left[\because \int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}\right]$

EXERCISE–16(B)

মান নির্ণয় কর।

1. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sin x + \cos x}$ **[NUH(NM)–06, 09, RUH–94, CUH–84, 87]**
2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{1 + \sqrt{\cot x}}\,dx$ **[DUH–1989, RUH–1992]**
3. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin x}\,dx$
4. $\int_0^{\pi/2} \ln \tan x\,dx$ **[DUH–91, RUH–51, CUH–85]**
5. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \ln \tan x\,dx$ **[BScPr–1993, CUH–1981]**
6. $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan\theta)d\theta$ **[NUH(NM)–04, CUH–84, 85]**
7. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{\sin x + \cos x}$

[NUH(NM)–04, DUH– 82, 90, 94, 87, CUH–68]

8. $\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sec x + \operatorname{cosec} x}$
9. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2 - \cos^2 x}$, $a > 1$ **[NUH(NM)–2005, DUH–1962, 2004]**
10. $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$ **[NUH–96, 09, DUH–86, 03, 05, CUH–78]**
11. $\int_0^{\pi/4} \ln \sin 2\theta\,d\theta$ **[NUH(NM)–2006]**
12. $\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ **[NUH(NM)–06, DUH–84, 07, RUH–83,89, CUH–83, 85]**

13. $\int_0^{\pi} ln(1+\cos x)dx$ **[NUH-96, 98, 04, 07, DUH-86]**

14. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{15}x\, dx$ **[DUH-1988]**

15(i) $\int_{-a}^{a} xe^{-x^2}\, dx$ (ii) $\int_{-a}^{a} \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ **[NUH-200**

16. $\int_0^1 \cot^{-1}(1-x+x^2)dx$

17. $\int_0^{\pi} x\, ln \sin x\, dx$ **[CUH-1989, RUH-1979]**

18. $\int_{-2}^{2} x^9(1-x^2)^7 dx$ **[DUH-1954, 1987, 1989]**

19. $\int_0^{\pi} \frac{x^2 \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)dx}{2x-\pi}$ **[DUH-1962, 1965]**

20. $\int_0^{\infty} \frac{ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}{1+x^2} dx$ **[NUH(NM)-05, DUH-83, 84, CUH-86**

ANSWER-16(B)

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{\pi}{4}$ 3. $\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

4. 0 5. 0 6. $\frac{\pi}{8} ln\, 2$

7. $\frac{1}{\sqrt{2}} ln(1+\sqrt{2})$ 8. $\frac{\pi}{4}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}} ln(\sqrt{2}-1)\right]$

9. $\frac{\pi^2}{2a\sqrt{a^2-1}}$ 10. $\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ 11. $-\frac{\pi}{4} ln\, 2$

12. $\frac{\pi}{2} ln\frac{1}{2}$ 13. $\pi\, ln\frac{1}{2}$ 14. 0

15(i) 0 (ii) 0

16. $\frac{\pi}{2} - ln\, 2$ 17. $\frac{\pi^2}{2} ln\frac{1}{2}$ 18. 0

19. $\frac{8}{\pi}$ 20. $\pi\, ln\, 2$.

Chapter–17
লঘুকরণ সূত্র
REDUCTION FORMULA

17.1. ওয়েলীর সূত্র (Walle's formula) : যদি n যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 5.3.1}{n(n-2)(n-4)\cdots 6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2}$$ যখন n জোড়

[DUH-90, 06, DUHT-75, 80, 82, 83, 85, 89, RUH-1956]

$$= \frac{(n-1)(n-3)\cdots 6.4.2}{n(n-2)(n-4)\cdots 5.3.1}$$ যখন n বেজোড়

[DUH-1977, 1985, 1989, CUH-1982]

প্রমাণ ঃ $I = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}x \sin x\, dx$

$= \left[\sin^{n-1}x(-\cos x)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x.\cos x.\cos x\, dx$

$= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$

$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\, dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$

$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\, dx - (n-1)I$

$\Rightarrow I(1+n-1) = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\, dx$

$\therefore I = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\, dx$

অর্থাৎ $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\, dx$ ..... (1)

n এর পরিবর্তে n – 2 বসিয়ে পাই

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\, dx = \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-4}x\, dx$$ ..... (2)

(1) $\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-4}x\, dx$ ..... (3)

আবার (2) এ n এর পরিবর্তে n – 2 বসিয়ে পাই

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n-4}x\, dx = \frac{n-5}{n-4}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-6}x\, dx$$

$\therefore (3) \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-6}x\,\ldots\ldots (4)$

n জোড় সংখ্যা হইলে (4) হইতে পাই

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^0 x\,dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 5.3.1}{n(n-2)(n-4)\cdots 6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

আবার n বেজোড় হইলে (4) হইতে পাই

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}[-\cos x]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\cdots 6.4.2}{n(n-2)(n-4)\cdots 7.5.3}\cdot 1$$

আবার $\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$

$$I = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 5.3.1}{n(n-2)(n-4)\cdots 6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2}$$ যখন n জোড়

$$= \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots 6.4.2}{n(n-2)(n-4)\cdots 5.3.1}\cdot 1$$ যখন n বেজোড়

উদাহরণ–1. ওয়েলীর সূত্রের সাহায্যে মান নির্ণয় কর।

(i) $\int_0^{\pi/2}\sin^7 x\,dx$ **[NUH–2010]** (ii) $\int_0^{\pi}\sin^9 x\,dx$

(iii) $\int_0^{\pi}\sin^8 x\,dx$ (iv) $\int_0^{\pi/2}\cos^6 x\,dx$ (v) $\int_0^{\pi/2}\cos^7 x\,dx$

সমাধান ঃ (i) $\int_0^{\pi/2}\sin^7 x\,dx = \frac{(7-1)(7-3)(7-5)}{7(7-2)(7-4)(7-6)} = \frac{6.4.2}{7.5.3.1} = \frac{16}{35}$

(ii) $\int_0^{\pi}\sin^9 x\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin^9 x\,dx = 2.\frac{8.6.4.2}{9.7.5.3.1} = \frac{256}{315}$

(iii) $\int_0^{\pi}\sin^8 x\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\sin^8 x\,dx = 2.\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{128}$

(iv) $\int_0^{\pi/2}\cos^6 x\,dx = \frac{5.3.1}{6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{96} = \frac{5\pi}{32}$

(v) $\int_0^{\pi/2}\cos^7 x\,dx = \frac{6.4.2}{7.5.3.1} = \frac{16}{35}$.

উদাহরণ–2. যদি $I_n = \int_0^{\pi/4}\tan^n x\,dx$ হয় তবে প্রমাণ কর যে

$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$. এবং ইহা হইতে $\int_0^{\pi/4}\tan^5 x\,dx$ অর্থাৎ I_5 এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–02, 04, 06, 09, BSc(Pass)–06, 10, RUH–87, CUH–86]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $I_n = \int_0^{\pi/4}\tan^n x\,dx$

$$= \int_0^{\pi/4}\tan^{n-2}x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}\tan^{n-2}x\sec^2 x\,dx - \int_0^{\pi/4}\tan^{n-2}x\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}\tan^{n-2}x\,d(\tan x) - I_{n-2} = \left[\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}\right]_0^{\pi/4} - I_{n-2}$$

$\Rightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$.

দ্বিতীয় অংশ ঃ আমরা জানি $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$ ..... (1)

(1) নং এ n = 5, 3 বসিয়ে পাই $I_5 + I_3 = \frac{1}{4}$ ..... (2), $I_3 + I_1 = \frac{1}{2}$ ..... (3)

এখন $I_n = \int_0^{\pi/4}\tan^n x\,dx$

$\therefore I_1 = \int_0^{\pi/4}\tan x\,dx = [ln\sec x]_0^{\pi/4} = ln\sec\frac{\pi}{4} - ln\sec 0 = ln\sqrt{2}$

$(3) \Rightarrow I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - ln\sqrt{2}$

$(2) \Rightarrow I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - ln\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{4} + ln\sqrt{2}$.

উদাহরণ–3. যদি $I_n = \int_0^{\pi/4}\tan^n\theta\,d\theta$ হয়, তবে দেখাও যে

$n(I_{n+1} + I_{n-1}) = 1$ এবং ইহা হইতে $\int_0^{\pi/4}\tan^8\theta\,d\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH–05, BSc(Pass)–08, DUH–65, RUH–80, 83, 90, CUH–78]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $I_n = \int_0^{\pi/4}\tan^n\theta\,d\theta$

n এর পরিবর্তে n + 1 বসিয়ে পাই $I_{n+1} = \int_0^{\pi/4}\tan^{n+1}\theta\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi/4}\tan^{n-1}\theta(\sec^2\theta - 1)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4}\tan^{n-1}\theta\sec^2\theta\,d\theta - \int_0^{\pi/4}\tan^{n-1}\theta\,d\theta$$

$= \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1}\theta \, d(\tan\theta) - I_{n-1} = \left[\frac{\tan^n\theta}{n}\right]_0^{\pi/4} - I_{n-1} = \frac{1}{n} - I_{n-1}.$

$\Rightarrow I_{n+1} + I_{n-1} = \frac{1}{n}$ বা $n(I_{n+1} + I_{n-1}) = 1$

দ্বিতীয় অংশ ঃ আমরা জানি $I_{n+1} = \frac{1}{n} - I_{n-1}$ ..... (1)

(1) নং এ n = 7, 5, 3, 1 বসিয়ে পাই

$I_8 = \frac{1}{7} - I_6$ ..... (2) $\quad I_6 = \frac{1}{5} - I_4$ ..... (3)

$I_4 = \frac{1}{3} - I_2$ ..... (4) $\quad I_2 = 1 - I_0$ ..... (5)

এখন $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n\theta \, d\theta \quad \therefore I_0 = \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ (5) $\Rightarrow I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$

(4) $\Rightarrow I_4 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}$

(3) $\Rightarrow I_6 = \frac{1}{5} - I_4 = \frac{1}{5} - \left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$

(2) $\Rightarrow I_8 = \frac{1}{7} - I_6 = \frac{1}{7} - \left(\frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{7} - \frac{13}{15} + \frac{\pi}{4} = -\frac{76}{105} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{76}{105}$

উদাহরণ–4. যদি $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$, $n > 0$ হয়, তবে দেখাও যে

$$I_n = \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$$

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$

$= [(a^2 - x^2)^n x]_0^a - \int_0^a n(a^2 - x^2)^{n-1} (-2x) x \, dx$

$= 0 + 2n \int_0^a (a^2 - x^2)^{n-1} x^2 \, dx$

$= 2n \int_0^a (a^2 - x^2)^{n-1} \{a^2 - (a^2 - x^2)\} dx$

$= 2na^2 \int_0^a (a^2 - x^2)^{n-1} dx - 2n \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$

$= 2n\, a^2 I_{n-1} - 2n\, I_n$

$\Rightarrow I_n(2n + 1) = 2n\, a^2\, I_{n-1}$

$\therefore I_n = \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$.

উদাহরণ–5. যদি $U_n = \int_0^1 x^n \tan^{-1}x \, dx$ হয়, তবে দেখাও যে

$(n + 1)U_n + (n - 1)U_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$. **[DUH–86, 05, 07, RUH–82]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $U_n = \int_0^1 x^n \tan^{-1}x \, dx$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} dx$

$\Rightarrow (n + 1)\, U_n = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx$ ..... (1)

আবার $U_{n-2} = \int_0^1 x^{n-2} \tan^{-1}x \, dx = \left[\frac{x^{n-1}}{n-1} \tan^{-1} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^{n-1}}{n-1} dx$

$\Rightarrow (n - 1)U_{n-2} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^2} dx$ ..... (2)

(1) + (2) $\Rightarrow (n + 1)\, U_n + (n - 1)U_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^{n-1}}{x^2 + 1} dx$

$= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 x^{n-1} dx$

$\therefore (n + 1)\, U_n + (n - 1)\, U_{n-2} = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$.

উদাহরণ–6. যদি $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx$ হয়, তবে দেখাও যে

$I_n + n(n - 1)\, I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$. এবং ইহা হইতে $\int_0^{\pi/2} x^5 \sin x \, dx$ অর্থাৎ I_5 এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–95, 03, 09, NUH(NM)–03, 08, 09, 2010, BSc(Pass)–07, DUH–90]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx$

$= [-x^n \cos x]_0^{\pi/2} + n \int_0^{\pi/2} x^{n-1} \cos x \, dx$

$= 0 + n\, [x^{n-1} \sin x]_0^{\pi/2} - n(n - 1) \int_0^{\pi/2} x^{n-2} \sin x \, dx$

$= n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n - 1) I_{n-2}$

$\Rightarrow I_n + n(n - 1)\, I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$.

দ্বিতীয় অংশ ঃ $I_n + n(n-1)\,I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$

$n = 5, 3, 1$ বসিয়ে পাই $I_5 + 5.4\,I_3 = 5\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$ ..... (1)

$I_3 + 3.2\,I_1 = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ ..... (2), $I_1 + 0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^0$ ..... (3)

$\therefore (3) \Rightarrow I_1 = 1 \quad \therefore (2) \Rightarrow I_3 = -6 + 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

$\therefore (1) \Rightarrow I_5 = -20\left\{-6 + 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\} + 5\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$

$= 120 - 60\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$

অর্থাৎ $\int_0^{\pi/2} x^5 \sin x\,dx = 5\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - 60\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 120.$

উদাহরণ–7. যদি $U_n = \int_0^{\pi/2} x \sin^n x\,dx$ হয় তবে প্রমাণ কর যে

$$U_n = \frac{1}{n^2} + \frac{n-1}{n} U_{n-2},\ n > 1$$

এবং ইহা হইতে প্রমাণ কর যে $U_5 = \frac{149}{225}$. **[DUH–1985,**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $U_n = \int_0^{\pi/2} x \sin^n x\,dx.$

$= \int_0^{\pi/2} (x \sin^{n-1} x)\sin x\,dx = [-x \sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2}$

$+ \int_0^{\pi/2} \{\sin^{n-1} x.1 + x(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\}\cos$

$= 0 + \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cos x\,dx + (n-1)\int_0^{\pi/2} x \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d(\sin x) + (n-1)\int_0^{\pi/2} x \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)dx$

$= \left[\frac{\sin^n x}{n}\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} x \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} x \sin^n$

$= \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^n + (n-1)\,U_{n-2} - (n-1)U_n$

$\Rightarrow U_n(1 + n - 1) = \frac{1}{n} + (n-1)U_{n-2}$

$\Rightarrow U_n\,n = \frac{1}{n} + (n-1)U_{n-2} \quad \Rightarrow U_n = \frac{1}{n^2} + \frac{n-1}{n} U_{n-2}$

দ্বিতীয় অংশ ঃ আমরা জানি $U_n = \frac{1}{n^2} + \frac{n-1}{n} U_{n-2}$

$n = 5, 3, 1$ বসিয়ে পাই $U_5 = \frac{1}{25} + \frac{4}{5} U_3$ ..... (1)

$U_3 = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} U_1$ .....∴ (2) এবং $U_1 = 1 + 0 \quad \therefore U_1 = 1$

$(2) \Rightarrow U_3 = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$

$(1) \Rightarrow U_5 = \frac{1}{25} + \frac{4}{5}\cdot\frac{7}{9} = \frac{1}{25} + \frac{28}{45} = \frac{9 + 140}{225} = \frac{149}{225}.$

উদাহরণ–8. যদি $I_n = \int_0^\infty e^{-x} \sin^m x\,dx$, $m \geq 2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(1 + m^2)I_m = m(m-1)I_{m-2}$ এবং ইহা হইতে I_4 এর মান নির্ণয় কর। **[CUH–1982]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $I_m = \int_0^\infty e^{-x} \sin^m x\,dx$

$= [-e^{-x} \sin^m x]_0^\infty + \int_0^\infty m \sin^{m-1} x \cos x.\, e^{-x}\,dx$

$= 0 + m[-\sin^{m-1} x \cos x.\, e^{-x}]_0^\infty$

$+ m\int_0^\infty \{(m-1)\sin^{m-2} x \cos^2 x - \sin^{m-1} x.\sin x\}e^{-x}\,dx$

$= 0 + m(m-1)\int_0^\infty e^{-x} \sin^{m-2} x \cos^2 x\,dx - m\int_0^\infty e^{-x} \sin^m x\,dx$

$= m(m-1)\int_0^\infty e^{-x} \sin^{m-2} x(1 - \sin^2 x)\,dx - mI_m$

$= m(m-1)\int_0^\infty e^{-x} \sin^{m-2} x\,dx - m(m-1)\int_0^\infty e^{-x} \sin^m x\,dx - mI_m$

$= m(m-1)\,I_{m-2} - m(m-1)I_m - mI_m = m(m-1)\,I_{m-2} - m^2 I_m$

$\therefore I_m(m^2 + 1) = m(m-1)\,I_{m-2}$

দ্বিতীয় অংশ ঃ আমরা জানি $I_m(m^2 + 1) = m(m-1)I_{m-2}$

$m = 4, 2$ বসিয়ে পাই $17\,I_4 = 4.3\,I_2$ ..... (1) এবং $5\,I_2 = 2I_0$ ..... (2)

এখন $I_m = \int_0^\infty e^{-x} \sin^m x\,dx \quad \therefore I_0 = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 0 + 1 = 1$

$(2) \Rightarrow I_2 = \frac{2}{5}.\ I_0 = \frac{2}{5},$ (1)

$\Rightarrow I_4 = \frac{12}{17} I_2 = \frac{12}{17}\cdot\frac{2}{5} = \frac{24}{85}.$

উদাহরণ–9. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos^n x\,dx$, $a>0$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর এবং ইহা হইতে $\int_0^\infty e^{-ax}\cos^5 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি $I_n = \int_0^\infty e^{-ax}\cos^n x\,dx$

$$= \left[\cos^n x.\frac{e^{-ax}}{-a}\right]_0^\infty - \int_0^\infty n\cos^{n-1}x\,(-\sin x)\,\frac{e^{-ax}}{-a}\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{a} - \frac{n}{a}\int_0^\infty \cos^{n-1}x\sin x\,e^{-ax}\,dx$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{n}{a}\left[\cos^{n-1}x\sin x.\frac{e^{-ax}}{-a}\right]_0^\infty + \frac{n}{a}\int_0^\infty \{\cos^{n-1}x.\cos x + (n-1)\cos^{n-2}x\,(-\sin x).\sin x\}.\frac{e^{-ax}}{-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{a} - 0 - \frac{n}{a^2}\int_0^\infty \cos^n x.\,e^{-ax}\,dx + \frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^\infty \cos^{n-2}x.\sin^2 x\,e^{-ax}\,dx$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{n}{a^2}I_n + \frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{n}{a^2}I_n + \frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos^{n-2}x\,dx - \frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos^n x\,dx$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{n}{a^2}I_n + \frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2} - \frac{n(n-1)}{a^2}I_n$$

$$\Rightarrow I_n\left\{1 + \frac{n}{a^2} + \frac{n(n-1)}{a^2}\right\} = \frac{1}{a} + \frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n\left(1 + \frac{n^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{n(n-1)}{a^2}I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{a}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}I_{n-2}$$

অর্থাৎ $\int_0^\infty e^{-ax}\cos^n x\,dx = \frac{a}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos^{n-2}x\,dx$ ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

দ্বিতীয় অংশ ঃ আমরা জানি

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos^n x\,dx = \frac{a}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos^{n-2}x\,dx$$

$n = 5, 3$ বসিয়ে পাই

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos^5 x\,dx = \frac{a}{a^2+25} + \frac{5.4}{a^2+25}\int_0^\infty e^{-ax}\cos^3 x\,dx \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos^3 x\,dx = \frac{a}{a^2+9} + \frac{3.2}{a^2+9}\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx \quad \cdots\cdots (2)$$

(1) ও (2) হইতে পাই $\int_0^\infty e^{-ax}\cos^5 x\,dx = \frac{a}{a^2+25} + \frac{20}{a^2+25}\left\{\frac{a}{a^2+9} + \frac{6}{a^2+9}\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx\right\}$

$$= \frac{a}{a^2+25} + \frac{20a}{(a^2+25)(a^2+9)} + \frac{120}{(a^2+25)(a^2+9)}\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx$$

$$= \frac{a}{a^2+25} + \frac{20a}{(a^2+25)(a^2+9)} + \frac{120}{(a^2+25)(a^2+9)}\left[\frac{e^{-ax}(-a\cos x + \sin x)}{a^2+1}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{a}{a^2+25} + \frac{20a}{(a^2+25)(a^2+9)} + \frac{120}{(a^2+25)(a^2+9)}\left(0 + \frac{a}{a^2+1}\right)$$

$$= \frac{a}{a^2+25}\left[1 + \frac{20}{a^2+9} + \frac{120}{(a^2+9)(a^2+1)}\right].$$

উদাহরণ–10. $\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx$ এর লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় কর। ইহা হইতে দেখাও যে $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n\,n!}{(m+1)^{n+1}}$. **[DUH–1984]**

সমাধান ঃ ধরি $I_{m,n} = \int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx$

$$= \left[(\ln x)^n.\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}.\frac{1}{x}.\frac{x^{m+1}}{m+1}\,dx$$

$$= 0 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = \frac{-n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}dx$$

ইহাই নির্ণেয় লঘুকরণ সূত্র।

দ্বিতীয় অংশ ঃ আমরা জানি $\int_0^1 x^m(ln\ x)^n\,dx = \frac{-n}{m+1}\int_0^1 x^m(ln\ x)^{n-1}\,dx$

$$\Rightarrow I_{m,n} = \frac{-n}{m+1} I_{m,n-1} \cdots\cdots (1)$$

n এর পরিবর্তে n – 1 বসিয়ে পাই

$$I_{m,n-1} = \frac{-(n-1)}{m+1} I_{m,n-2} \cdots\cdots (2)$$

$$\therefore (1) \Rightarrow I_{m,n} = \frac{(-1)^2 n(n-1)}{(m+1)^2} I_{m,n-2} \cdots\cdots (3)$$

আবার (2) এ n এর পরিবর্তে n – 2 বসাই $I_{m,n-2} = \frac{-(n-2)}{m+1} I_{m,n-3}$ ..... (4)

$$\therefore (3) \Rightarrow I_{m,n} = \frac{(-1)^3 n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} I_{m,n-3}$$

অনুরূপে পাই $I_{m,n} = \frac{(-1)^n n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1}{(m+1)^n} I_{m,0}$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n} I_{m,0} \cdots\cdots (5)$$

এখন $I_{m,0} = \int_0^1 x^m\,dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+1}$

$$(5) \Rightarrow I_{m,n} = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}\cdot\frac{1}{m+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^m(ln\ x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}. \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

উদাহরণ–11. যদি $U_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx$,

$t_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx$ যেখানে n পূর্ণসংখ্যা, তবে দেখাও যে

$U_{n+1} = U_n = \frac{\pi}{2}$; $t_{n+1} - t_n = U_{n+1}$ এবং ইহা হইতে আরও দেখাও $t_n = \frac{n\pi}{2}$.

[NUH–94, DUH–84, 86, 91, RUH–79, 87, 88, CUH–89

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $U_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx$ ..... (1)

n এর পরিবর্তে n + 1 বসিয়ে পাই $U_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx$ ..... (2)

$$(2) - (1) \Rightarrow U_{n+1} - U_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos 2nx \sin x}{\sin x}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^{\pi/2} = 2\left[\frac{\sin n\pi}{2n} - 0\right] = 0$$

$\therefore U_{n+1} - U_n = 0$

n = 1, 2, 3, 4, ... n বসিয়ে যোগ করি

$U_2 - U_1 = 0$

$U_3 - U_2 = 0$

$U_4 - U_3 = 0$

... ...

... ...

$U_{n+1} - U_n = 0$

$\therefore U_{n+1} - U_1 = 0$

$$\Rightarrow U_{n+1} = U_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x}\,dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore U_{n+1} = U_n = \frac{\pi}{2}$. (প্রমাণিত)

দ্বিতীয় অংশ ঃ $t_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx$

$$\Rightarrow t_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$\therefore t_{n+1} - t_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\{\sin(n+1)x - \sin nx\}\{\sin(n+1)x + \sin nx\}}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x \cdot 2\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot \sin(2n+1)x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx$$

$= U_{n+1}$ [(2) এর সাহায্যে]

$\therefore t_{n+1} - t_n = U_{n+1}$. (প্রমাণিত)

তৃতীয় অংশ ঃ $t_{n+1} - t_n = U_{n+1} \Rightarrow t_{n+1} - t_n = \frac{\pi}{2}$

$n = 1, 2, 3, \cdots (n-1)$, বসিয়ে যোগ করি $t_n - t_1 = (n-1)\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow t_n = \frac{(n-1)\pi}{2} + t_1 = \frac{(n-1)\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \frac{(n-1)\pi}{2} + [x]_0^{\pi/2} = \frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \qquad \therefore t_n = \frac{n\pi}{2}. \text{ (প্রমাণিত)}$$

উদাহরণ–12. $U_n = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\,dx$, n যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে $U_{n+2} + U_n = 2U_{n+1}$. **[CUH–1986]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $U_n = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\,dx$ ..... (1)

n এর পরিবর্তে n + 1 বসাই $U_{n+1} = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x}\,dx$ ..... (2)

$$(1) - (2) \Rightarrow U_n - U_{n+1} = \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)x - \cos nx}{1-\cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2\sin\frac{(2n+1)x}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx = -\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$$

ধরি $\frac{x}{2} = z \quad \therefore dx = 2\,dz$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$, যখন $x = \pi$ তখন $z = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore U_n - U_{n+1} = -2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = 2t_n \text{ ..... (3) (ধরি)}$$

$$\therefore t_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz \qquad \therefore t_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)z}{\sin z}\,dz$$

$$\therefore t_n - t_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)z - \sin(2n-1)z}{\sin z}\,dz$$

$$\Rightarrow t_n - t_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos 2nz.\sin z}{\sin z}\,dz = \left[\frac{\sin 2nz}{n}\right]_0^{\pi/2} = 0$$

$$\therefore t_n - t_{n-1} = 0$$

$n = 1, 2, 3, \cdots n$ বসিয়ে যোগ করি $t_n - t_0 = 0$

$$\therefore t_n = t_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin z}{\sin z}\,dz$$

$$= \int_0^{\pi/2} dz = [z]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \Rightarrow U_{n+1} - U_n = 2.\frac{\pi}{2}$$

বা $U_{n+1} - U_n = \pi$ ..... (4)

n এর পরিবর্তে (n + 1) বসিয়ে পাই $U_{n+2} - U_{n+1} = \pi$ ..... (5)

$(5) - (4) \Rightarrow U_{n+2} - 2U_{n+1} + U_n = 0 \Rightarrow U_{n+2} + U_n = 2U_{n+1}$. (প্রমাণিত)

উদাহরণ–13. যদি $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin nx\,dx$ হয়, তবে দেখাও যে $I_{m,n} = \frac{-\cos^m x \cos nx}{m+n} + \frac{m}{m+n} I_{m-1,n-1}$ এবং

ইহা হইতে $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 3x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1993]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin nx\,dx$

$$= \cos^m x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - \int m\cos^{m-1}x(-\sin x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx$$

$$= \frac{-\cos^m x\cos nx}{n} - \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x \sin x \cos nx\,dx \text{ ..... (1)}$$

এখন $\sin(n-1)x = \sin nx\cos x - \cos nx.\sin x$

বা $\sin x\cos nx = \sin nx.\cos x - \sin(n-1)x$

$$(1) \Rightarrow I_{m,n} = \frac{-\cos^m x\cos nx}{n} - \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\ \{\sin nx\cos x - \sin(n-1)x\}dx$$

$$= -\frac{\cos^m x\cos nx}{n} - \frac{m}{n}\int \cos^m x \sin nx\,dx + \frac{m}{n}\int \cos^{m-1}x\sin(n-1)x\,dx$$

$$= -\frac{\cos^m x\cos nx}{n} - \frac{m}{n} I_{m,n} + \frac{m}{n} I_{m-1,n-1}$$

$$\Rightarrow I_{m,n}\left(1+\frac{m}{n}\right) = -\frac{\cos^m x\cos nx}{n} + \frac{m}{n} I_{m-1,n-1}$$

$$\Rightarrow I_{m,n} = \frac{-\cos^m x\cos nx}{m+n} + \frac{m}{m+n} I_{m-1,n-1}. \text{ (প্রমাণিত)}$$

দ্বিতীয় অংশ ঃ আমরা জানি

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin nx\, dx = -\left[\frac{\cos^m x \cos nx}{m+n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{m}{m+n}\int_0^{\pi/2} \cos^{m-1}x \sin(n-1)x\, dx \quad \cdots\cdots (2)$$

$m = 5, n = 3$ বসিয়ে পাই $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 3x\, dx = -\left[\frac{\cos^5 x \cos 3x}{8}\right]_0^{\pi/2} + \frac{5}{8}\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin 2x\, dx$

$$= 0 + \frac{1}{8} + \frac{5}{8}\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin 2x\, dx \quad \cdots\cdots (3)$$

(2) এ $m = 4$ এবং $n = 2$ বসিয়ে পাই

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin 2x\, dx = -\left[\frac{\cos^4 x \cos 2x}{6}\right]_0^{\pi/2} + \frac{4}{6}\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x\, dx \quad \cdots\cdots (4)$$

আবার (2) এ $m = 3$ এবং $n = 1$ বসাই

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x\, dx = -\left[\frac{\cos^3 x \cos x}{4}\right]_0^{\pi/2} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin 0x\, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore (4) \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin 2x\, dx = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore (3) \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 3x\, dx = \frac{1}{8} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3+5}{24}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 3x\, dx = \frac{1}{3}.$$

উদাহরণ–14. n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx\, dx = \frac{\pi}{2^{n+1}} \qquad \textbf{[CUH–1986]}$$

সমাধান ঃ ধরি $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx\, dx$

$$= \left[\cos^n x \cdot \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} n \cos^{n-1}x (-\sin x)\cdot\frac{\sin nx}{n}\, dx$$

$$= 0 + \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}x \cdot \sin x \sin nx\, dx \quad \cdots\cdots (1)$$

এখন $\cos(n-1)x = \cos nx \cos x + \sin nx \sin x$

বা $\sin nx \sin x = \cos(n-1)x - \cos nx \cos x$

$$(1) \Rightarrow I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}x \{\cos(n-1)x - \cos nx \cos x\}dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}x \cos(n-1)x\, dx - \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx\, dx$$

$$= I_{n-1} - I_n \Rightarrow 2I_n = I_{n-1} \quad \therefore I_n = \frac{1}{2} I_{n-1} \quad \cdots\cdots (2)$$

(2) এ $n = 1, 2, 3, \cdots n$ বসিয়ে গুণ করি

$$I_1 . I_2 . I_n \cdots I_n = \left(\frac{1}{2} I_0\right)\left(\frac{1}{2} I_1\right)\left(\frac{1}{2} I_2\right)\cdots\left(\frac{1}{2} I_{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow I_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n I_0 \Rightarrow I_n = \frac{1}{2^n} I_0 = \frac{1}{2^n}\int_0^{\pi/2} \cos^0 x \cos 0x\, dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{2^n}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx\, dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}. \qquad \text{(প্রমাণিত)}$$

উদাহরণ–15. প্রমাণ কর $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx\, dx$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left[2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right]$$

প্রমাণ ঃ ধরি $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx\, dx$

$$= -\left[\frac{\cos^n x \cos nx}{n}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} n \cos^{n-1}x(-\sin x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx$$

$$= \frac{1}{n} - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}x \sin x \cos nx\, dx \quad \cdots\cdots (1)$$

এখন $\sin(n-1)x = \sin nx \cos x - \cos nx \sin x$

বা $\sin x \cos nx = \sin nx \cos x - \sin(n-1)x$

$$(1) \Rightarrow I_n = \frac{1}{n} - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}x\{\sin nx \cos x - \sin(n-1)x\}dx$$

$$= \frac{1}{n} - I_n + I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n(1+1) = \frac{1}{n} + I_{n-1}$$

$$\therefore I_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} I_{n-1} \quad \cdots\cdots (2)$$

n এর পরিবর্তে n – 1 বসিয়ে পাই $I_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2} I_{n-2}$ ..... (3)

$(2) \Rightarrow I_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2} I_{n-2}\right\} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^2} I_{n-2}$ ..... (4)

(3) নং এ n এর পরিবর্তে n – 1 বসাই $I_{n-2} = \frac{1}{2(n-2)} + \frac{1}{2} I_{n-3}$ ..... (5)

$(4) \Rightarrow I_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^2}\left\{\frac{1}{2(n-2)} + \frac{1}{2} I_{n-3}\right\}$

$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + \frac{1}{2^3} I_{n-3}$

অনুরূপে পাই $I_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}.3} + \frac{1}{2^{n-1}.2} + \frac{1}{2^{n-1}} I_1$ ..... (6)

এখন $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$

$(6) \Rightarrow I_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}.3} + \frac{1}{2^{n-1}.2} + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}.2} + \frac{1}{2^{n-2}.3} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2^{n+1}}\left[2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right]$

(প্রমাণিত)

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

17.1. ওয়েলীর সূত্রটি লিখ। (Write the Walle's formula.)

Ans : যদি n যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

$$= \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{যখন n জোড়} \\ \frac{(n-1)(n-3)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3\cdot 1} & \text{যখন n বেজোড়} \end{cases}$$

17.2. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx$ এর মান কত?

Ans : $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx = \frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3} = \frac{16}{35}$

17.3. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x \, dx$

Ans : $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x \, dx = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$

17.4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx$ এর মান কত?

[What is the value of $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx$]

Ans : $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.

EXERCISE–17

মান নির্ণয় কর।

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x \, dx$
2. $\int_0^{\pi/8} \cos^3 4x \, dx$
3. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} d\theta$
4. $\int_0^{\pi/2} x^4 \sin x \, dx$
5. $\int_0^{\pi/4} \tan^6\theta \, d\theta$
6. $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \sin 4x \, dx$
7. $\int_0^a (a^2 - x^2)^n \, dx$
8. $\int_0^{\pi} \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} dx$
9. যদি $U_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin mx \, dx$ হয়, তবে দেখাও যে

   $U_n = \frac{n\pi^{n-1}}{m^2 2^{n-1}} - \frac{n(n-1)}{m^2} U_{n-2}$ যখন m এর আকার $4r + 1$.
10. যদি $I_n = \int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin^n x \, dx$, $n > 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

    $(n^2 + 4) I_n = n(n-1) I_{n-2} + 2e^{\pi}$ এবং ইহা হইতে $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin^3 x \, dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–2005, DUH–1989]**

11. যদি $U_n = \int \cos n\theta \operatorname{cosec} \theta \, d\theta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$U_n - U_{n-2} = \frac{2\cos(n-1)\theta}{n-1}$ এবং ইহা হইতে $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 5\theta \sin 3\theta}{\sin \theta} d\theta$

এর মান নির্ণয় কর। **[DUH-1992, RUH-1963, CUH-1969]**

12. $n > 1$ হইলে প্রমাণ কর $\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}x \sin nx \, dx = \frac{1}{n-1}$

13. $U_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx$ হইলে প্রমাণ কর $U_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} U_{m,n-2}$

[RUH-1979, CUH-1981]

14. m এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে

প্রমাণ কর $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{\lfloor m \lfloor n}{\lfloor m+n+1}$.

15. n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে প্রমাণ কর যে $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = \lfloor n$.

ANSWER–17

1. $\frac{63\pi}{512}$ 2. $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{\pi}{2}$

4. $\frac{\pi^3}{2} - 12\pi + 24$ 5. $-\frac{\pi}{4} + \frac{13}{15}$ 6. $\frac{5}{12}$

7. $a^{2n+1} \cdot \frac{(2n)(2n-2)\cdots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5.3.1}$

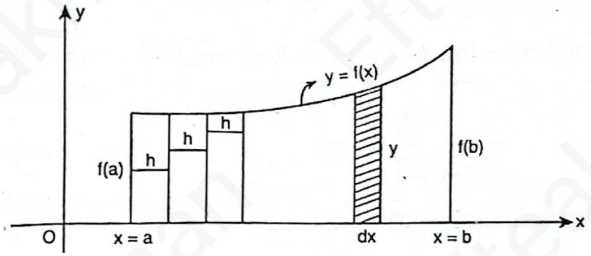
8. $-\frac{16}{15}$ 10. $\frac{2}{65}(11e^\pi + 3)$ 11. $\frac{71}{105}$.

—————×—————

Chapter–18
যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট ইন্টিগ্র্যাল
DEFINITE INTEGRAL AS THE LIMIT OF A SUM

18.1. ইন্টিগ্রালের সংজ্ঞার সাহায্যে অথবা যোগফলের সীমারূপে $\int_a^b f(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–2002]**

সমাধান ঃ মনে করি $y = f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে সীমাবদ্ধ (bounded) এবং অবিচ্ছিন্ন (continuous) যেখানে a, b সসীম এবং $b > a$.



যদি $[a, b]$ ব্যবধিকে n সংখ্যক সমান উপ-ব্যবধিতে বিভক্ত করি এবং প্রত্যেক উপ-ব্যবধির দৈর্ঘ্য h হয় তবে $a + nh = b$ বা $nh = b - a$ হবে।

সুতরাং $x = a$, $x = b$, x অক্ষ এবং $y = f(x)$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হইবে

$$\lim_{h\to 0} [hf(a+h) + hf(a+2h) + \cdots + h.f(a+nh)]$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sum_{r=1}^{n} f(a+rh),\ nh = b-a.$$

নির্দিষ্ট ইন্টিগ্র্যালের সংজ্ঞানুসারে উক্ত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হইবে $\int_a^b f(x)dx$

সুতরাং $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} \sum_{r=1}^{n} hf(a+rh),\ nh = b-a.$

18.2. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=1}^{n} f(a+rh),\ nh = b-a$

$a = 0$ এবং $b = 1$ হইলে পাই $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=1}^{n} f(rh),\ nh = 1$

$\Rightarrow h = \frac{1}{n}$ $\therefore h \to 0$ হইলে $n \to \infty$ হইবে।

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx \quad \cdots \quad (1)$$

18.3. [a, b] ব্যবধির উপ-ব্যবধিগুলির বিভক্ত বিন্দুগুলি $x_1 = a$, $x_2 = ar$, $x_3 = ar^2$, $\cdots$, $x_n = ar^n = b$ এবং উপ-ব্যবধিগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $\delta_1 = a(r-1)$, $\delta_2 = ar(r-1)$, $\delta_3 = ar^2(r-1)$, $\cdots$, $\delta_n = 4r^{n-1}(r-1)$ বিবেচনা করিলে পাই,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r\to 1} [\delta_1 f(x_1) + \delta_2 f(x_2) + \delta_3 f(x_3) + \cdots + \delta_n f(x_n)]$$

$$= \lim_{r\to 1} \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(x_i)$$

এইক্ষেত্রে $ar^n = b$ বা $r^n = \frac{b}{a}$.

উদাহরণ-1. যোগফলের সীমারূপে $\int_a^b \sin x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1965, 1983, RUH-1983]

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=1}^{n} f(a + rh)$, $nh = b - a$

$f(x) = \sin x$ হইলে $f(a + rh) = \sin(a + rh)$ হইবে।

$$\therefore \int_a^b \sin x\,dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=1}^{n} \sin(a + rh)$$

$$= \lim_{h\to 0} h[\sin(a + h) + \sin(a + 2h) + \cdots + \sin(a + nh)] \cdots (1)$$

ত্রিকোণমিতিক ধারার যোগফলের সূত্র হইতে পাই

$\sin(a + h) + \sin(a + 2h) + \cdots + \sin(a + nh)$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\text{(পদসংখ্যা} \times \text{কোণের পার্থক্য)}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\text{কোণের পার্থক্য}}{2}\right)} \sin\left(\frac{\text{১ম কোণ} + \text{শেষ কোণ}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \sin\left(\frac{a + h + a + nh}{2}\right)$$

$$(1) \Rightarrow \int_a^b \sin x\,dx = \lim_{h\to 0} h.\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \sin\left(\frac{a + h + a + nh}{2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{h/2}{\sin\frac{h}{2}}\right) 2\sin\left(\frac{a + h + a + nh}{2}\right) \sin\frac{nh}{2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{h/2}{\sin\frac{h}{2}}\right) 2\sin\left(\frac{a + b + h}{2}\right) \sin\left(\frac{b - a}{2}\right) \quad [\because nh = b - a]$$

$$= 1.\,2\sin\left(\frac{a + b}{2}\right) \sin\left(\frac{b - a}{2}\right)$$

$$= \cos a - \cos b.$$

উদাহরণ-2. যোগফলের সীমারূপে $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[NUH-2002]

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=1}^{n} f(a + rh)$ যেখানে $nh = b - a$

$f(x) = \cos x$ হইলে $f(a + rh) = \cos(a + rh)$ হইবে।

$$\therefore \int_a^b \cos x\,dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=1}^{n} \cos(a + rh),\ nh = b - a$$

$$= \lim_{h\to 0} h\{\cos(a + h) + \cos(a + 2h) + \cdots + \cos(a + nh)\}$$

$$= \lim_{h\to 0} h.\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \cos\left(\frac{a + h + a + nh}{2}\right)$$

$$\left[\because \cos(a + h) + \cos(a + 2h) + \cdots + \cos(a + nh) = \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \cos\left(\frac{a + h + a + nh}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \int_a^b \cos x\,dx = \lim_{h\to 0} \left(\frac{h/2}{\sin\frac{h}{2}}\right) 2\cos\left(\frac{a + h + a + b - a}{2}\right) \sin\left(\frac{b - a}{2}\right)$$

$[\because nh = b - a]$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{h/2}{\sin\frac{h}{2}}\right).2\cos\left(\frac{b+a+h}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{b+a}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right) = \sin b - \sin a$$

$a = 0$ এবং $b = \frac{\pi}{2}$ বসিয়ে পাই $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$.

উদাহরণ-3. যোগফলের সীমারুপে $\int_a^b \sin^2 x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh),\ nh = b-a$.

$$\Rightarrow \int_a^b \sin^2 x\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} \sin^2(a+rh)$$

$$= \lim_{h\to 0} h\{\sin^2(a+h) + \sin^2(a+2h) + \cdots + \sin^2(a+nh)\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}[\{1-\cos 2(a+h)\} + \{1-\cos 2(a+2h)\} + \cdots$$

$$\cdots + \{1-\cos 2(a+nh)\}]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{2}[n - \{\cos 2(a+h) + \cos 2(a+2h) + \cdots + \cos 2(a+nh)\}]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left[n - \frac{\sin\frac{n\,2h}{2}}{\sin\frac{2h}{2}}\cos\frac{2(a+h)+2(a+nh)}{2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left[nh - \left(\frac{h}{\sin h}\right)\sin nh.\cos(a+h+a+nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left[b-a - \left(\frac{h}{\sin h}\right).\sin(b-a)\cos(a+h+b)\right]$$

$[\because nh = b-a$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin(b-a)\cos(b+a)$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right) - \frac{1}{4}2\cos(b+a)\sin(b-a)$$

$$= \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{4}(\sin 2b - \sin 2a).$$

উদাহরণ-4. যোগফলের সীমারুপে $\int_a^b e^x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1960, 1962, 1966, 1983, 1989]

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh),\ nh = b-a$

$f(x) = e^x$ হইলে $f(a+rh) = e^{a+rh}$ হইবে।

$$\therefore \int_a^b e^x\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} e^{a+rh},\ nh = b-a$$

$$= \lim_{h\to 0} he^a \sum_{r=1}^{n} e^{rh} = \lim_{h\to 0} he^a(e^h + e^{2h} + e^{3h} + \cdots + e^{nh})$$

$$= \lim_{h\to 0} he^a.e^h\{1 + (e^h) + (e^h)^2 + \cdots + (e^h)^{n-1}\}$$

$$= \lim_{h\to 0} h.e^a.e^h\frac{(e^h)^n - 1}{e^h - 1} \quad \left[\because 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$$

$$\Rightarrow \int_a^b e^x\,dx = \lim_{h\to 0} he^a.e^h\left(\frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{he^h}{e^h - 1}.e^a(e^{b-a} - 1) \quad [\because nh = b-a]$$

$$= (e^b - e^a)\lim_{h\to 0} \frac{he^h}{e^h - 1} \quad [0/0 \text{ আকার}]$$

$$= (e^b - e^a)\lim_{h\to 0} \frac{he^h + e^h}{e^h} \quad [\text{এল-হসপিটাল (L. Hospital) এর নিয়ম দ্বারা}]$$

$$= e^b - e^a.$$

উদাহরণ-5. যোগফলের সীমারুপে প্রমাণ কর

(i) $\int_a^b x^m\,dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ যখন $m \neq 1$

(ii) $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ **[NUH-2003]**

সমাধান ঃ (i) আমরা জানি $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh),\ nh = b-a$

$f(x) = x^m$ হইলে $f(a+rh) = (a+rh)^m$ হইবে।

$$\therefore \int_a^b x^m\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(a+rh)^m$$

$$= \lim_{h\to 0} h\{(a+h)^m + (a+2h)^m + \cdots + (a+nh)^m\} \quad \cdots\cdots (1)$$

যখন $\lim_{h\to 0}\dfrac{(z+h)^{m+1}-z^{m+1}}{h} = \dfrac{d}{dz}(z^{m+1}) = (m+1)z^m$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^{m+1}-z^{m+1}}{hz^m} = m+1 \text{ (ধ্রুবক)}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{(a+2h)^{m+1}-(a+h)^{m+1}}{h(a+h)^m} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+3h)^{m+1}-(a+2h)^{m+1}}{h(a+2h)^m} \cdots$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{a+(n+1)h\}^{m+1}-(a+nh)^{m+1}}{h(a+nh)^m} = m+1$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\{a+(n+1)h\}^{m+1}-(a+h)^{m+1}}{h\{(a+h)^m+(a+2h)^m+\cdots+(a+nh)^m\}} = m+1$$

$$\left[\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\cdots=\frac{a+c+e\cdots}{b+d+f+\cdots}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} h\{(a+h)^m+(a+2h)^m+\cdots+(a+nh)^m\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{a+(n+1)h\}^{m+1}-(a+h)^{m+1}}{m+1}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(a+b-a+h)^{m+1}-(a+h)^{m+1}}{m+1} \quad [\because nh = b-a]$$

$$= \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

অন্যভাবে ঃ $\int_a^b x^m\,dx = \lim_{r\to 1}[a(r-1)a^m + ar(r-1)(ar)^m$

$$+ ar^2(r-1)(ar^2)^m + \cdots + ar^{n-1}(r-1)(ar^{n-1})^m] \quad \text{যেখানে } r^n = \frac{b}{a}$$

$$= \lim_{r\to 1} a^{m+1}(r-1)[1 + r^{m+1} + (r^{m+1})^2 + \cdots + (r^{m+1})^{n-1}]$$

$$= \lim_{r\to 1} a^{m+1}(r-1)\cdot\frac{(r^{m+1})^n - 1}{r^{m+1}-1}$$

$$= a^{m+1}\left[\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} - 1\right\}\lim_{r\to 1}\frac{r-1}{r^{m+1}-1}\right] \quad \left[\because r^n = \frac{b}{a}\right]$$

$$= (b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\lim_{r\to 1}\frac{1}{(m+1)r^m} \text{ [ল. পিটালের সূত্র ব্যবহার করে]}$$

$$= \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

(ii) আমরা জানি, $\int_a^b x^m\,dx = \dfrac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$ যখন $m \neq -1$

$$= \frac{a^{m+1}}{m+1}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} - 1\right\} = \frac{a^{m+1}}{m+1}\{e^{(m+1)\ln\left(\frac{b}{a}\right)} - 1\}$$

$$= \frac{a^{m+1}}{m+1}\left\{(m+1)\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{(m+1)^2}{2!}\ln^2\left(\frac{b}{a}\right) + \cdots\right\}$$

$$= a^{m+1}\left\{\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{(m+1)}{2!}\ln^2\left(\frac{b}{a}\right) + \cdots\right\}$$

$m = -1$ বসাই

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

উদাহরণ–6. যোগফলের সীমারূপে $\int_a^b x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh),\ nh = b-a$

যখন $f(x) = x \Rightarrow f(a+rh) = a+rh$

$$\therefore \int_a^b x\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(a+rh)$$

$$= \lim_{h\to 0} h\{(a+h)+(a+2h)+(a+3h)+\cdots+(a+nh)\}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\{na + h(1+2+3+\cdots+n)\}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left\{na + h.\frac{n(n+1)}{2}\right\} = \lim_{h\to 0}\left\{h\,na + \frac{nh(nh+h)}{2}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{a(b-a) + \frac{(b-a)(b-a+h)}{2}\right\} \quad [\because nh = b-a]$$

$$= ab - a^2 + \frac{b^2+a^2-2ab}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

উদাহরণ–7. যোগফলের সীমারূপে $\int_0^1 x^3\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} \sum_{r=1}^{n} hf(a+rh),\ nh = b-a$

$f(x) = x^3$ হইলে $f(a+rh) = (a+rh)^3$ হইবে।

$$\therefore \int_a^b x^3\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(a+rh)^3,\ nh = b-a$$

$a = 0$ এবং $b = 1$ বসাই $\int_0^1 x^3\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(0+rh)^3,\ nh = 1-0$;

$$= \lim_{h\to 0} h^4 \sum_{r=1}^{n} r^3 = \lim_{h\to 0} h^4 (1^3+2^3+3^3+\cdots+$$

$$= \lim_{h\to 0} h^4 . \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = \lim_{h\to 0} \left\{\frac{nh(nh+h)}{2}\right\}^2$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{1(1+h)}{2}\right\}^2 \quad [\because nh = 1]$$

$$= \frac{1}{4}.$$

উদাহরণ–8. যোগফলের সীমারূপে $\int_{-1}^{2} x^2\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [DUH

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh),\ nh = b-a$

$f(x) = x^2$ হইলে $f(a+rh) = (a+rh)^2$ হইবে

$$\therefore \int_a^b x^2\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(a+rh)^2,\ nh = b-a$$

$a = -1$ এবং $b = 2$ বসাই

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(-1+rh)^2,\ nh = 2-(-1) = 3$$

$$= \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n}(1-2rh+r^2h^2)$$

$$= \lim_{h\to 0} h[(1-2h+1^2h^2)+(1-2.2h+2^2h^2)+\cdots+(1-2nh+$$

$$= \lim_{h\to 0} h[n-2h(1+2+3+\cdots+n)+h^2(1^2+2^2+\cdots+n^2)]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{nh - 2h^2.\frac{n(n+1)}{2} + h^3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{nh - \frac{nh(nh+h)}{1} + \frac{nh(nh+h)(2nh+h)}{6}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{3 - \frac{3(3+h)}{1} + \frac{3(3+h)(6+h)}{6}\right\} = 3-9+9 = 3.$$

উদাহরণ–9. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]$ এর মান নির্ণয় কর।

[RUH–1960, 1986]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{n+r}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{r}{n}}\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [ln(1+x)]_0^1 = ln\,2$$

উদাহরণ–10. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–02, NUH(NM)–04, BSc(Pass)–08, DUH–65, 82, 84, RUH–80, BScEngg–96]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2-0^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-r^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r^2}{n^2}\right)}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\sin^{-1}x]_0^1 = \sin^{-1}1 - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

উদাহরণ–11. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{n^2}{(n+1)^3}+\frac{n^2}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{1}{8n}\right]$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–95, NUH(NM)–03, BSc(Pass)–06, 10, DUH–56, 61, 86, 03, RUH–78, 88]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{n^2}{(n+1)^3}+\frac{n^2}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{1}{8n}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{(n+0)^3}+\frac{n^2}{(n+1)^3}+\frac{n^2}{(n++2)^3}+\cdots+\frac{n^2}{(n+n)^3}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}\frac{n^2}{(n+r)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^3}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^3}\,dx=\left[-\frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{3}{8}.$$

উদাহরণ–12. মান নির্ণয় কর ঃ

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}}+\frac{\sqrt{n}}{(n+3)^{3/2}}+\frac{\sqrt{n}}{(n+6)^{3/2}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{\{n+3(n-1)\}^{3/2}}\right]$$

[NUH(NM)–2005]

সমাধান ঃ $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}}+\frac{\sqrt{n}}{(n+3)^{3/2}}+\frac{\sqrt{n}}{(n+6)^{3/2}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{\{n+3(n-1)\}^{3/2}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{(n+3r)^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+3\frac{r}{n}\right)^{3/2}}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{(1+3x)^{3/2}}=\left[\frac{(1+3x)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}\cdot 3}\right]_0^1=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

উদাহরণ–13. $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{3n}\left(\frac{n}{3^2n^2+r^2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–1990]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{3n}\left(\frac{n}{3^2n^2+r^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{3n}\frac{n}{n^2\left(3^2+\frac{r^2}{n^2}\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{3n}\frac{1}{3^2+\frac{r^2}{n^2}}=\int_0^3\frac{dx}{3^2+x^2}=\frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^3$$

$$=\frac{1}{3}[\tan^{-1}1-0]=\frac{\pi}{12}.$$

উদাহরণ–14. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n^2}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2}\right]$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–1989]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n^2}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n^2-0^2}}{n^2}+\frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n^2}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{\sqrt{n^2-r^2}}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{n\sqrt{1-\frac{r^2}{n^2}}}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac{r}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_0^1=0+\frac{1}{2}\sin^{-1}1-0=\frac{\pi}{4}.$$

উদাহরণ–15. $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{1}{\sqrt{4n^2+r^2}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUH–53, 84]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{1}{\sqrt{4n^2+r^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{2n}\frac{1}{\sqrt{\left(4+\frac{r^2}{n^2}\right)}}$

$$=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}}\,dx=\left[ln(x+\sqrt{x^2+4})\right]_0^2$$

$$=ln(2+\sqrt{8})-ln\,2=ln(1+\sqrt{2}).$$

উদাহরণ–16. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{1^3+n^3}+\frac{2^2}{2^3+n^3}+\frac{3^2}{3^3+n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}\right]$ এর মান নির্ণয় কর। **[CUH–1980]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{1^3+n^3}+\frac{2^2}{2^3+n^3}+\frac{3^2}{3^3+n^3}+\cdots\frac{n^2}{n^3+n^3}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{r^2}{r^3+n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{r^2}{n^3\left(1+\frac{r^3}{n^3}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\frac{r}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{r}{n}\right)^3} = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\left[ln(1+x^3)\right]_0^1 = \frac{1}{3} ln\, 2.$$

উদাহরণ–17. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1983, 1987, RUH–1956, 1958, 1988, CUH–1978, 1982, BScEngg (KUET) 1994]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{n}{n^2+r^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\frac{r^2}{n^2}}\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\tan^{-1} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

উদাহরণ–18. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n-2^2}}+\cdots+\frac{1}{n}\right]$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–09, DUH–58, 84, 87, 91, 93, RUH–94]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n-2^2}}+\cdots+\frac{1}{n}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2n.1-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{2n.2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n.n-n^2}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2nr-r^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2(r/n)-(r/n)^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$$

$$= -\left[\sin^{-1}(1-x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

উদাহরণ–19. $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$ এর মান নির্ণয় কর। **[DUH–1988, BScEngg (KUET)–1993, 1995]**

সমাধান ঃ ধরি $s = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$

উভয় পক্ষে ln নিয়ে পাই

$$ln\, s = \lim_{n\to\infty} ln\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[ln\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)+ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} ln\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right) = \int_0^1 ln(1+x^2)dx$$

$$= \left[ln(1+x^2).x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}.2x.x\,dx$$

$$= ln\,2 - 0 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = ln\,2 - 2\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx$$

$$= ln\,2 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = ln\,2 - 2\left[x\right]_0^1 + 2\left[\tan^{-1} x\right]_0^1$$

$$= ln\,2 - 2 + 2.\tan^{-1} 1 = ln\,2 - 2 + 2.\frac{\pi}{4} = ln\,2 + \frac{\pi-4}{2}$$

$$= ln\,2 + ln\, e^{\left(\frac{\pi-4}{2}\right)} = ln\,2.e^{\left(\frac{\pi-4}{2}\right)} \quad \therefore s = 2.e^{\left(\frac{\pi-4}{2}\right)}.$$

উদাহরণ–20. $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2/n^2}\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)^{4/n^2}\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)^{2n/n^2}\right]$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–1994, DUH–1994, RUH–1991]**

সমাধান ঃ ধরি $s = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2/n^2}\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)^{4/n^2}\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)^{2n/n^2}\right]$

উভয়পক্ষে ln নিয়ে পাই

$$ln\, s = \lim_{n\to\infty} ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2/n^2}\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)^{4/n^2}\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)^{2n/n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n^2}ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{4}{n^2}ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\frac{2n}{n^2}ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2.1}{n^2}\ln\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)+\frac{2.2}{n^2}\ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\frac{2n}{n^2}\ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{2r}{n^2}\ln\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}2\left(\frac{r}{n}\right)\ln\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right)$$

$$= \int_0^1 2x\ln(1+x^2)dx = \int_1^2 \ln z\,dz$$ ধরি $1+x^2=z$, $\therefore 2x\,dx=dz$, যখন $x=0$ তখন $z=1$, যখন $x=1$ তখন $z=2$

$$= [\ln z.z]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{z}.z\,dz$$

$$= 2\ln 2 - 0 - \int_1^2 dz = \ln 2^2 - [z]_1^2$$

$$= \ln 4 - (2-1) = \ln 4 - 1$$

$$= \ln 4 - \ln e = \ln(4/e) \qquad \therefore s = \frac{4}{e}.$$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

18.1. $\int_a^b f(x)\,dx$ কে যোগফলের সীমারূপে লিখ। [Write $\int_a^b f(x)\,dx$ as the limit of sum.]

Ans : $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$ যেখানে $nh = b-a$.

18.2. $\int_a^b x^m\,dx$ কে যোগফলের সীমারূপে লিখ। [Write $\int_a^b x^m\,dx$ as the limit of sum.]

Ans : $\int_a^b x^m\,dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{m}(a+rh)^m$ যেখানে $nh = b-a$.

18.3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$ কে নির্দিষ্ট ইন্টিগ্র্যালরূপে লিখ। [Write $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$ as the definite integral.]

Ans : $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$

18.4. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$ এর মান কত? [What is the value of $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$.]

Ans : $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

EXERCISE-18

যোগফলের সীমারূপে মান নির্ণয় কর।

1. $\int_a^b \cos x\,dx$ **[DUH-61, 83]**
2. $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$
3. $\int_a^b \cos^2 x\,dx$
4. $\int_a^b x^2\,dx$ **[DUH-1965]**
5. $\int_0^a \sin nx\,dx$
6. $\int_a^b e^{-x}\,dx$
7. $\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx$
8. $\int_0^1 (ax+b)dx$
9. $\int_2^3 x^3\,dx$ **[DUH-1965]**
10. $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ **[RUH-1982, 1990]**

নির্দিষ্ট ইন্টিগ্র্যালে প্রকাশ করে মান নির্ণয় কর।

11. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n+2m}+\cdots+\frac{1}{n+nm}\right]$ **[DUH-85, CUH-81]**
12. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{na}+\frac{1}{na+1}+\cdots+\frac{1}{nb}\right]$
13. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$ **[RUH-1987]**
14. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right]$ **[RUH-1986]**
15. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4)^3}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+8)^3}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\{n+4(n-1)\}^3}}\right]$ **[CUH-1969]**
16. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1^2+3n^2}+\frac{2}{2^2+3n^2}+\frac{3}{3^2+3n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+3n^2}\right]$ **[DUH-1953]**

17. $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{1/3}\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^{1/n}\right]$

[NUH(NM)-2004, DUH-1983]

18. $\lim_{n\to\infty}\left[\left(2+\frac{1}{n^2}\right)^{1/n^2}\left(2+\frac{2^2}{n^2}\right)^{2/n^2}\cdots\left(2+\frac{n^2}{n^2}\right)^{n/n^2}\right]$

[DUH-1989, RUH-1993]

19. $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{1/n}$ [DUH-2002]

20. যদি f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হয়, তবে $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$ কে নির্দিষ্ট ইন্টিগ্র্যালের প্রকাশ কর এবং ইহার সাহায্যে

$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}\right]$ এর মান নির্ণয় কর।

[DUH-1979, 1990]

ANSWER-18

1. $\sin b - \sin a$ 2. 1
3. $\frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{4}(\sin 2b - \sin 2a)$
4. $\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$ 5. $\frac{1-\cos na}{n}$ 6. $e^{-a}-e^{-b}$
7. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ 8. $\frac{a}{2}+b$ 9. $\frac{65}{4}$
10. $\frac{2}{3}$ 11. $\frac{ln(1+m)}{m}$ 12. $ln\frac{b}{a}$
13. $\frac{\pi}{2}$ 14. $\frac{\pi}{4}$ 15. $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$
16. $\frac{1}{2}ln\left(\frac{4}{3}\right)$ 17. $e^{\frac{\pi^2}{12}}$ 18. $\sqrt{\left(\frac{27}{4e}\right)}$
19. $\frac{4}{e}$ 20. $\int_0^1 f(x)\,dx;\ \frac{2}{3}$.

Chapter-19
গামা এবং বিটা ফাংশন
GAMMA AND BETA FUNCTION

19.1. গামা ফাংশন বা সেকেন্ড অয়লারিয়ান (Gamma Function or Second Eulerian) ঃ অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ $(n>0)$ কে গামা ফাংশন বা সেকেন্ড অয়লারিয়ান বলে। ইহাকে $\Gamma(n)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়, অর্থাৎ

$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ ..... (1) [NUH-03, 07, 08, NUH(NM)-02, 03, 06, 07, 09, BSc(Pass)-06, DUH-80, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 03, 06, 07, DUS-86, DUHT-81, 82, 85, RUH-89, 95, CUH-84, 85, 86, BITK-94, 95]

বিঃদ্রঃ ঃ (i) $\Gamma(n)$ একটি এক চলকের ফাংশন অর্থাৎ ইহা চলক n এর ফাংশন।

(ii) $\Gamma(n)$ ফাংশনটি $n>0$ এর জন্য অভিসারী এবং $n<0$ এর জন্য অপসারী।

(iii) (1) এ x হইল ডামি (dummy) চলক অর্থাৎ (1) এ x চলকের স্থলে যে কোন চলক গ্রহণযোগ্য।

উদাহরণ-1. দেখাও যে $\int_0^\infty e^{-y^{1/n}}\,dy=\Gamma(n+1)$. [BITK-1995]

সমাধান ঃ ধরি $y^{1/n}=x$. তাহা হইলে $y=x^n$

$\therefore dy=nx^{n-1}$ এবং লিমিট $x=\begin{cases}\infty & \text{যখন } y=\infty\\ 0 & \text{যখন } y=0\end{cases}$

সুতরাং $\int_0^\infty e^{-y^{1/n}}\,dy=n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx=n\Gamma(n)=\Gamma(n+1)$. [প্রমাণিত]

উপপাদ্য-1. দেখাও যে $\Gamma(1)=1$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ ..... (1)

এখন $n=1$ হইলে $(1)\Rightarrow\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=-e^{-\infty}+e^0=0+1$

$\Rightarrow\Gamma(1)=1$. [প্রমাণিত]

19.2. গামা ফাংশনের আবর্ত ফর্মূলা (Recursion Formula for Gamma Function) ঃ

উপপাদ্য-2. দেখাও যে $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$. [NUH(NM)-07, DUH-86]

প্রমাণ ঃ আমরা জানি $\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ ..... (1)

এখন (1) এ n এর পরিবর্তে n + 1 বসাইয়া পাই

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = \left[-e^{-x}x^n\right]_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} \, dx \quad \ldots\ldots (2)$$

কিন্তু $x = 0$ শর্তে $e^{-x} x^n = 0$ এবং $x = \infty$ শর্তে

অর্থাৎ $\lim_{x\to\infty} e^{-x} x^n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r-n}}{r!}} = \frac{1}{\infty} = 0$

সুতরাং (2) $\Rightarrow \Gamma(n+1) = n\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} \, dx = n\Gamma(n)$.

নোট ঃ n এর পরিবর্তে n – 1 বসাইয়া পাই, $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ (i) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ ..... (3) কে গামা ফাংশনের আবর্ত ফ বলে। (3) সূত্রটি হইতে $\forall n > 0$ এর জন্য $\Gamma(n)$ নির্ণয় করা যাইবে।

(ii) আবার (3) হইতে আমরা পাই $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$. এই সূত্রটি হইতে $\forall n<0$ এ জন্য $\Gamma(n)$ নির্ণয় করা যাইবে।

19.3. ফ্যাক্টরিয়াল ফাংশন (Factorial Function) ঃ

উপপাদ্য–3. দেখাও যে $\Gamma(n+1) = n!$. যেখানে $n \in \mathbf{N}$.

[DUH–1989, CUH–198

প্রমাণ ঃ আমরা জানি $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ ..... (1)

এখন (1) এ n এর পরিবর্তে $n-1, n-2, \cdots, 4, 3, 2, 1$ ক্রমানুসারে বসাইয়া আমরা পাই $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$

$\Gamma(n-1) = (n-2)\,\Gamma(n-2)$

... ...

$\Gamma(4) = 3\Gamma(3)$

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2)$

$\Gamma(2) = 1\Gamma(1)$

সুতরাং ইহাদের সাহায্যে (1) $\Rightarrow \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

$= n(n-1)\,\Gamma(n-1)$

$= n(n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2)$

... ...

$= n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1\,\Gamma(1)$

$= n!$. $[\because \Gamma(1) = 1]$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ $\Gamma(n+1) = n!$ কে অনেক সময় ফ্যাক্টরিয়া ফাংশন হিসাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

19.4. গামা ফাংশন সম্পর্কিত কিছু উপপাদ্য ও উদাহরণ (Some theorems and examples related Gamma function) :

উপপাদ্য–4. দেখাও যে $\frac{\Gamma(n)}{k^n} = \int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1} \, dx$ যেখানে $n, k > 0$.

প্রমাণ ঃ আমরা জানি $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} \, dy$ ..... (1)

ধরি $y = kx$ যেখানে k একটি যোগবোধক ধ্রুবক। তাহা হইলে $dy = k\,dx$

এবং লিমিট $y = \begin{cases} \infty & \text{যখন } x = \infty \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

সুতরাং (1) $\Rightarrow \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-kx} (kx)^{n-1} k \, dx \quad \therefore \frac{\Gamma(n)}{k^n} = \int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1} \, dx$

যেখানে $n > 0$ এবং k একটি যোগক ধ্রুবক। [প্রমাণিত]

উদাহরণ–2. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{e^{-5x}}{\sqrt{x}} \, dx = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{5}}$. **[NUS–1997]**

সমাধান ঃ $\int_0^\infty \frac{e^{-5x}}{\sqrt{x}} \, dx = \int_0^\infty e^{-5x} x^{-1/2} \, dx = \int_0^\infty e^{-5x} x^{1/2-1} \, dx = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{5}}$.

[প্রমাণিত]

উদাহরণ–3. যদি $m, n, a > 0$ হয় তবে দেখাও যে

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n} \, dx = \frac{1}{n a^{(m+1)/n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

সমাধান ঃ ধরি $x^n = z$. তাহা হইলে $x = z^{1/n}$, $dx = \frac{1}{n} z^{1/n-1} \, dz$ এবং

লিমিট $z = \begin{cases} \infty & \text{যখন } x = \infty \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

সুতরাং $\int_0^\infty x^m e^{-ax^n} \, dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty z^{m/n} \, e^{-az} z^{1/n-1} \, dz$

$= \frac{1}{n}\int_0^\infty z^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-az} \, dz = \frac{1}{n a^{(m+n)/n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–4. দেখাও যে $\int_0^1 x^m \left(\ln\frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}$ **[NUH–2008]**

সমাধান ঃ $\int_0^1 x^m \left(\ln\frac{1}{x}\right)^n dx$

$= \int_\infty^0 (e^{-z})^m z^n (-e^{-z} \, dz)$

$= \int_0^\infty e^{-(m+1)z} z^{(n+1)-1} \, dz$

$= \frac{\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}$ (প্রমাণিত)

ধরি $\ln\frac{1}{x} = z$

$\Rightarrow x = e^{-z}$

$\therefore dx = -e^{-z} \, dz$

লিমিট $z = \begin{cases} \infty \text{ যখন } x = 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 1 \end{cases}$

উদাহরণ–5. দেখাও যে $\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}$ [NUH(NM)-9

সমাধান ঃ ধরি $\ln x = -z \Rightarrow x = e^{-z}$

$\therefore dx = -e^{-z} dz$, লিমিট $z = \begin{cases} \infty \text{ যখন } x = 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 1 \end{cases}$

$$\therefore \int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = \int_0^\infty (e^{-z})^m (-z)^n e^{-z} \, dz$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty e^{-(m+1)z} z^{(n+1)-1} \, dz$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}$$

উপপাদ্য–5. দেখাও যে $\Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-1} \, dx$. যেখানে $n > 0$.

[KUET-1

প্রমান ঃ আমরা জানি $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} \, dy$ ..... (1). যেখানে $n > 0$

ধরি $y = x^2$. তাহা হইলে $dy = 2x \, dx$ এবং লিমিট $y = \begin{cases} \infty & \text{যখন } x = \infty \text{ অপসারী।} \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

সুতরাং (1) $\Rightarrow \Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} (x^2)^{n-1} x \, dx$

$$= 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-1} \, dx \text{ যেখানে } n > 0.$$

উদাহরণ–6. দেখাও যে $\int_0^1 \left(\frac{x}{\ln x}\right)^{1/3} dx = (-1)^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{(4/3)^{2/3}}$.

[NUS–1997, DUH-1

সমাধান ঃ ধরি $x = e^{-z}$.

তাহা হইলে $dx = -e^{-z} dz$ এবং লিমিট $z = \begin{cases} 0 & \text{যখন } x = 1 \\ \infty & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

সুতরাং $\int_0^1 \left(\frac{x}{\ln x}\right)^{1/3} dx = -\int_\infty^0 \left(\frac{e^{-z}}{-z}\right)^{1/3} e^{-z} \, dz$

$$= (-1)^{1/3} \int_0^\infty e^{-4/3z} z^{2/3-1} \, dz$$

$$= (-1)^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{(4/3)^{2/3}}. \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

উদাহরণ–7. দেখাও যে

$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(ax^2+by^2)} x^{2m-1} y^{2n-1} \, dx \, dy = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{4a^m b^n}$ যেখানে a, b, m, n > 0.

সমাধান ঃ $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(ax^2+by^2)} x^{2m-1} y^{2n-1} \, dx \, dy$

$$= \int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2m-1} dx. \int_0^\infty e^{-by^2} y^{2n-1} \, dy$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2a^m 2b^n} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{4a^m b^n} \text{ যেখানে m, n, a, b} > 0. \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

19.5. বিটা ফাংশন বা ফার্স্ট অয়লারিয়ান (Beta Function or First Eulerian) ঃ

[NUH–03, 07, 08, 09, NUH(NM)–02, 03, 06, 07, BSc(Pass)–06, DUH–864, 80, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 03, 06, DUHT–81, 82, 85, RUH–89, 95, CUH–84, 85, 86KUET–94, 95]

সংজ্ঞা ঃ ইন্টিগ্রাল $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} \, dx$ কে বিটা ফাংশন বা ফার্স্ট অয়লারিয়ান বলে। ইহাকে $\beta(m, n)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়, অর্থাৎ

$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} \, dx$ ..... (1) যেখানে m, n > 0.

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ (i) $\beta(m, n)$ একটি দুই চলকের ফাংশন অর্থাৎ ইহা চলক m এবং n এর ফাংশন।

(ii) $\beta(m, n)$ ফাংশনটি m, n > 0 এর জন্য অভিসারী এবং m, n < 0 এর জন্য অপসারী।

(iii) (1) এ x হইল ডামি চলক।

উপপাদ্য–6. দেখাও যে $\beta(m, n) = \beta(n, m)$. **[DUH–66, 83, DUHT–82]**

প্রমাণ ঃ $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} \, dx$ ..... (1)

(পদ্ধতি–1) ঃ ধরি $y = 1 - x$. তাহা হইলে $x = 1 - y$, $dx = -dy$ এবং

লিমিট $y = \begin{cases} 0 & \text{যখন } x = 1 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

$$\beta(m, n) = -\int_1^0 (1-y)^{m-1} y^{n-1} \, dy = \int_0^1 y^{n-1} (1-y)^{m-1} \, dy = \beta(n, m)$$

(পদ্ধতি–2) ঃ $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$

$$= \int_0^1 (1-x)^{m-1} (1-1+x)^{n-1} \, dx \qquad \left[\therefore \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$$

$$= \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} \, dx = \beta(n, m). \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

বিটা ফাংশনের প্রতিসাম্য উপপাদ্য ঃ উপরের উপপাদ্যটি বিটা ফাংশনের প্রতি
উপপাদ্য হিসাবে পরিচিত। অর্থাৎ বিটা ফাংশন প্রতিসাম্যিক (Symmetric).

উপপাদ্য–7. দেখাও যে

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy \text{ যেখানে } m, n > 0.$$

[DUH–1989, DUMScF–1990, 19

প্রমাণ ঃ $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ ..... (1)

ধরি $x = \frac{1}{1+y}$. তাহা হইলে $1 + y = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x} - 1 \quad \therefore dy = -\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{dy}{(1+y)^2}$ এবং লিমিট $y = \begin{cases} 0 & \text{যখন } x = \\ \infty & \text{যখন } x = \end{cases}$

সুতরাং (1) $\Rightarrow -\int_\infty^0 \left(\frac{1}{1+y}\right)^{m-1}\left(1-\frac{1}{1+y}\right)^{n-1}\frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}$

আবার যেহেতু $\beta(m, n) = \beta(n, m)$

সুতরাং $\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$

যেখানে $m, n > 0$. [প্রমাণিত]

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ (1) এ $x = \frac{y}{1+y}$ বসাইলেও একই ফলাফল পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ–8. যদি $m, n > 0$ হয় তবে দেখাও যে

$$\beta(m, n) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx.$$

সমাধান ঃ R. H. S. $= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$

$= \frac{1}{2}\beta(m, n) + \frac{1}{2}\beta(m, n) = \beta(m, n) = \text{R. H. S.}$

উদাহরণ–9. দেখাও যে

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{1}{2n}\beta\left(\frac{n+1}{2n}, \frac{n-1}{2n}\right) \text{ যেখানে } n \in \mathbf{N}.$$

সমাধান ঃ ধরি $z = x^{2n}$. তাহা হইলে $x = z^{1/2n}, dx = \frac{1}{2n}z^{1/2n-1}\,dz$ এবং

লিমিট $z = \begin{cases} \infty & \text{যখন } x = \infty \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$.

সুতরাং $\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{z^{1/2}}{1+z}z^{1/2n-1} = \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{z^{\frac{n+1}{2n}-1}}{1+z}\,dz$

$= \frac{1}{2n}\beta\left(\frac{n+1}{2n}, 1-\frac{n+1}{2n}\right)$

$= \frac{1}{2n}\beta\left(\frac{n+1}{2n}, \frac{n-1}{2n}\right)$ $(n \in \mathbf{N})$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–10. দেখাও যে $\beta(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$ $(m, n > 0)$.

সমাধান ঃ আমরা জানি $\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$

$= \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy + \int_1^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy = I_1 + I_2$ ..... (1) যেখানে

$I_1 = \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$ এবং $I_2 = \int_1^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$

এখানে $I_1 = \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$ [$\because$ y ডামি চলক]

এখন I_2 এ ধরি $y = \frac{1}{x}$. তাহা হইলে $dy = -\frac{1}{x^2}\,dx$ এবং

লিমিট $y = \begin{cases} 0 & \text{যখন } x = \infty \\ 1 & \text{যখন } x = 1 \end{cases}$

সুতরাং $I_2 = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$

তাহ হইলে (1) $\Rightarrow \beta(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$ যেখানে $m, n > 0$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–11. দেখাও যে $\frac{\beta(m, n)}{2a^m b^n} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n}}\,d\theta$

যেখানে $m, n > 0$.

প্রমাণ ঃ আমরা জানি $\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$ ..... (1)

ধরি $x = \frac{a}{b}\tan^2\theta$. তাহা হইলে

$dx = \frac{2a}{b}\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$ এবং লিমিট $\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{যখন } x = \infty \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

সুতরাং (1) $\Rightarrow \beta(m, n) = \int_0^{\pi/2} \frac{\left(\frac{a}{b}\tan^2\theta\right)^{m-1}}{\left(1+\frac{a}{b}\tan^2\theta\right)^{m+n}} \frac{2a}{b}\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$

$= 2a^m b^n \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n}} d\theta$

$\Rightarrow \frac{\beta(m, n)}{2a^m b^n} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n}} d\theta$

যেখানে $m, n > 0$. [প্রমাণিত]

19.6. বিটা এবং গামা ফাংশনের সম্পর্ক (Relation between Beta and Gamma Functions) ঃ

উপপাদ্য–8. দেখাও যে $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$. **[NUH–03, 04, 09, NUH(NM)–03, 06, 07, 10, BSc(Pass)–06, 08, 10, DUH–75, 76, 92, 03, 05, DUH–73, 75, 80, 82, 84, 85, 88, 90, 91, DUS–86, DUHT–80, 81, DMScF–91, CUH–76, 82, RUH–85, 89, 95, BITK–94, 95]**

প্রমাণ ঃ আমরা জানি $\Gamma(m) = \int_0^\infty e^{-x} x^{m-1} dx$ ..... (1)

ধরি $x = \lambda y$ $\therefore dx = \lambda dy$, লিমিট $y = \begin{cases} \infty \text{ যখন } x = \infty \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$

$(1) \Rightarrow \Gamma(m) = \int_0^\infty e^{-\lambda y}(\lambda y)^{m-1}\lambda\, dy = \int_0^\infty e^{-\lambda y}\lambda^{m-1} y^{m-1}\lambda\, dy$

$\therefore \Gamma(m) = \int_0^\infty e^{-\lambda y}\lambda^m y^{m-1} dy$ ..... (2)

আবার $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{n-1} d\lambda$ ..... (3)

(2) ও (3) গুণ করিয়া পাই, $\Gamma(m)\,\Gamma(n) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda(y+1)}\lambda^{m+n+1} y^{m-1} d\lambda\, dy$

$= \int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-\lambda(y+1)}\lambda^{m+n-1} d\lambda\right] y^{m-1} dy = \int_0^\infty \frac{\Gamma(m+n)}{(y+1)^{m+n}} \cdot y^{m-1} dy$

$= \Gamma(m+n)\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(y+1)^{m+n}} dy = \Gamma(m+n)\cdot\beta(m, n)$

$\therefore \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ–12. দেখাও যে $\beta(p+1, q) + \beta(p, q+1) = \beta(p, q)$. **[DUH–1986]**

সমাধান ঃ L. H. S. $= \beta(p+1, q) + \beta(p, q+1)$

$= \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} + \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{p\Gamma(p)\,\Gamma(q) + \Gamma(p)\,q\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$

$= \frac{(p+q)\,\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{(p+q)\,\Gamma(p+q)} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \beta(p, q) = \text{R. H. S.}$

উদাহরণ–13. দেখাও যে ঃ $\frac{\beta(p, q+1)}{q} = \frac{\beta(p+1, q)}{p} = \frac{\beta(p, q)}{p+q}$. **[NUH(NM)–08]**

সমাধান ঃ L. P. $= \frac{\beta(p, q+1)}{q} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)q}$

$= \frac{\Gamma(p)\,q\Gamma(q)}{(p+q)\,\Gamma(p+q)q} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{(p+q)\,\Gamma(p+q)} = \frac{\beta(p, q)}{p+q}$

M. P. $= \frac{\beta(p+1, q)}{p} = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)p} = \frac{p\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{(p+q)\,\Gamma(p+q)p}$

$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{(p+q)\,\Gamma(p+q)} = \frac{\beta(p, q)}{p+q}$ সুতরাং L. P. = M. P. = R. P.

উপপাদ্য–9. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta\cos^q\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$.

[NUH–96, 07, 09, NUH(NM)–02, 05, 07, 08, 10, BSc(Pass)–07, DUH–85, 89, 91, RUH–79, 89, BITK–88, 93]

সমাধান ঃ আমরা জানি $\beta(m, n)$

$= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$

$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-2}\theta \cdot \cos^{2n-2}\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta$ ..... (1)

ধরি $x = \sin^2\theta$

$\therefore dx = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

x	0	1
θ	0	π/2

ধরি $2m-1 = p$ এবং $2n-1 = q \Rightarrow m = \frac{p+1}{2}$, $n = \frac{q+1}{2}$

$(1) \Rightarrow \beta\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta\cos^q\theta\, d\theta$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^p\theta\cos^q\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\cdot\beta\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$

আবার আমরা জানি, $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta\, d\theta$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\frac{q+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য–10. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^p\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{p+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}$$ যেখানে $p > -1$. [DUH-1984]

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$ ..... (1)

এখন (1) এ $q = 0$ বসাইয়া পাই $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta\, dq = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ..... (2)

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^p\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) d\theta = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{p+1}{2}\right)$$

$\left[\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f[a-x]dx \text{ এবং } \beta(m, n) = \beta(n, m)\right]$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^q\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{p+1}{2}\right) \text{ ..... (3)}$$

আবার $\frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{p+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}$ ..... (4) [উপপাদ্য-8]

এখন (2), (3) এবং (4) হইতে পাই

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^p\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{p+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}$$ যেখানে $p > -1$. [প্রমাণিত]

উপপাদ্য–11. দেখাও যে $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. **[NUH-07, 10, NUH(NM)–02, 07, DUH–80, 83, 91, 03, CUH–86, QUET–94, 96]**

প্রমাণ ঃ আমরা জানি $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$

$$\therefore \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1/2)^2 - (x-1/2)^2}} = \left[\sin^{-1}\frac{x-(1/2)}{1/2}\right]_0^1$$

$$= \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ ..... (1)}$$

আবার, $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2+1/2)} = \pi \Rightarrow \{\Gamma(1/2)\}^2 = \pi \quad [\because \Gamma(1) = 1]$$

$\therefore \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ–14. মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ (ii) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ (iii) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ (iv) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ (v) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

(i) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \left[\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right]$

(ii) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

(iii) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{15\pi}{8}$

আবার $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$

(iv) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-1/2} = \left(-\frac{2}{1}\right)\sqrt{\pi} = -2\sqrt{\pi}$

(v) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-3/2} = \left(-\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\sqrt{\pi} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$

উদাহরণ–15. মান নির্ণয় কর ঃ (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\, dx$

সমাধান ঃ (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5+2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{8}{15}.$$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{6+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{6+2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(4)}$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{5\pi}{32}.$$

উদাহরণ–16. দেখাও যে $\int_0^{\pi} x \cos^4 x\, dx = \frac{3\pi^2}{16}$.

সমাধান ঃ $I = \int_0^{\pi} x \cos^4 x\, dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos^4(\pi - x) dx$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos^4 x\, dx = \pi \int_0^{\pi} \cos^4 x\, dx - \int_0^{\pi} x \cos^4 x\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx - I$$

$$\Rightarrow 2I = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx = 2\pi \frac{\Gamma(5/2)\,\Gamma(1/2)}{2\Gamma(6/2)} = 2\pi \frac{3/2.\ 1/2.\ \sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{\pi}}{2.2.1}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3\pi^2}{16}. \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

উদাহরণ–17. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\, d\theta \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} d\theta = \pi$.

সমাধান ঃ L. H. S. $= \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{1/2} d\theta \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{-1/2} d\theta$

$$= \frac{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/2)}{2\Gamma(5/4)} \cdot \frac{\Gamma(1/4)\,\Gamma(1/2)}{2\Gamma(3/4)}$$

$$= \frac{\{\Gamma(1/2)\}^2\,\Gamma(1/4)}{4\Gamma(5/4)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}^2\,\Gamma(1/4)}{4.\ 1/4\,\Gamma(1/4)} = \pi = \text{R.H.S.}$$

উদাহরণ–18. দেখাও যে

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta \cos^4\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos^5\theta\, d\theta = \frac{8}{315}$$

[DUH–1972, 1987, RUH–1965]

সমাধান ঃ এখানে $\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta \cos^4\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right)}{2\Gamma(5+4+2/2)}$

$$= \frac{\Gamma(3)\,\Gamma(5/2)}{2\Gamma(11/2)} = \frac{2.1.\ 3/2.\ 1/2.\ \Gamma(1/2)}{2.9/2.\ 7/2.\ 5/2.\ 3/2.\ 1/2.\ \Gamma(1/2)} = \frac{8}{315}$$

আবার $\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta \cos^4\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^5\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos^4\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^5\theta \sin^4\theta\, d\theta$$

সুতরাং $\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta \cos^4\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos^5\theta = \frac{8}{315}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–19. দেখাও যে $\int_0^{\pi/6} \cos^4 3\theta \sin^2 6\theta\, d\theta = \frac{5\pi}{192}$. **[DUH–1960]**

সমাধান ঃ ধরি $z = 3\theta$. তাহা হইলে $dz = 3d\theta$ এবং

লিমিট $z = \begin{cases} \pi/2 & \text{যখন } \theta = \pi/6 \\ 0 & \text{যখন } \theta = 0 \end{cases}$

সুতরাং $\int_0^{\pi/6} \cos^4 3\theta \sin^2 6\theta\, d\theta$

$$= \int_0^{\pi/6} \cos^4 3\theta (2 \sin 3\theta \cos 3\theta)^2\, d\theta = 4 \int_0^{\pi/6} \sin^2 3\theta \cos^6 3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 z \cos^6 z\, dz = \frac{4}{3} \frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma(7/2)}{2\Gamma\left(\frac{2+6+2}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1/2\sqrt{\pi}\,.\,5/2.\ 3.2.\ 1/2\sqrt{\pi}}{4.3.2.1} = \frac{5\pi}{192}. \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

উদাহরণ–20. $\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2}\theta \cos^3\theta\, d\theta$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–02]**

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2}\theta \cos^3\theta\, d\theta$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma(2)}{2\,\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot 1}{2 \cdot \frac{9}{4}\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\frac{9}{2} \cdot \frac{5}{4}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{8}{45}.$$

উদাহরণ–21. দেখাও যে $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

[DUH–75, 88, 89, RUH–85, 87, 91, 95, BITK–98]

সমাধান ঃ আমরা জানি $\Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-1}\,dx$ ..... (1)

এখন $n = \frac{1}{2}$ হইলে (1) $\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \quad \left[\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

উদাহরণ–22. দেখাও যে $\int_0^1 x^6(1-x^2)^{1/2}\,dx = \frac{5\pi}{256}$.

[DUH–1981, CUH–1985]

সমাধান ঃ ধরি $z = x^2$. তাহা হইলে $x = z^{1/2}$, $dx = \frac{1}{2}z^{-1/2}\,dz$ এবং

$$\text{লিমিট } z = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x = 1 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

সুতরাং $\int_0^1 x^6(1-x^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 z^3(1-z)^{1/2} z^{-1/2}\,dz$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 z^{5/2}(1-z)^{1/2}\,dz = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(7/2)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/2+3/2)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(7/2)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{2}\frac{5/2.\,3/2.\,1/2\sqrt{\pi}.\,1/2\sqrt{\pi}}{4.3.2.1} = \frac{5\pi}{256} \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

উদাহরণ–23. দেখাও যে $\int_0^1 x^3(1-x)^4\,dx$ **[NUH(NM)–2007]**

সমাধান ঃ $\int_0^1 x^3(1-x)^4\,dx = \int_0^1 x^{4-1}(1-x)^{5-1}\,dx$

$$= \beta(4, 5) = \frac{\Gamma(4)\,\Gamma(5)}{\Gamma(9)} = \frac{3.2}{8.7.6.5} = \frac{1}{280}.$$

উদাহরণ–24. দেখাও যে $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\Gamma(1/n)\sqrt{\pi}}{n\Gamma(1/n+1/2)}$.

[DUH–1988, RUH–1980, 1986, 1989]

সমাধান ঃ ধরি $x^n = \sin^2\theta$.

তাহা হইলে $x = (\sin\theta)^{2/n}$, $dx = \frac{2}{n}(\sin\theta)^{2/n-1}\cos\theta\,d\theta$ এবং

$$\text{লিমিট } \theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{যখন } x = 1 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

সুতরাং $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin\theta)^{2/n-1}\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta$

$$= \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2/n-1}\,d\theta = \frac{2}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{2/n-1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{2/n-1+2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(1/n)\sqrt{\pi}}{n\Gamma(1/n+1/2)}. \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

উদাহরণ–25. $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{1/n}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH–2004]**

সমাধান ঃ $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{1/n}}$

ধরি $x^n = z$

$\therefore x = z^{1/n}$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}\,dz$

x	0	1
z	0	1

$$= \int_0^1 \frac{\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}\,dz}{(1-z)^{1/n}}$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 z^{\frac{1}{n}-1}(1-z)^{\left(1-\frac{1}{n}\right)-1}\,dz$$

$$= \frac{1}{n}\beta\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

উদাহরণ–26. দেখাও যে

$$\int_0^\pi \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} & \text{যখন } n \text{ জোড়} \\ 0 & \text{যখন } n \text{ বেজোড়} \end{cases}$$ **[CUH–81, 82]**

সমাধান ঃ আমরা জানি

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx & \text{যখন } f(2a-x) = f(x) \\ 0 & \text{যখন } f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$$

ধরি $f(x) = \cos^n x$. তাহা হইলে $f(\pi - x) = \{\cos(\pi - x)\}^n = (-\cos x)^n$

$$= \begin{cases} \cos^n x = f(x) & \text{যখন } n \text{ জোড়} \\ -\cos^n x = -f(x) & \text{যখন } n \text{ বেজোড়} \end{cases}$$

সুতরাং $\int_0^\pi \cos^n x\,dx = \begin{cases} 2\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx & \text{যখন } n \text{ জোড়} \\ 0 & \text{যখন } n \text{ বেজোড়} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\dfrac{n+2}{2}\right)} & \text{যখন } n \text{ জোড়} \\ 0 & \text{যখন } n \text{ বেজোড়} \end{cases}$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ–27. দেখাও যে ঃ $2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1.3.5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}$ যেখানে $n \in$

সমাধান ঃ $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}-1\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-1\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-$

$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}-1\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}-4\right)$$

$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)$$

... ...

$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad [n \text{ টৈপ}$$

$$= \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)\cdots 3.1.\sqrt{\pi}$$

$\Rightarrow 2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1.3.5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}$ যেখানে $n \in \mathbf{N}$. [প্রমা

19.7. লেজেন্ডারের ডুপ্লিকেশন ফর্মূলা (Legendre Duplicatio Formula) ঃ

উপপাদ্য–12. দেখাও যে $2^{2m-1}\,\Gamma(m)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \Gamma(2m)\sqrt{\pi}$ $(m>0)$

[NUH–2002, DUMScF–1987, 1988, 1992, RUH-198

প্রমাণ ঃ প্রমাণ কর যে, $2^{2m-1}\,\Gamma(m)\,\Gamma(m+1/2) = \Gamma(2m)\sqrt{\pi}$, $m>0$

বামপক্ষ $= 2^{2m-1}\,\Gamma(m)\,\Gamma(m+1/2) = 2^{2m-1}\cdot\Gamma(m)\cdot\Gamma\left(\dfrac{2m+1}{2}\right)$

$$= 2^{2m-1}\,\Gamma(m)\cdot\frac{2m-1}{2}\cdot\frac{2m-3}{2}\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$= 2^{2m-1}\cdot\Gamma(m)\cdot(2m-1)(2m-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}$$

$$= 2^{2m-1}\cdot\Gamma(m)\cdot\frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)\cdots 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\sqrt{\pi}}{(2m-2)(2m-4)\cdots 4\cdot 2}$$

$$= 2^{2m-1}\cdot\Gamma(m)\cdot\frac{\Gamma(2m)}{2^{m-1}\cdot(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(2m)\sqrt{\pi}}{\Gamma(m)} = \Gamma(2m)\sqrt{\pi} = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

উদাহরণ–28. দেখাও যে, $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\Gamma(2n+1)\sqrt{\pi}}{2^{2n}\,\Gamma(n+1)}$. **[NUH–2002]**

সমাধান ঃ ডুপ্লিকেশন ফর্মূলা হতে জানি,

$$2^{2n-1}\,\Gamma(n)\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma(2n)\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(2n)\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}\,\Gamma(n)}$$

$$= \frac{2n\,\Gamma(2n)\sqrt{\pi}}{2^{2n}\cdot n\,\Gamma n}$$

$$= \frac{\Gamma(2n+1)\sqrt{\pi}}{2^{2n}\,\Gamma(n+1)} \quad [\because n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)]$$

উপপাদ্য–13. দেখাও যে $\beta(n, 1-n) = \Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$ যেখানে $0<n<1$. **[NUH–04, DUH–73, 75, 86, 87, 88, 89, DUS–86, CUH–86, DUHT–87, 88, 89, DUMscF–88, 92]**

প্রমাণ ঃ আমরা জানি $\beta(m, n) = \dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^\infty \dfrac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$ ..... (1)

যেখানে $m, n > 0$

ধরি $m + n = 1$. তাহা হইলে $m = 1 - n$.

সুতরাং (1) $\Rightarrow \beta(1-n, n) = \dfrac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(n)}{\Gamma(1)} = \int_0^\infty \dfrac{x^{n-1}}{1+x}\,dx$

$$\Rightarrow \beta(n, 1-n) = \Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx \quad \ldots\ldots (2)$$

কিন্তু $\int_0^\infty \dfrac{x^{n-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{1+x}\,dx + \int_1^\infty \dfrac{x^{n-1}}{1+x}\,dx$ ..... (3)

এখন (3) এর ডানপক্ষের দ্বিতীয় ইন্টিগ্রালে ধরি $x = \dfrac{1}{y}$. তাহা হইলে

$dx = -\dfrac{1}{y^2}\,dy$ এবং লিমিট $y = \begin{cases} 0 & \text{যখন } x = \infty \\ 1 & \text{যখন } x = 1 \end{cases}$

তাহা হইলে $\int_1^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}dx = -\int_1^0 \frac{(1/y)^{n-1}}{1+1/y}\frac{1}{y^2}dy = \int_0^1 \frac{y^{-n}}{1+y}dy = \int_0^1 \frac{x^{-n}}{1+x}$

সুতরাং (3) $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^{-n}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}+x^{-n}}{1+x}$

এখন (2) $\Rightarrow \Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \int_0^1 \frac{x^{n-1}+x^{-n}}{1+x}dx$

$$= \int_0^1 (x^{n-1}+x^{-n})(1+x)^{-1}dx = \int_0^1 (x^{n-1}+x^{-n})\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r x^r dx$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \int_0^1 (x^{n+r-1}+x^{-n+r})dx = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \left[\frac{x^{n+r}}{n+r}+\frac{x^{-n+r+1}}{-n+r+1}\right]_0^1$$

$$= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\left(\frac{1}{n+r}+\frac{1}{-n+r+1}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(\frac{1}{n+r}-\frac{1}{n-r-1}\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{n+r} - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{n-r-1} = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots\right)$$

$$-\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-4}+\cdots\right) \quad \text{.....(4)}$$

ত্রিকোণমিতি হইতে আমরা জানি, $\operatorname{cosec}\theta = \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta+\pi}+\frac{1}{\theta+2\pi}-\frac{1}{\theta+3\pi}+\cdots\right)$

$$-\left(\frac{1}{\theta-\pi}-\frac{1}{\theta-2\pi}+\frac{1}{\theta-3\pi}-\frac{1}{\theta-4\pi}+\cdots\right)$$

$\theta = n\pi$, $0 < n < 1$ বসিয়ে পাই,

$$\operatorname{cosec} n\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-4}+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow \pi\operatorname{cosec} n\pi = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots\right)$$

$$-\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-4}+\cdots\right) \quad \text{.....(5)}$$

(4) ও (5) হইতে পাই, $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \pi\operatorname{cosec} n\pi = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ–29. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

[NUH–1997, NUH(NM)–07, DUH–1984, RUH–1988, 19

সমাধান ঃ L. H. S. $= \int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{1/2}(\cos\theta)^{-1/2}d\theta$

$$= \frac{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)}{2\Gamma\left(\frac{1/2-1/2+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)}{2\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2.1.\sin\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{2.1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \text{R. H. S.}$$

উদাহরণ–30. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)}{\sqrt{\sin 2\theta}}d\theta = \pi\sqrt{2}$

সমাধান ঃ L. H. S. $= \int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta + \int_0^{\pi/2}\sqrt{\cot}\,d\theta$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta \quad \left[\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$$

$$\left[\because \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/4)}\right]$$

$$= 2.\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2} = \text{R. H. S.}$$

উদাহরণ–31. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2}\tan^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}$.

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2}\tan^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\cos^{-n}x\,dx$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n-n+2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{n+1}{2}\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}. \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

উদাহরণ–32. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^6}dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

সমাধান ঃ ধরি $x^6 = z$. তাহা হইলে $x = z^{1/6}$, $dx = \frac{1}{6}z^{-5/6}dz$ এবং

লিমিট $z = \begin{cases}\infty & \text{যখন } x = \infty \\ 0 & \text{যখন } x = 0\end{cases}$

সুতরাং $\int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^6}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{z^{1/2}}{1+z} z^{-5/6}\,dz = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{z^{2/3-1}}{1+z}\,dz$

$= \frac{1}{6}\beta\left(\frac{2}{3}, 1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}\beta\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\frac{\Gamma(2/3)\,\Gamma(1/3)}{\Gamma(3/3)} = \frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{6}\frac{\pi}{\sin \pi/3} = \frac{1}{6}\frac{\pi}{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ-33. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n \sin \frac{2m+1}{2n}\pi}$.

[RUH-1989]

সমাধান ঃ ধরি $x^{2n} = y$. তাহা হইলে $x = y^{1/2n}$, $dx = \frac{1}{2n}\,y^{1/2n-1}\,dy$

এবং লিমিট ঃ $y = \begin{cases} \infty & \text{যখন } x = \infty \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

সুতরাং L. H. S. $= \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{y^{2m/2n}}{1+y} y^{1/2n-1}\,dy$

$= \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+y}\,dy = \frac{\pi}{2n \sin \frac{2m+1}{2n}\pi}$.

উদাহরণ-34. দেখাও যে $\int_0^2 x(8-x^3)^{1/3}\,dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$. [DUH-1988]

সমাধান ঃ ধরি $x^3 = 8z \Rightarrow x = 2z^{1/3} \Rightarrow dx = \frac{2}{3}z^{-2/3}\,dz$

এবং $z = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x = 2 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$. তাহা হইলে

$\int_0^2 x(8-x^3)^{1/3}\,dx = \frac{8}{3}\int_0^1 z^{-1/3}(1-z)^{1/3}\,dz = \frac{8}{3}\beta\left(-\frac{1}{3}+1, \frac{1}{3}+1\right)$

$= \frac{8}{3}\beta\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}\frac{\Gamma(2/3)\,\Gamma(4/3)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)} = \frac{8}{3}\frac{\Gamma(2/3)\,\Gamma(4/3)}{\Gamma(2)}$

$= \frac{8}{3}\frac{\Gamma(2/3)\,.1/3\,\Gamma(1/3)}{1} = \frac{8}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}\frac{\pi}{\sin \pi/3}$

$= \frac{8}{9}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{3}/2} = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ-35. দেখাও যে

$\Gamma\left(\frac{3}{2}-x\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+x\right) = \left(\frac{1}{4}-x^2\right)\pi \sec \pi x \quad (-1 < 2x < 1)$

সমাধান ঃ L. H. S. $= \Gamma\left(\frac{3}{2}-x\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+x\right)$

$= \left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)$

$= \left(\frac{1}{4}-x^2\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)\Gamma\left\{1-\left(\frac{1}{2}-x\right)\right\} = \left(\frac{1}{4}-x^2\right)\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{2}-x\right)\pi}$

$= \left(\frac{1}{4}-x^2\right)\frac{\pi}{\cos \pi x} = \left(\frac{1}{4}-x^2\right)\pi \sec \pi x$ = R. H. S. [প্রমাণিত]

উদাহরণ-36. দেখাও যে $\int_t^z \frac{dx}{(z-x)^{1-n}(x-t)^n} = \frac{\pi}{\sin n\pi}$, $0 < n < 1$.

[DUH-1990]

সমাধান ঃ ধরি $x - t = (z-t)y$. তাহা হইলে $x = t + (z-t)y$

$dx = (z-t)dy$ এবং লিমিট $y = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x = z \\ 0 & \text{যখন } x = t \end{cases}$

সুতরাং $\int_t^z \frac{dx}{(z-x)^{1-n}(x-t)^n} = \int_0^1 \frac{(z-t)dt}{\{z-t-(z-t)y\}^{1-n}(z-t)^n y^n}$

$= \int_0^1 \frac{(z-t)dt}{(z-t)^{1-n+n}(1-y)^{1-n}y^n} = \int_0^1 y^{-n}(1-y)^{n-1}\,dy$

$= \beta(1-n, n) = \frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(n)}{\Gamma(1-n+n)} = \Gamma(n)\,\Gamma(1-n)$

$= \frac{\pi}{\sin n\pi}$ যেখানে $0 < n < 1$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ-37. দেখাও যে $\Gamma\left(\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(\frac{2}{9}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{16\pi^4}{3}$

সমাধান ঃ L. H. S. $= \left\{\Gamma\left(\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(\frac{8}{9}\right)\right\}\cdot\left\{\Gamma\left(\frac{2}{9}\right)\Gamma\left(\frac{7}{9}\right)\right\}$

$\left\{\Gamma\left(\frac{3}{9}\right)\Gamma\left(\frac{6}{9}\right)\right\}\cdot\left\{\Gamma\left(\frac{4}{9}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{9}\right)\right\}$

$= \frac{\pi}{\sin \pi/9}\cdot\frac{\pi}{\sin 2\pi/9}\cdot\frac{\pi}{\sin 3\pi/9}\cdot\frac{\pi}{\sin 4\pi/9}$

$= \frac{16\pi^4}{3}$ $\left[\because \sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\cdot\sin\frac{4\pi}{9} = \frac{3}{16}\right]$ = R. H. S.

অন্যভাবে ঃ আমরা জানি, $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{n-1/2}}{\sqrt{n}}$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(\frac{2}{9}\right)\Gamma\left(\frac{3}{9}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{(2\pi)^{9-1/2}}{\sqrt{9}}=\frac{16\pi^4}{4}.$$

উদাহরণ–38. দেখাও যে $\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(x+a)^{m+n}}dx=\frac{\beta(m,n)}{a^n(a+1)^m}$

সমাধান ঃ আমরা জানি, $\beta(m,n)=\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}dy$ ..... (1)

ধরি $1+y=\frac{x+a}{a(1-x)}\Rightarrow y=\frac{(a+1)}{a}\cdot\frac{x}{1-x}$

$$\therefore dy=\frac{(a+1)}{a}\cdot\frac{(1-x)\cdot 1+x}{(1-x)^2}dx=\frac{a+1}{a(1-x)^2}dx$$

লিমিট $x=\begin{cases}1 \text{ যখন } y=\infty\\ 0 \text{ যখন } y=0\end{cases}$

$$(1)\Rightarrow \beta(m,n)=\int_0^1 \frac{(a+1)^{m-1}x^{m-1}}{a^{m-1}(1-x)^{m-1}}\cdot\frac{a^{m+n}(1-x)^{m+n}}{(x+a)^{m+n}}\cdot\frac{a+1}{a(1-x)^2}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{(a+1)^m a^n x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+n}}dx$$

$$=a^n(a+1)^m\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+n}}dx$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+n}}dx=\frac{\beta(m,n)}{a^n(a+1)^m}$$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ–39. দেখাও যে

$$\int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{n-1}}{(a+b\cos\theta)^n}dx=\frac{2^{n-1}}{\sqrt[n]{a^2-b^2}}\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(n)} \quad (a^2>b^2)$$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\beta\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}=\int_0^\infty \frac{x^{n/2-1}}{(1+x)^{n/2+n/2}}dx$

$$\Rightarrow \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(n)}=\int_0^\infty \frac{x^{n/2-1}}{(1+x)^n}dx \text{ ..... (1)}$$

ধরি $x=\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\theta}{2}$. তাহা হইলে

$$dx=\frac{a-b}{a+b}\cdot 2\tan\frac{\theta}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}d\theta=\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{\theta}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}d\theta$$

এবং লিমিট $\theta=\begin{cases}\pi & \text{যখন } x=\infty\\ 0 & \text{যখন } x=0\end{cases}$

তাহা হইলে

$$(1)\Rightarrow \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(n)}=\int_0^\pi \frac{\left(\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^{n/2-1}\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{\theta}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}}{\left(1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^n}d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(n)}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n/2}\cdot(a+b)^n$$

$$\int_0^\pi \frac{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{n-1}\cos^{2n}\frac{\theta}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}}{\left\{(a+b)\cos^2\frac{\theta}{2}+(a-b)\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}^n}d\theta$$

$$=(a^2-b^2)^{n/2}\int_0^\pi \frac{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{n-1}}{(a+b\cos\theta)^n}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt[n]{a^2-b^2}}{2^{n-1}}\int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{n-1}}{(a+b\cos\theta)^n}d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{n-1}}{(a+b\cos\theta)^n}d\theta=\frac{2^{n-1}}{\sqrt[n]{a^2-b^2}}\frac{\{\Gamma(n)\}^2}{\Gamma(n)}.$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ–40. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^n}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(n)\sin\frac{n\pi}{2}}, 0<n<1$

সমাধান ঃ আমরা জানি, $\Gamma(n)=\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}dy, n>0$ ..... (1)

ধরি $y=xz$ (x ধ্রুবক) $\therefore dy=x\,dz$, z এর সীমা ঃ $\begin{cases}\infty \text{ যখন } y=\infty\\ 0 \text{ যখন } y=0\end{cases}$

$$(1)\Rightarrow \Gamma(n)=\int_0^\infty (xz)^{n-1}e^{-xz}x\,dz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^n}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-xz}z^{n-1}dz \Rightarrow \frac{\sin x}{x^n}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-xz}z^{n-1}\sin x\,dz$$

এখন 0 হইতে ∞ সীমার মধ্যে x এর সাপেক্ষে সমাকলন করি

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-xz}\sin x\,dx\right]z^{n-1}\,dz$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\left[\frac{e^{-xz}(-z\sin x-\cos x)}{z^2+1}\right]_0^\infty z^{n-1}\,dz$$

আবার ধরি $z^2 = u$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{z^{n-1}}{z^2+1}\,dz \qquad \Rightarrow z = \sqrt{u}$$

$$\therefore dz = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{(\sqrt{u})^{n-1}}{u+1}\cdot\frac{du}{2\sqrt{u}}$$

z	0	∞
u	0	∞

$$= \frac{1}{2\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{u^{n/2-1}}{u+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(n)}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{n\pi}{2}}$$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

19.1. সেকেন্ড অয়লারিয়ান বা গামা ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define secon Eulerian or Gamma function.) [NUH-2010

Ans : $n > 0$ হইলে $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ কে গামা ফাংশন বলে। ইহাকে $\Gamma(n)$ দ্বা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

19.2. ফার্স্ট অয়লারিয়ান বা বিটা ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। (Define firs Eulerian or beta function.)

Ans : $m, n > 0$ হইলে $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ কে বিটা ফাংশন বলে। ইহা $\beta(m, n)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore \beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

19.3. গামা ফাংশনের আবর্ত সূত্র লিখ। (Write the recurrence formula of Gamma function.)

Ans : গামা ফাংশনের আবর্ত সূত্র হইল, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

19.4. গামা ফাংশন ও ফ্যাক্টোরিয়াল ফাংশনের মধ্যে সম্পর্ক লিখ। (Write the relation between Gamma function and factorial function.)

Ans : গামা ফাংশন ও ফ্যাক্টোরিয়াল ফাংশনের মধ্যে সম্পর্ক,

$\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}$.

19.5. $\Gamma(5)$ এর মান কত? (What is the value of $\Gamma(5)$?)

Ans : $\Gamma(5) = 4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$

19.6. $\Gamma(1)$ ও $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত?

Ans : $\Gamma(1) = 1$ এবং $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

19.7. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

Ans : $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

19.8. $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$ এর মান কত? $\left(\text{What is the value of } \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)?\right)$

Ans : $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}$

19.9. $\int_0^\infty e^{-x}x^3\,dx$ এর মান কত? (What is the value of $\int_0^\infty e^{-x}x^3\,dx$)

Ans : $\int_0^\infty e^{-x}x^3\,dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{4-1}\,dx = \Gamma(4) = 3! = 6$

19.10. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\int_c^\infty e^{-x}x^{-1/2}\,dx$

Ans : $\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{1/2-1}\,dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

19.11. মান নির্ণয় কর (evaluate) $\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}\,dx$

Ans : $\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{3/2-1}\,dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

19.12. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত? (What is the value of $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$?)

Ans : $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{1/2}$ $\left[\because \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}\right]$

$= -2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$

19.13. $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$ কত? (What is $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$?)

Ans : $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\sqrt{\pi} = \frac{16\sqrt{\pi}}{105}$

19.14. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\beta(1, 1)$.

Ans : আমরা জানি, $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

$\therefore \beta(1, 1) = \int_0^1 dx = 1$

19.15. $\beta(m, n) = 5$ হইলে $\beta(n, m)$ এর মান কত? (If $\beta(m, n) = 5$, then what is the value of $\beta(n, m)$?)

Ans : $\beta(m, n) = 5$ হইলে $\beta(n, m) = 5$ $[\because \beta(m, n) = \beta(n, m)]$

19.16. বিটা ও গামা ফাংশনের মধ্যে সম্পর্ক লিখ। (Write the relation between beta function and gamma functions.)

Ans : বিটা ও গামা ফাংশনের মধ্যে সম্পর্ক, $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

19.17. মান নির্ণয় কর (Evaluate) : $\beta(3, 2)$

Ans : $\beta(3, 2) = \frac{\Gamma(3)\,\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = \frac{2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{12}$

19.18. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Ans : $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{1} = \pi$

19.19. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx$

Ans : $\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx = \int_0^1 x^{3-1}(1-x)^{4-1}\,dx = \beta(3, 4)$

19.20. $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta\cos^q\theta\,d\theta$ এর মান নির্ণয়ের জন্য গামা ফাংশনের সূত্র লিখ। (Write the formula in gamma function to eavaluete $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta\cos^q\theta\,d\theta$)

Ans : $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta\cos^q\theta\,d\theta \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$

19.21. লেজেন্ডার ডুপ্লিকেশন সূত্রটি লিখ। (Write the legendre duplication formula.)

Ans : $2^{2m-1}\,\Gamma(m)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \Gamma(2m)\sqrt{\pi}$, $m > 0$.

EXERCISE–19

1. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x = \int_0^{\pi/2} \cos^6 x\,dx = \frac{5\pi}{32}$
2. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} \sin^{11}\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{11}\theta\,d\theta = \frac{2^{10}(5!)^2}{11!}$
3. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\theta}\,d\theta = \pi$
4. দেখাও যে $\int_0^{\pi} x\cos^4 x\,dx = \frac{3\pi^2}{16}$
5. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} \sin^6\theta\cos^4\theta\,d\theta = \frac{3\pi}{512}$
6. দেখাও যে $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{\pi^2}{32}$
7. দেখাও যে $\int_0^1 x^4(1-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{3\pi}{256}$
8. দেখাও যে $\int_0^1 \left(x\,ln\frac{1}{x}\right)^4 dx = \frac{\Gamma(5)}{5^5}$
9. দেখাও যে $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$.
10. দেখাও যে $\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15\pi^2}{128}$.
11. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} \tan^m x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cot^m x\,dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{m\pi}{2}}$ যেখানে $0 < m < 1$.

12. দেখাও যে $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$.

13. দেখাও যে $\int_a^\infty e^{2ax-x^2}\, dx = e^{a^2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

14. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

15. যদি $p, q, r, s, t > 0$ হয় তবে দেখাও যে
$\beta(p, q)\,\beta(p+q, r)\,\beta(p+q+r, s)\,\beta(p+q+r+s, t)$
$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,\Gamma(r)\,\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(p+q+r+s+t)}$.

16. যদি $0 < m < 1$ হয় তবে দেখাও যে $\beta\left(\frac{1+m}{2}, \frac{1-m}{2}\right) = \pi \sec\frac{m\pi}{2}$.

17. যদি $p \in \mathbb{N}$ হয় তবে দেখাও যে $\beta(p, p)\,\beta\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{4p-1}p}$

18. দেখাও যে $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(x+1)^{p+q}}\, dx = \frac{\beta(p, q)}{2^p}$ যেখানে $p, q > 0$

19. যদি $m, n, a, b > 0$ হয় তবে দেখাও যে
$\int_0^a \frac{x^{m-1}\,(a-x)^{n-1}}{(a+bx)^{m+n}}\, dx = \frac{\beta(m, n)}{a(1+b)^m}$

20. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2p-1}\theta\, \cos^{2q-1}\theta\, d\theta}{(a+b\cos^2\theta)^{p+q}} = \frac{\beta(p, q)}{2a^p(a+b)^q}$ যেখানে a, b, p, q>0

21. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}}\, dx = \frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cos\frac{\pi}{8}}$

22. দেখাও যে $\Gamma\left(\frac{1}{10}\right)\Gamma\left(\frac{2}{10}\right)\Gamma\left(\frac{3}{10}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{(2\pi)^{9/2}}{\sqrt{10}}$

23. দেখাও যে $\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)\Gamma\left(\frac{3}{15}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{14}{15}\right) = \frac{128\pi^7}{\sqrt{15}}$

24. দেখাও যে $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\, dx = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$

25. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} = \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2}{4\sqrt{\pi}}$.

———×———

Chapter–20(A)
অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল
IMPROPER INTEGRALS

20.A.1. অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল (Improper Integrals) ঃ

সংজ্ঞা ঃ নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল $I = \int_a^b f(x)\, dx$ কে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হইবে যদি ইহা নিম্নে বর্ণিত দুই শ্রেণীর ইন্টিগ্রালের কমপক্ষে একশ্রেণীর হয় ঃ

Imp I_1 শ্রেণী ঃ যদি I এর ইন্টিগ্রেশন লিমিট a এবং b এর কমপক্ষে একটি অসীম হয়।

Imp I_2 শ্রেণী ঃ যদি $a \le x \le b$ ব্যবধির এক বা একাধিক বিন্দুতে I এর ইন্টিগ্রান্ড f(x) বিচ্ছিন্ন বা অসীমায়িত (unbounded) হয়।

প্রথম শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল ঃ Imp I_1 শ্রেণীর ইন্টিগ্রালকে **প্রথম শ্রেণীর** অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হয়।

উদাহরণ–1. নিম্নের প্রত্যেকটি নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল প্রথম শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল

(i) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ (ii) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$ (iii) $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x^2\, dx}{x^4+x^2+1}$

দ্বিতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল ঃ

Imp I_2 শ্রেণীর ইন্টিগ্রালকে **দ্বিতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল** বলা হয়।

উদাহরণ–2. নিম্নের প্রত্যেকটি নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল দ্বিতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল

(i) $\int_0^4 \frac{dx}{x-2}$ (ii) $\int_{-3}^5 \frac{dx}{x+2}$ (iii) $\int_0^{15} \frac{x\, dx}{x^2-5x+6}$

(iv) $\int_{-4}^7 \frac{x^2+2}{x\sqrt{x-5}}\, dx$ (v) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x(x-2)}$

তৃতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল ঃ যে ইন্টিগ্রাল একত্রে Imp I_1 শ্রেণীর এবং Imp I_2 শ্রেণীর তাহাকে তৃতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলে।

উদাহরণ–3. নিম্নের প্রত্যেকটি নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল তৃতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল ঃ

(i) $\int_0^\infty \frac{e^x}{x-2}\, dx$ (ii) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$ (iii) $\int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{\cos x + \sin x}$

(iv) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ (v) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-.7x+12}$

20.A.2. প্রথম শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের মান (Values of first kind improper integrals) :

20.A.3. [a, ∞) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল (Improper Integral of a continuous Function in the interval [a, ∞)) ঃ ব্যবধি [a, ∞) এ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন f এর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_a^\infty f(x)dx$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\epsilon\to\infty}\int_a^\epsilon f(x)dx$ ..... (1)

যখন (1) এর ডানপক্ষ বিদ্যমান থাকে।

(i) যদি (1) এর ডানপক্ষের লিমিট বিদ্যমান থাকে তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_a^\infty f(x)dx$ কে অভিসারী (Convergent) বলা হয় এবং ঐ লিমিটকে উহার মান (value) বলা হয়।

(ii) যদি (1) এর ডানপক্ষের লিমিট বিদ্যমান না থাকে তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_a^\infty f(x)dx$ অপসারী (Divergent) বলা হয়।

উদাহরণ–4. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

সমাধান ঃ প্রদত্ত অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটি $\int_a^\infty f(x)dx$ আকারের যেখানে a = 0 এবং $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\epsilon\to\infty}\int_0^\epsilon \frac{dx}{1+x^2}$

$= \lim_{\epsilon\to\infty} [\tan^{-1}x]_0^\epsilon$

$= \lim_{\epsilon\to\infty} (\tan^{-1}\epsilon - \tan^{-1}0)$

$= \tan^{-1}\infty - 0 = \frac{\pi}{2}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–5. দেখাও যে $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = 2$. **[DUH–1990]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটি $\int_a^\infty f(x)dx$ আকারের যেখানে a = 1 এবং $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2}$.

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{\epsilon\to\infty}\int_1^\epsilon x^{-3/2}\,dx$

$= \lim_{\epsilon\to\infty}\left[\frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right]_1^\epsilon = \lim_{\epsilon\to\infty}\left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^\epsilon = \lim_{\epsilon\to\infty}[-2x^{-1/2}]_1^\epsilon$

$= \lim_{\epsilon\to\infty}(-2\epsilon^{-1/2} + 2] = -2(0) + 2$ $[\because \infty^{-1/2} = 0]$

$= 2$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–6. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{4}$. **[DUH–1992]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটি $\int_a^\infty f(x)dx$ আকারের যেখানে a = 0 এবং $f(x) = \frac{x}{x^4+1}$. সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^4+1} = \lim_{\epsilon\to\infty}\int_0^\epsilon \frac{x\,dx}{x^4+1}$

$= \lim_{\epsilon\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^\epsilon \frac{dz}{1+z^2}$ ধরি $x^2 = z$. তাহা হইলে $x\,dx = \frac{1}{2}dz$ এবং

z এর লিমিট $= \begin{cases}\sqrt{\epsilon} & \text{যখন } x = \epsilon \\ 0 & \text{যখন } x = 0\end{cases}$

$= \lim_{\epsilon\to\infty}\frac{1}{2}[\tan^{-1}z]_0^\epsilon = \lim_{\epsilon\to\infty}\frac{1}{2}(\tan^{-1}\epsilon - \tan^{-1}0)$

$= \frac{1}{2}(\tan^{-1}\infty - 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–7. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$ এর মান বিদ্যমান নাই বা অপসারী। **[NUH–1995]**

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে $\int_0^\infty \frac{e^x\,dx}{1+e^x} = \lim_{\epsilon\to\infty}\int_0^\epsilon \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$

$= \lim_{\epsilon\to\infty}[ln(1+e^x)]_0^\epsilon$

$= \lim_{\epsilon\to\infty}[ln(1+e^\epsilon) - ln\,1]$

$= \infty$

সুতরাং প্রদত্ত অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটির মান বিদ্যমান নাই। অর্থাৎ ইহা অপসারী।

উদাহরণ–8. দেখাও যে $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$. **[DUH–1992]**

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{\epsilon\to\infty}\int_0^\epsilon xe^{-x^2}\,dx$

$$= \lim_{\epsilon \to \infty} \frac{1}{2} \int_0^{\epsilon^2} e^{-z}\, dz$$

ধরি $x^2 = z$. তাহা হইলে $x\,dx = \frac{1}{2} dz$ এবং

$$z \text{ এর লিমিট} = \begin{cases} \epsilon^2 & \text{যখন } x = \epsilon \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{\epsilon \to \infty} \frac{1}{2} \left[-e^{-z}\right]_0^{\epsilon^2} = \lim_{\epsilon \to \infty} \frac{1}{2} (-e^{-\epsilon^2} + e^0 = \frac{1}{2} (-e^{-\infty} + 1)$$

$$= \frac{1}{2} (-0 + 1) \quad [\because e^{-\infty} = 0]$$

$$= \frac{1}{2}$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ-9. দেখাও যে $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a + b)}$ যেখানে $a, b > 0$. **[RUH-1988]**

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \lim_{\epsilon \to \infty} \int_0^{\epsilon} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \lim_{\epsilon \to \infty} \int_0^{\epsilon} \left(\frac{1}{x^2 + b^2} - \frac{1}{x^2 + a^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \lim_{\epsilon \to \infty} \left[\frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{x}{b} - \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}\right]_0^{\epsilon}$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \lim_{\epsilon \to \infty} \left(\frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{\epsilon}{b} - \tan^{-1} \frac{\epsilon}{a} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{1}{b} \tan^{-1} \infty - \frac{1}{a} \tan^{-1} \infty\right)$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{\pi}{2b} - \frac{\pi}{2a}\right) = \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{\pi(a - b)}{2ab} = \frac{\pi}{2ab(a + b)}.$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ-10. দেখাও যে $\int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2(a + b)}$ যেখানে $a, b > 0$.

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \lim_{\epsilon \to \infty} \int_0^{\epsilon} \frac{x^2\, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \lim_{\epsilon \to \infty} \left\{\int_0^{\epsilon} \frac{a^2}{x^2 + a^2} dx - \int_0^{\epsilon} \frac{b^2}{x^2 + b^2} dx\right\}$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \lim_{\epsilon \to \infty} \left[\frac{a^2}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{b^2}{b} \tan^{-1} \frac{x}{b}\right]_0^{\epsilon}$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \lim_{\epsilon \to \infty} (a \tan^{-1} \epsilon - b \tan^{-1} \epsilon - 0)$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} (a \tan^{-1} \infty - b \tan^{-1} \infty)$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{a\pi}{2} - \frac{b\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2(a + b)}.$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ-11. দেখাও যে $\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{1}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a}$ যেখানে $a, b > 0$. **[CUH-1982, 1884, 1990]**

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে

$$\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \lim_{\epsilon \to \infty} \int_0^{\epsilon} \frac{x\, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$

$$= \lim_{\epsilon \to \infty} \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\epsilon}} \frac{dz}{(z + a^2)(z + b^2)}$$

ধরি $x^2 = z$. তাহা হইলে $x\,dx = \frac{1}{2} dz$ এবং z এর লিমিট $= \begin{cases} \sqrt{\epsilon} & \text{যখন } x = \epsilon \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \lim_{\epsilon \to \infty} \left\{\int_0^{\epsilon} \left(\frac{1}{z + b^2} - \frac{1}{z + a^2}\right)\right\} dz$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \lim_{\epsilon \to \infty} \left[\ln(z + b^2) - \ln(z + a^2)\right]_0^{\epsilon}$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \lim_{\epsilon \to \infty} \left[\ln \frac{z + b^2}{z + a^2}\right]_0^{\epsilon}$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \lim_{\epsilon \to \infty} \left(\ln \frac{\epsilon + b^2}{\epsilon + a^2} - \ln \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \left[\lim_{\epsilon \to \infty} \ln \frac{1 + (b^2/\epsilon)}{1 + (a^2/\epsilon)} + \ln \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \left(\ln 1 + 2 \ln \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \left(0 + 2 \ln \frac{a}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} \ln \frac{a}{b}.$$ [প্রমাণিত]

20.A.4. $(-\infty, a]$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল (Improper Integral of a Continuous Function in the interval $(-\infty, a]$) ঃ ব্যবধি $(-\infty, a]$ এ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন f এর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to -\infty} \int_{\epsilon}^{a} f(x)dx \cdots\cdots (1)$$

যখন (1) এর ডানপক্ষের লিমিট বিদ্যমান। যদি (1) এর ডানপক্ষের লিমিট বিদ্যমান থাকে তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ কে অভিসারী বলা হয় এবং ঐ লিমিটকে উহার মান বলা হয়। যদি লিমিট বিদ্যমান না থাকে তবে উহাকে অপসারী বলা হয়।

উদাহরণ-12. দেখাও যে $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = 1$. **[NUH-2008]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটি $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ আকারের যেখানে $a = 0$ এবং $f(x) = e^x$. সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{\epsilon \to -\infty} \int_{\epsilon}^{0} e^x dx = \lim_{\epsilon \to -\infty} [e^x]_{\epsilon}^{0}$

$= \lim_{\epsilon \to -\infty} (e^0 - e^{\epsilon}) = 1 - e^{-\infty} = 1 \quad [\because e^{-\infty} = 0]$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ-13. দেখাও যে $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x\,dx}{e^x + 1} = \ln 2$.

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x\,dx}{e^x + 1} = \lim_{\epsilon \to -\infty} \int_{\epsilon}^{0} \frac{e^x\,dx}{e^x + 1}$

$= \lim_{\epsilon \to -\infty} [\ln(e^x + 1)]_{\epsilon}^{0} = \lim_{\epsilon \to -\infty} [\ln(e^0 + 1) - \ln(e^{\epsilon} + 1)]$

$= \ln(1 + 1) - \ln(e^{-\infty} + 1) = \ln 2 - \ln(0 + 1) = \ln 2 - 0 = \ln 2$. [প্রমাণিত]

20.A.5. $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল (Improper Integral of a Continuous Function in the Interval $(-\infty, \infty)$) ঃ ব্যবধি $(-\infty, \infty)$ এ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন f এর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx \ (a \in \mathbf{R})$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} \int_{\epsilon_1}^{a} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \to \infty} \int_{a}^{\epsilon_2} f(x)dx \cdots\cdots (1)$$

যখন (1) এর ডানপক্ষের উভয় লিমিট বিদ্যমান।

(i). যদি (1) এর ডানপক্ষের উভয় লিমিট বিদ্যমান থাকে তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ কে অভিসারী বলা হয় এবং লিমিটকে উহার মান বলা হয়।

(ii). যদি (1) এর ডানপক্ষের কমপক্ষে একটি লিমিট বিদ্যমান না থাকে তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ কে অপসারী বলা হয়।

উদাহরণ-14. দেখাও যে $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} dx = \pi$. **[NUH(NM)-2009]**

সমাধান ঃ এখানে $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x\,dx}{e^{2x} + 1}$

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x\,dx}{e^{2x} + 1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x\,dx}{e^{2x} + 1} + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x\,dx}{e^{2x} + 1}$ [সংজ্ঞায় $a = 0$ ধরে]

$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} \int_{\epsilon_1}^{0} \frac{e^x\,dx}{e^{2x} + 1} + \lim_{\epsilon_2 \to \infty} \int_{0}^{\epsilon_2} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$

$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} \left[\tan^{-1} e^x\right]_{\epsilon_1}^{0} + \lim_{\epsilon_2 \to \infty} \left[\tan^{-1} e^x\right]_{0}^{\epsilon_2}$

$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} (\tan^{-1} e^0 - \tan^{-1} e^{\epsilon_1}) + \lim_{\epsilon_2 \to \infty} (\tan^{-1} e^{\epsilon_2} - \tan^{-1} e^0)$

$= (\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} e^{-\infty}) + (\tan^{-1} e^{\infty} - \tan^{-1} 1)$

$= \left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} 0\right) + \left(\tan^{-1} \infty - \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ-15. দেখাও যে $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + 1}$ বিদ্যমান নয়।

সমাধান ঃ এখানে $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + 1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{x^2 + 1} + \int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + 1} \cdots\cdots (1)$

[সংজ্ঞায় $a = 0$ ধরে]

এখন সংজ্ঞানুসারে $\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{x^2 + 1} = \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} \int_{\epsilon_1}^{0} \frac{x\,dx}{x^2 + 1}$

$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)\right]_{\epsilon_1}^{0} = \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} \frac{1}{2} [\ln 1 - \ln(\epsilon_1^2 + 1)]$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} [0 - ln\sqrt{\epsilon_1^2 + 1}] = -\lim_{\epsilon_1 \to -\infty} ln\sqrt{\epsilon_1^2 + 1}$$

$$= -ln\infty = -\infty$$

সুতরাং $\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{x^2+1}$ বিদ্যমান নয়।

এখন যেহেতু (1) এর ডানপক্ষের একটি ইন্টিগ্রাল অর্থাৎ প্রথম ইন্টিগ্রালটি বিদ্যমান নয় সুতরাং প্রদত্ত ইন্টিগ্রালটি বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–16. দেখাও যে $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2$.

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-|x|}\,dx$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} \int_{\epsilon_1}^{0} e^{-|x|}\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to \infty} \int_{0}^{\epsilon_2} e^{-|x|}\,dx$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} \int_{\epsilon_1}^{0} e^{-(-x)}\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to \infty} \int_{0}^{\epsilon_2} e^{-x}\,dx \quad [\because |x| = x \text{ যখন } x \geq 0, = -x \text{ যখন } x < 0]$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} \int_{\epsilon_1}^{0} e^{x}\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to \infty} \int_{0}^{\epsilon_2} e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} [e^x]_{\epsilon_1}^{0} + \lim_{\epsilon_2 \to \infty} [-e^{-x}]_{0}^{\epsilon_2}$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} (e^0 - e^{\epsilon_1}) + \lim_{\epsilon_2 \to \infty} (-e^{-\epsilon_2} + e^0) = 1 - e^{-\infty} - e^{-\infty} + 1$$

$$= 1 - 0 - 0 + 1 = 2.$$ [প্রমাণিত]

20.A.6. দ্বিতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের মান (Values of second kind improper integral) :

20.A.7. অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল যা (a, b] ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু a_+ বিন্দুতে অসীমায়িত (Improper Integral which is continuous in the interval (a, b] but unbounded at point a_+) ঃ যদি (a, b] ব্যবধিতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন হয় এবং অসীমায়িত হয় যখন $x \to a_+$, তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_a^b f(x)\,dx$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় ঃ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{l \to a_+} \int_l^b f(x)\,dx$ ..... (1)

যখন (1) এর ডানপক্ষ বিদ্যমান থাকে।

(i) যদি (1) এর ডান পক্ষের লিমিট বিদ্যমান থাকে তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটিকে অভিসারী বলা হয় এবং ঐ লিমিটকে উহার মান বলা হয়।

(ii) যদি (1) এর ডানপক্ষের লিমিট বিদ্যমান না থাকে তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটিকে অপসারী বলা হয়।

উদাহরণ–17. দেখাও যে $\int_1^3 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{2/3}} = 3$. **[DUH–1990]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ইন্টিগ্রালের নিম্নসীমা $x = 1$ বিন্দুতে ইহার ইন্টিগ্রাল $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^{2/3}}$ অসীমায়িত যেহেতু $f(x) \to \infty$ যখন $x \to 1$ এবং $(1, 3]$ ব্যবধির সর্বত্র $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int_1^3 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{2/3}} = \lim_{l \to 1_+} \int_l^3 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{2/3}}$

$$= \lim_{l \to 1_+} \frac{1}{2} \int_l^3 \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^{2/3}} = \lim_{l \to 1_+} \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2-1)^{-2/3+1}}{-2/3+1}\right]_l^3$$

$$= \lim_{l \to 1_+} \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2-1)^{1/3}}{1/3}\right]_l^3 = \lim_{l \to 1_+} \frac{3}{2} [(9-1)^{1/3} - (1^2-1)^{1/3}]$$

$$= \frac{3}{2}(8^{1/3} - 0) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ–18. দেখাও যে $\int_1^3 \frac{dx}{1-x}$ অপসারী।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ইন্টিগ্রালের নিম্নসীমা $x = 1$ এ ইহার ইন্টিগ্রান্ড $f(x) = \frac{1}{1-x}$ অসীমায়িত যেহেতু $f(x) \to -\infty$ যখন $x \to 1_+$ এবং $(1, 3]$ ব্যবধির সর্বত্র $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int_1^3 \frac{dx}{1-x} = \lim_{l \to 1_+} \int_l^3 \frac{dx}{1-x} = \lim_{l \to 1_+} [-ln|1-x|]_l^3$

$$= \lim_{l \to 1_+} (ln|1-l| - ln|1-3|) = \lim_{l \to 1_+} (ln|1-l| - ln|-2|)$$

$$= \lim_{l \to 1_+} (ln|1-l| - ln\,2) = \lim_{l \to 1_+} ln|1-l| - ln\,2$$

$$= ln\,0 - ln\,2 = -\infty - ln\,2 = -\infty$$

সুতরাং প্রদত্ত ইন্টিগ্রালের মান বিদ্যমান নয় অর্থাৎ ইন্টিগ্রালটি অপসারী। [প্রমাণিত]

উদাহরণ–19. দেখাও যে $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **[NUH–1995, DUH–1991]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ইন্টিগ্রালের নিম্ন সীমা $x = 1$ এ ইহার ইন্টিগ্রান্ড $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ অসীমায়িত যেহেতু $f(x) \to \infty$ যখন $x \to 1_+$ এবং $(1, 2]$ ব্যবধির সর্বত্র $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

$$= \lim_{l \to 1_+} \int_l^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} \cdots\cdots (1)$$

ধরি $x = \sec\theta$. তাহা হইলে $dx = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$

এবং লিমিট $\theta = \begin{cases} \sec^{-1} 2 = \frac{\pi}{3} & \text{যখন } x = 2 \\ \sec^{-1} l = 0 & \text{যখন } x = l \end{cases}$

$$\int_l^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int_{\sec^{-1} l}^{\pi/3} \frac{\sec\theta\tan\theta}{(\sec\theta+1)\tan\theta} d\theta$$

$$= \int_{\sec^{-1} l}^{\pi/3} \frac{1}{1+\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_{\sec^{-1} l}^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\int_{\sec^{-1} l}^{\pi/3} \sec^2\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\tan\frac{\theta}{2}\right]_{\sec^{-1} l}^{\pi/3} = \tan\frac{\pi}{6} - \tan\left(\frac{1}{2}\sec^{-1} l\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \tan\left(\frac{1}{2}\sec^{-1} l\right)$$

সুতরাং (1) $\Rightarrow \int_1^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \lim_{l \to 1_+} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan\left(\frac{1}{2}\sec^{-1} l\right)\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \tan\left(\frac{1}{2}\sec^{-1} 1\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \tan\left(\frac{1}{2}\cdot 0\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$ [প্রমাণিত]

20.A.8. অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল যা [a, b) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু b_ বিন্দুতে অসীমায়িত (Improper Integral which is continuous in the interval [a, b) but unbounded at the point b_) ঃ যদি [a, b) ব্যবধিতে f অবিচ্ছিন্ন হয় এবং অসীমায়িত হয় যখন $x \to b_-$ তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_a^b f(x)dx$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b_-} \int_a^l f(x)dx \cdots\cdots (1)$$

যখন (1) এর ডানপক্ষ বিদ্যমান থাকে।

(i) যদি (1) এর ডানপক্ষের লিমিট বিদ্যমান থাকে তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটিকে অভিসারী বলা হয় এবং ঐ লিমিটকে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের মান বলা হয়।

(ii) যদি (1) এর ডানপক্ষের লিমিট বিদ্যমান না থাকে তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটিকে অপসারী বলা হয়।

উদাহরণ-20. দেখাও যে $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$. **[DUH-1989]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ইন্টিগ্রালের উর্ধসীমা $x = 3$ এ ইহার ইন্টিগ্রান্ড $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ অসীমায়িত। যেহেতু $f(x) \to \infty$ যখন $x \to 3_-$ এবং [0, 3) ব্যবধির সর্বত্র f(x) অবিচ্ছিন্ন।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{l \to 3_-} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

$$= \lim_{l \to 3_-} \left[\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^l = \lim_{l \to 3_-} \left(\sin^{-1}\frac{l}{3} - \sin^{-1} 0\right)$$

$$= \lim_{l \to 3_-} \sin^{-1}\frac{l}{3} - 0 = \sin^{-1}\frac{3}{3} = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}.$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ-21. দেখাও যে $\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^2}$ অপসারী।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ইন্টিগ্রালের উর্ধসীমা $x = 3$ এ ইহার ইন্টিগ্রান্ড $f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$ অসীমায়িত। যেহেতু $f(x) \to \infty$ যখন $x \to 3_-$ এবং [0, 3) ব্যবধির সর্বত্র f(x) অবিচ্ছিন্ন।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^2} = \lim_{l \to 3_-} \int_0^l \frac{dx}{(3-x)^2}$

$$= \lim_{l \to 3_-} \left[\frac{-(3-x)^{-2+1}}{-2+1}\right]_0^l = \lim_{l \to 3_-} \left[(3-x)^{-1}\right]_0^l$$

$$= \lim_{l \to 3_-} \left(\frac{1}{3-l} - \frac{1}{3}\right) = \infty - \frac{1}{3} = \infty$$

সুতরাং প্রদত্ত ইন্টিগ্রালের মান বিদ্যমান নয়। অর্থাৎ ইন্টিগ্রালটি অপসারী। [প্রমাণিত]

20.A.9. অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল যা [a, c) এবং (c, b] ব্যবধির উভয় ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন কিন্তু c বিন্দুতে অসীমায়িত (Improper Integral which is continuous in the interval [a, c) and (c, b] but unbounded at point C) ঃ যদি [a, c) এবং (c, b] ব্যবধিতে f অবিচ্ছিন্ন হয় এবং অসীমায়িত হয় $x = c$ বিন্দুতে। তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_a^b f(x)\,dx$ কে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{l_1 \to c_-} \int_a^{l_1} f(x)dx + \lim_{l_2 \to c_+} \int_{l_2}^b f(x)dx \cdots\cdots (1)$$

যখন (1) এর ডান পক্ষের উভয় লিমিট বিদ্যমান থাকে।

(i) যদি (1) এর ডানপক্ষের উভয় লিমিট বিদ্যমান থাকে তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটিকে অভিসারী বলা হয় এবং ঐ লিমিটকে উহার মান বলা হয়।

(ii) যদি (1) এর ডানপক্ষের একটি অথবা উভয় লিমিট বিদ্যমান না থাকে তবে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটিকে অপসারী বলা হয়।

উদাহরণ–22. দেখাও যে $\int_{-8}^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{15}{2}$.

সমাধান ঃ প্রদত্ত ইন্টিগ্রালের ইন্টিগ্রান্ড $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/3}$ ব্যবধি $[-8, 27]$ এর $x = 0$ বিন্দুতে অসীমায়িত। ঐ ব্যবধির $x = 0$ বিন্দু ব্যতিত অন্যসব বিন্দুতে ইহা অবিচ্ছিন্ন। অর্থাৎ ইহা $[-8, 0)$ এবং $(0, 27]$ ব্যবধিদ্বয়ের উভয়টিতে অবিচ্ছিন্ন।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-8}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$$= \lim_{l_1 \to 0_-} \int_{-8}^{l_1} x^{-1/3}\,dx + \lim_{l_2 \to 0_+} \int_{l_2}^{27} x^{-1/3}\,dx$$

$$= \lim_{l_1 \to 0_-} \left[\frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1}\right]_{-8}^{l_1} + \lim_{l_2 \to 0_+} \left[\frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1}\right]_{l_2}^{27}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{l_1 \to 0_-} [x^{2/3}]_{-8}^{l_1} + \frac{3}{2} \lim_{l_2 \to 0_+} [x^{2/3}]_{l_2}^{27}$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{l_1 \to 0_-} [l_1^{2/3} - (-8)^{2/3}] + \frac{3}{2} \lim_{l_2 \to 0_+} [(27)^{2/3} - l_2^{2/3}]$$

$$= \frac{3}{2}(0-4) + \frac{3}{2}(9-0) = \frac{15}{2}.$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ–23. দেখাও যে $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ অপসারী।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ইন্টিগ্রালের ইন্টিগ্রান্ড $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ব্যবধি $[-1, 1]$ এর $x = 0$ বিন্দুতে অসীমায়িত। ঐ ব্যবধির $x = 0$ বিন্দু ব্যতিত অন্যসব বিন্দুতে ইহা অবিচ্ছিন্ন।

অর্থাৎ ইহা $[-1, 0)$ এবং $(0, 1]$ ব্যবধিদ্বয়ের উভয়টিতে অবিচ্ছিন্ন।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$

$$= \lim_{l_1 \to 0_-} \int_{-1}^{l_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{l_2 \to 0_+} \int_{l_2}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{l_1 \to 0_-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{l_1} + \lim_{l_2 \to 0_+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{l_2}^{1}$$

$$= \lim_{l_1 \to 0_-} \frac{-1}{l_1} + \lim_{l_2 \to 0_+} \frac{1}{l_2 - 2}$$

$$= \infty + \infty - 2$$

$$= \infty$$

সুতরাং প্রদত্ত ইন্টিগ্রালের মান বিদ্যমান নয় অর্থাৎ ইহা অপসারী। [প্রমাণিত]

উদাহরণ–24. মান নির্ণয় কর ঃ $\int_{0}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$. **[RUH–1982]**

সমাধান ঃ $\int_{0}^{2} \frac{dx}{1-x^2} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{1}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$

$$= \int_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^2} - \int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0_-} \int_{0}^{1+\epsilon} \frac{dx}{1-x^2} - \lim_{\eta \to 0_+} \int_{1+\eta}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0_-} \left[\frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x}\right]_{0}^{1+\epsilon} - \lim_{\eta \to 0_+} \left[\frac{1}{2} ln \frac{x-1}{x+1}\right]_{1+\eta}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \to 0_-} \left(ln \frac{2+\epsilon}{1-1-\epsilon} - ln \frac{1+0}{1-0}\right)$$

$$- \frac{1}{2} \lim_{\eta \to 0_+} \left(ln \frac{2-1}{2+1} - ln \frac{1+\eta-1}{1+\eta+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \to 0_-} \left(ln \frac{2+\epsilon}{-\epsilon} - ln\ 1\right) - \frac{1}{2} \lim_{\eta \to 0_+} \left(ln \frac{1}{3} - ln \frac{\eta}{2+\eta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(ln \infty - 0) - \frac{1}{2}\left(ln \frac{1}{3} - \infty\right)$$

প্রদত্ত অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের মান বিদ্যমান নাই। সুতরাং ইহা অপসারী।

উদাহরণ–25. $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$ এর অভিসৃতি পরীক্ষা কর। [NUH-06, 0

সমাধান ঃ $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$

ধরি $x = z^2$

$dx = 2z\,dz$

x	0	∞
z	0	∞

$= \int_0^\infty \frac{z \cdot 2z\,dz}{1+z^2}$

$= 2\int_0^\infty \frac{(z^2+1)-1}{z^2+1}\,dz$

$= 2\int_0^\infty dz - 2\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1}$

$= 2\,[z]_0^\infty - 2\,[\tan^{-1}z]_0^\infty$

$= \infty - \pi = \infty$

সুতরাং প্রদত্ত ইন্টিগ্রাল অপসারী।

উদাহরণ–26. অভিসৃতি পরীক্ষা কর

(i) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2}$ [NUH–2004, NUH(NM)–2009]

(ii) $\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{x^4+16}$ [NUH(NM)–2005]

(iii) $\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)}$ [NUH–2010, NUH(NM)–2002]

(iv) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx\ (m, n > 0)$ [NUH-2005]

সমাধান ঃ (i) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2}$

$= \lim_{\epsilon\to\infty} \int_0^\epsilon \frac{dx}{x^2+(\sqrt{2})^2}$

$= \lim_{\epsilon\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^\epsilon$

$= \lim_{\epsilon\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

যেহেতু প্রদত্ত ইন্টিগ্রালের মান সসীম, সুতরাং ইহা অভিসারী।

(ii) $\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{x^4+16} = \lim_{\epsilon\to\infty}\int_0^\epsilon \frac{x^3\,dx}{x^4+16}$

$= \frac{1}{4}\lim_{\epsilon\to\infty}\int_0^\epsilon \frac{4x^3}{x^4+16}\,dx = \frac{1}{4}\lim_{\epsilon\to\infty}\left[ln(x^4+16)\right]_0^\epsilon$

$= \frac{1}{4}\lim_{\epsilon\to\infty} ln(\epsilon^4+16) - \frac{1}{4}ln\,16 = \infty$

ইন্টিগ্রালটির মান সসীম না হওয়ায় উহা অপসারী।

(iii) $\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)} = \lim_{\epsilon\to 0_+}\int_\epsilon^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)dx$

$= \lim_{\epsilon\to 0_+}\left[lnx - ln(1+x)\right]_\epsilon^1 = -ln\,2 - \lim_{\epsilon\to 0_+} ln\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$

$= -ln\,2 - \lim_{\epsilon\to 0_+} ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\epsilon}}\right) = ln\frac{1}{2}$

যেহেতু মান সসীম, সুতরাং ইন্টিগ্রালটি অভিসারী।

(iv) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx\ (m, n > 0)$

$= \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

যেহেতু মান সসীম। সুতরাং প্রদত্ত ইন্টিগ্রালটি অভিসারী।

উদাহরণ–27. অভিসৃতি পরীক্ষা কর ঃ

(i) $\int_0^1 \frac{ln\,x}{\sqrt{x}}\,dx$ [NUH–2009] (ii) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$ [NUH–2009]

(iii) $\int_2^\infty \frac{dx}{ln\,x}$

সমাধান ঃ (i) $\int_0^1 \frac{ln\,x}{\sqrt{x}}\,dx$

ধরি, $ln\,x = -z$

$\Rightarrow x = e^{-z}$

$\therefore dx = -e^{-z}\,dz$

x	0	1
z	∞	0

$= \int_\infty^0 \frac{-z}{e^{-z/2}}(-e^{-z}\,dz)$

$= -\int_0^\infty ze^{-z/2}\,dz$

$= -4\int_0^\infty e^{-z/2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2-1} d\left(\frac{z}{2}\right)$

$= -4\sqrt{(2)} = -4$

সুতরাং প্রদত্ত অপ্রকৃতি ইন্টিগ্রালটি অভিসারী।

(ii) $\left|\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx\right| \le \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad [\because |\cos x| \le 1]$

$= \left[\tan^{-1} x\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$

ইহা নির্দেশ করে প্রদত্ত ইন্টিগ্রালটি অভিসারী।

(iii) আমরা জানি, $e^x > x$ যেখানে $2 < x < \infty$

$\Rightarrow ln\, x < x$

$\Rightarrow \frac{1}{ln\, x} > \frac{1}{x}$

$\therefore \int_2^\infty \frac{dx}{ln\, x} > \int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx = [lnx]_2^\infty = \infty - ln\, 2 = \infty$

ইহা নির্দেশ করে প্রদত্ত অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালটি অপসারী।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

20.A.1. অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by improper integrals?)

Ans : নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল $\int_a^b f(x)\,dx$ কে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হইবে যদি ইন্টিগ্রালের লিমিট a এবং b এর কমপক্ষে একটি অসীম হয় অথবা যদি $a \le x \le b$ ব্যবধির এক বা একাধিক বিন্দুতে ইন্টিগ্রান্ড f(x) বিচ্ছিন্ন বা অসীমায়িত হয়।

20.A.2. প্রথম শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল কাকে বলে? (What is called first kind of improper integral?) **[NUH-2010]**

Ans : নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল $\int_a^b f(x)\,dx$ কে প্রথম শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হইবে যদি ইন্টিগ্রালের লিমিট a এবং b এর কমপক্ষে একটি অসীম হয়।

20.A.3. প্রথম শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের উদাহরণ দাও। (Give the example of first kind of improper integral.)

Ans : নিম্নের প্রত্যেকটি নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল প্রথম শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল ঃ

(i) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ (ii) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$ (iii) $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$

20.A.4. [a, ∞) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রেলের অভিসারীতা বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by convergence of improper integral of a continuous function in the interval [a, ∞)?

Ans : [a, ∞) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ইহাকে $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to \infty} \int_0^\epsilon f(x)\,dx$ ..... (1) আকারে লেখা যায়। যদি (1) এর ডানপক্ষের লিমিট বিদ্যমান থাকে তবে ইন্টিগ্রালটি অভিসারী (Convergent) অন্যথায় অপসারী (divergent) হইবে।

20.A.5. (– ∞, a] ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের অভিসারীতা বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by convergence of improper integral of a continuous function in the interval (– ∞, a]?)

Ans : (– ∞, a] ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$. ইহাকে $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to -\infty} \int_\epsilon^a f(x)\,dx$ ... (1) আকারে লেখা যায়। যদি (1) এর ডানপক্ষের লিমিট বিদ্যমান থাকে তবে ইন্টিগ্রালটি অভিসারী অন্যথায় অপসারী হইবে।

20.A.6. (– ∞, ∞) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের অভিসারীতা কি? (What is the convergence of improper integral of a continuous function in the interval (– ∞, ∞)?)

Ans : (– ∞, ∞) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$. ইহাকে নিম্নরূপে লেখা যায়।

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to -\infty} \int_{\epsilon_1}^a f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to \infty} \int_a^{\epsilon_2} f(x)\,dx \quad \text{..... (1)}$$

যদি (1) এর ডানপক্ষের উভয় লিমিট বিদ্যমান হয় তবে ইন্টিগ্রালটি অভিসারী অন্যথায় অপসারী হইবে।

20.A.7. দ্বিতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল কাকে বলে? (What is called second kind of improper integral?)

Ans : নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল $\int_a^b f(x)\,dx$ কে দ্বিতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হইবে যদি $a \le x \le b$ ব্যবধির এক বা একাধিক বিন্দুতে ইন্টিগ্রান্ড f(x) বিচ্ছিন্ন বা অসীমায়িত (unbounded) হয়।

20.A.8. দ্বিতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের উদাহরণ দাও। (Give the example second kind of improper integral.)

Ans : নিম্নের প্রত্যেকটি নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল দ্বিতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল।

(i) $\int_0^4 \frac{dx}{x-2}$ (ii) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x(x-2)}$ (iii) $\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx$

20.A.9. তৃতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল কি? (What is the third kind improper integral?)

Ans : যে ইন্টিগ্রাল একত্রে প্রথম শ্রেণীর এবং দ্বিতীয় শ্রেণীর তাহাকে তৃতীয় শ্রে অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল বলা হয়।

20.A.10. তৃতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রালের উদাহরণ দাও। (Give the exam of third kind of improper integral.)

Ans : নিম্নের প্রত্যেকটি তৃতীয় শ্রেণীর অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল।

(i) $\int_0^\infty \frac{e^x}{x-2}\,dx$ (ii) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (iii) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$

EXERCISE–20(A)

1. দেখাও যে

(i) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ **[NUH(NM)–2005]**

(ii) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \pi$

(iii) $\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sech} x\,dx = \pi$

2. দেখাও যে

(i) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}$ (ii) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ অপসারী।

(iii) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = 1$ (iv) $\int_{-\infty}^0 e^{-x}\,dx$ অপসারী।

3. দেখাও যে

(i) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1$ (ii) $\int_0^\infty e^{-|x|}\,dx = 1$

(iii) $\int_{-\infty}^0 \tanh x\,dx$ অপসারী।

(iv) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$ **[NUH–2008]**

(v) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1} = \ln 3$

(vi) $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = 2\ln 2$ **[NUH–04, NUH(NM)–02, 09, BSc(Pass)–08]**

4. দেখাও যে

(i) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ (ii) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}} = 6$

(iii) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{3}$ (iv) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ অপসারী।

5. দেখাও যে

(i) $\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = 3$

(ii) $\int_0^2 \frac{dx}{4-x^2}$ অপসারী

(iii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$ **[NUH–2007]** **[NUH(NM)–2009]**

(iv) $\int_0^6 \frac{2x\,dx}{x^2-4}$ অপসারী।

6. দেখাও যে

(i) $\int_0^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$ অপসারী (ii) $\int_0^1 x\ln x\,dx = -\frac{1}{4}$

(iii) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \frac{1}{2}$ (iv) $\int_0^5 \frac{dx}{(x-1)^5}$ অপসারী। **[NUH–2003]**

7. দেখাও যে

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}\,d\theta = 2$ (ii) $\int_0^1 \frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = 0$

(iii) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx = \sqrt{3}$

8. দেখাও যে

(i) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{12}$

(ii) $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+a^2)} = \frac{1}{a^2-1} \ln a \quad (a>0)$

(iii) $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+a^2)} = \frac{\pi}{2(a+1)} \quad (a>0)$

9. দেখাও যে

(i) $\int_0^a \frac{dx}{(x-a)^2}$ অপসারী (ii) $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = 2$

(iii) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1} = \ln 3$ (iv) $\int_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2+5x+6} = \ln 2$

10. দেখাও যে

(i) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$ অপসারী (ii) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \pi$

(iii) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2+x-2}$ অপসারী (iv) $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}} = \frac{\pi}{3}$

(v) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = 1$ (vi) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{3}$

(vii) $\int_0^\infty \frac{dx}{x \ln x}$ অপসারী **[NUH-2003, 2007, B.Sc(Pass)-2010]**

(viii) $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{\sqrt{7-x}}$ অপসারী **[DUH-1988]**

11. দেখাও যে

(i) $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{2}$ (ii) $\int_0^\pi \ln(1+\cos x)dx = \pi \ln \frac{1}{2}$

(iii) $\int_0^\pi x \ln \sin x\,dx = \frac{\pi^2}{2} \ln \frac{1}{2}$ (iv) $\int_0^{\pi/2} \ln \cos x\,dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{2}$

(v) $\int_0^{\pi/2} \ln \tan x\,dx = 0$

12. দেখাও যে (i) $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2} \quad (a>0)$

(ii) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2} \quad (a>0).$

অপ্রকৃত ইন্টিগ্রাল–20(B)

20.B.1. ইন্টিগ্রালের অন্তর্গত অন্তরীকরণ (Differentiation under Integral Signs) : ইন্টিগ্রালের অন্তর্গত দুইটি বিশেষ উপপাদ্য প্রমাণ বিহীন নিম্নে প্রদত্ত হইল।

উপপাদ্য–1. যদি $a \le x \le b$ এবং $c \le \alpha \le d$ ব্যবধিতে $f(x, \alpha)$ এবং $\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x, \alpha)$ ফাংশন দুইটি অবিচ্ছিন্ন হয় তবে $\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha} dx$

উপপাদ্য–2. যদি $a \le x \le b$ এবং $c \le \alpha \le d$ ব্যবধিতে $f(x, \alpha)$ এবং $\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x, \alpha)$ ফাংশন দুইটি অবিচ্ছিন্ন হয় এবং আরো যদি $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)dx$ হয় তবে

$$F'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha} dx + f[b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha}$$

যেখানে a এবং b এর উভয়ে α এর ফাংশন।

20.B.2. ফ্রুলানীর ইন্টিগ্রাল (Frullan's Integrals) :

উপপাদ্য–3. যদি (i) $[0, \infty)$ ব্যবধিতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন হয়

এবং (ii) $\lim_{x\to 0} f(x) = A$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = B$ হয় তবে

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (A-B) \ln \frac{b}{a} \quad \text{যেখানে } a, b > 0.$$

উদাহরণ–1. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$ যেখানে $a, b > 0$.

সমাধান : ধরি $f(x) = e^{-x}$. তাহা হইলে

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1 = A$ (ধরি)

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 = B$ (ধরি)

$\lim_{x\to 0} f(ax) = \lim_{x\to 0} e^{-ax} = 1$ এবং $\lim_{x\to\infty} f(bx) = \lim_{\substack{\partial\to\infty \\ x\to\infty}} e^{-bx} = 0$

এখন আমরা ফ্রুলানীর ইন্টিগ্রালের সাহায্যে পাই

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (A-B) \ln \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = (1-0) \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a}. \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

উদাহরণ-2. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax - \tan^{-1} bx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$ যেখানে a, b > 0

সমাধান ঃ ধরি $f(x) = \tan^{-1}x$

তাহা হইলে $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \tan^{-1}x = 0 = A$ (ধরি)

$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} = B$ (ধরি)

$\lim_{x\to 0} f(ax) = \lim_{x\to 0} \tan^{-1} ax = 0$ এবং $\lim_{x\to \infty} f(bx) = \lim_{x\to \infty} \tan^{-1} bx = \frac{\pi}{2}$

এখন আমরা ফ্রুলানীর ইন্টিগ্রাল হইতে পাই

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (A - B) \ln \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax - \tan^{-1} bx}{x} dx = \left(0 - \frac{\pi}{2}\right) \ln \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}.$$

✪ **সমাধানকৃত কিছু উদাহরণমালা ঃ**

উদাহরণ-3. যদি a > 0 হয় তবে দেখাও যে

(i) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ [NUH-2005]

(ii) $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ যখন b > 0 [NUH-2005]

(iii) $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$ যখন b < 0.

সমাধান ঃ (i). ধরি $I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx$ ..... (1)

তাহা হইলে $\frac{dI}{db} = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} \frac{\partial}{\partial b} (\sin bx) dx = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} . x \cos bx \, dx$

$$= \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{a}{a^2 + b^2} db \quad \text{[ইন্টিগ্রেটিং b এর সাপেক্ষে]}$$

$$= \frac{a}{a} \tan^{-1} \frac{b}{a} + c \quad (c\text{ ধ্রুবক})$$

$$= \tan^{-1} \frac{b}{a} + c \text{ ..... (2)}$$

এখন b = 0 হইলে (2) $\Rightarrow I = \tan^{-1}0 + c = c$ ..... (3)

এবং (1) $\Rightarrow I = \int_0^\infty e^{-ax} \sin 0 \, dx = \int_0^\infty 0 \, dx = 0$ ..... (4)

এখন (3) এবং (4) হইতে পাই c = 0

সুতরাং (3) $\Rightarrow I = \tan^{-1} \frac{b}{a} \Rightarrow \int \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ ..... (5)

(ii) এবং (iii) : এখন (5) হইতে পাই

$$\lim_{a\to 0_+} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx}{x} dx = \lim_{a\to 0_+} \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^0 \sin bx \, dx}{x} = \begin{cases} \tan^{-1}\infty & \text{যখন } b > 0 \\ \tan^{-1}(-\infty) & \text{যখন } b < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{যখন } b > 0 \\ -\pi/2 & \text{যখন } b < 0 \end{cases}. \quad \text{[প্রমাণিত]}$$

উদাহরণ-4. দেখাও যে ঃ $\int_0^\infty \frac{\ln(1 + a^2x^2)}{1 + b^2x^2} dx = \frac{\pi}{b} \ln \frac{a + b}{a}$.

[DUH-1960, 1981, RUH-1977, 1981]

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^\infty \frac{\ln(1 + a^2x^2)}{1 + b^2x^2} dx$ ..... (1)

এখন (1) এর উভয় পক্ষকে a এর সাপেক্ষে অন্তরণ করিয়া পাই

$$\frac{dI}{da} = \int_0^\infty \frac{1}{(1 + a^2x^2)(1 + b^2x^2)} \frac{\partial}{\partial a} (1 + a^2x^2) dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{2ax^2}{(1 + a^2x^2)(1 + b^2x^2)} dx = \int_0^\infty \left(\frac{\frac{2a}{b^2 - a^2}}{1 + a^2x^2} - \frac{\frac{2a}{b^2 - a^2}}{1 + b^2x^2} \right) dx$$

$$= \frac{2a}{b^2 - a^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 + a^2x^2} - \frac{1}{1 + b^2x^2} \right) dx$$

$$= \frac{2a}{b^2 - a^2} \left[\frac{1}{a} \tan^{-1} ax - \frac{1}{b} \tan^{-1} bx \right]_{x=0}^{x=\infty}$$

$$= \frac{2a}{b^2 - a^2} \left\{ \left(\frac{1}{a} \tan^{-1}\infty - \frac{1}{b} \tan^{-1}\infty \right) - \left(\frac{1}{a} \tan^{-1}0 - \frac{1}{b} \tan^{-1}0 \right) \right\}$$

$$= \frac{2a}{b^2 - a^2} \left(\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2b} \right) = \frac{2a}{b^2 - a^2} \cdot \frac{(b - a)\pi}{4ab} = \frac{\pi}{(a + b)b}$$

$$dI = \frac{\pi}{b} \frac{da}{a + b} \text{ ..... (2)}$$

এখন (2) কে a এর সাপেক্ষে ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই $I = \frac{\pi}{b} \ln(a + b) + c$ ..... (3)

এখন যদি a = 0 হয় তবে (3) $\Rightarrow I = \frac{\pi}{b} \ln b + c$ ..... (4)

এবং (1) $\Rightarrow I = \int_0^\infty \frac{\ln 1}{1 + b^2x^2} dx = 0$ ..... (5) [$\because \ln 1 = 0$]

এখন (4) এবং (5) হইতে পাই $0 = \frac{\pi}{b} \ln b + c \Rightarrow c = -\frac{\pi}{b} \ln b$

সুতরাং (3) $\Rightarrow I = \frac{\pi}{b} \ln(a+b) - \frac{\pi}{b} \ln b = \frac{\pi}{b} \ln \frac{a+b}{b}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–5. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax \tan^{-1} bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$.

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax \tan^{-1} bx}{x^2} dx$ ..... (1)

$\Rightarrow \frac{dI}{da} = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1} bx}{x^2} \cdot \frac{x}{1+a^2x^2} dx$ ..... (2)

$\Rightarrow \frac{d^2I}{db\, da} = \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)} dx$

$= \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{b^2(1+a^2x^2)} - \frac{1}{a^2(1+b^2x^2)} \right\} dx$

$= \frac{ab}{a^2-b^2} \left[\frac{1}{ab^2} \tan^{-1} ax - \frac{1}{a^2b} \tan^{-1} bx \right]_0^\infty$

$= \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \left(\frac{1}{ab^2} \tan^{-1}\infty - \frac{1}{a^2b} \tan^{-1}\infty - 0 \right)$

$= \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \left(\frac{\pi}{2ab^2} - \frac{\pi}{2a^2b} \right) = \frac{a^2b^2\pi}{2ab(a^2-b^2)} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$

$= \frac{a^2b^2\pi}{2ab(a^2-b^2)} \cdot \frac{a-b}{ab} = \frac{\pi}{2(a+b)}$ ..... (3)

এখন (3) কে b এর সাপেক্ষে ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই

$\frac{dI}{da} = \frac{\pi}{2} \ln(a+b) + c$ ..... (4)

এখন $b = 0$ হইলে (2) $\Rightarrow \frac{dI}{da} = 0$ ..... (5) এবং (4) $\Rightarrow \frac{dI}{da} = \frac{\pi}{2} \ln a + c$ .....

এখন (5) এবং (6) হইতে পাই $0 = \frac{\pi}{2} \ln a + c \Rightarrow c = -\frac{\pi}{2} \ln a$

সুতরাং $\frac{dI}{da} = \frac{\pi}{2} \ln(a+b) - \frac{\pi}{2} \ln a$ ..... (7)

এখন a এর সাপেক্ষে (7) কে ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই

$I = \frac{\pi}{2} [a \ln(a+b) - \int \frac{a}{a+b} da - \frac{\pi}{2} [a \ln a - \int \frac{a}{a} da] + c_1$

$= \frac{\pi}{2} [a \ln(a+b) - a + b \ln(a+b)] - \frac{\pi}{2} [a \ln a - a] + c_1$

$= \frac{\pi}{2} [(a+b) \ln(a+b) - a \ln a] + c_1$ ..... (8)

এখন ধরি $a = 0$. তাহা হইলে (1) $\Rightarrow I = 0$ ..... (9)

এবং (8) $\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} [b \ln b - \lim_{a \to 0} a \ln a] + c_1$

$= \frac{\pi}{2} \left[b \ln b - \lim_{a \to 0} \frac{\ln a}{1/a} \right] + c_1 = \frac{\pi}{2} b \ln b - \lim_{a \to 0} \frac{1/a}{(-1/a^2)} + c_1$

$= \frac{\pi}{2} b \ln b - 0 = \frac{\pi}{2} b \ln b + c_1$ ..... (10)

এখন (9) এবং (10) হইতে পাই $0 = \frac{\pi}{2} b \ln b + c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{\pi}{2} b \ln b$

সুতরাং (8) $\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} [(a+b) \ln(a+b) - a \ln a] - \frac{\pi}{2} b \ln b$

$= \frac{\pi}{2} [(a+b) \ln(a+b) - a \ln a - b \ln b]$

$= \frac{\pi}{2} [\ln(a+b)^{a+b} - \ln a^a b^b] = \frac{\pi}{2} \ln \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–6. দেখাও যে $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos 2bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-b^2/a^2}$

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos 2bx\, dx$ ..... (1)

$\therefore \frac{dI}{db} = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} (-2x \sin 2bx) dx$

$= \frac{1}{a^2} \int_0^\infty e^{-a^2x^2} (-2a^2x) \sin 2bx\, dx$

$= \frac{1}{a^2} \left[[e^{-a^2x^2} \cdot \sin 2bx]_0^\infty - 2b \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos 2bx\, dx \right]$

$= \frac{1}{a^2} (0 - 2bI) = -\frac{2b}{a^2} I$.

$\Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{2b}{a^2} db \Rightarrow \int \frac{dI}{I} = -\frac{2}{a^2} \int b\, db \Rightarrow \ln I = -\frac{b^2}{a^2} + \ln c$

$\Rightarrow \ln \frac{I}{c} = -\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{I}{c} = e^{-b^2/a^2}$ ..... (2)

যদি $b = 0$ হয় তবে (1) $\Rightarrow I = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx$

$= \frac{\Gamma(1/2)}{2(a^2)^{1/2}}$ $\left[\because \frac{\Gamma(n)}{k^n} = 2 \int_0^\infty e^{-kx^2} x^{2n-1} dx \right]$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ ..... (3)

আবার (2) $\Rightarrow \frac{I}{c} = e^0 = 1 \Rightarrow I = c$ ..... (4)

এখন (3) এবং (4) হইতে পাই $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$

সুতরাং (2) $\Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-b^2/a^2}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–7. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} ln(1+a)$.

[DUHT–1986, 1988, CUH-

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax}{(1+x^2)} dx$ ..... (1)

তাহা হইলে $\frac{dI}{da} = \int_0^\infty \frac{x}{x(1+x^2)(1+a^2x^2)} dx$

$= \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+a^2x^2)} dx$

$= \frac{a^2}{1-a^2} \int_0^\infty \frac{(1+a^2x^2) - a^2(1+x^2)}{a^2(1+x^2)(1+a^2x^2)} dx$

$= \frac{a^2}{1-a^2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{a^2(1+x^2)} - \frac{1}{1+a^2x^2}\right] dx$

$= \frac{a^2}{1-a^2} \left[\frac{1}{a^2} \tan^{-1} x - \frac{1}{a} \tan^{-1} ax\right]_0^\infty$

$= \frac{a^2}{1-a^2} \left(\frac{1}{a^2} \tan^{-1}\infty - \frac{1}{a} \tan^{-1}\infty - 0\right)$

$= \frac{a^2}{1-a^2} \left(\frac{1}{a^2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a}\frac{\pi}{2}\right)$

$= \frac{a^2}{1-a^2} \cdot \frac{(1-a)\pi}{2a^2} = \frac{\pi}{2(1+a)}$.

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} ln(1+a) + c$ ..... (2) [ইন্টিগ্রেট করিয়া]

এখন $a = 0$ হইলে (2) $\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} ln\, 1 + c = 0 + c = c$ ..... (3)

এবং (1) $\Rightarrow I = \int_0^\infty 0\, dx = 0$ ..... (4) এখন (3) এবং (4) হইতে পাই $c=0$

সুতরাং (2) $\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} ln(1+a)$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–8. দেখাও যে $\int_0^{\pi/2} ln(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\, d\theta = \pi\, ln\frac{a+b}{2}$ যেখানে $a, b > 0$. **[RUH–1990]**

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} ln(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) d\theta$ ..... (1)

তাহা হইলে $\frac{dI}{da} = \int_0^{\pi/2} \frac{2a\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta$

$= 2a \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a^2 + b^2\tan^2\theta}$ ..... (2)

ধরি $z = \tan\theta$. তাহা হইলে $dz = \sec^2\theta\, d\theta$

$\Rightarrow d\theta = \frac{dz}{1+\tan^2\theta} = \frac{dz}{1+z^2}$ এবং লিমিট $z = \begin{cases} \infty & \text{যখন } \theta = \pi/2 \\ 0 & \text{যখন } \theta = 0 \end{cases}$

সুতরাং (2) $\Rightarrow \frac{dI}{da} = 2a \int_0^\infty \frac{1}{a^2 + b^2z^2} \frac{dz}{1+z^2}$

$= \frac{2a}{b^2-a^2} \int_0^\infty \left(\frac{b^2}{a^2+b^2z^2} - \frac{1}{1+z^2}\right) dz$

$= \frac{2a}{b^2-a^2} \left[\frac{b}{a} \tan^{-1}\frac{bz}{a} - \tan^{-1} z\right]_0^\infty$

$= \frac{2a}{b^2-a^2} \left(\frac{b}{a} \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}\infty - 0\right)$

$= \frac{2a}{b^2-a^2} \left(\frac{b\pi}{2a} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2a\pi(b-a)}{2a(b^2-a^2)} = \frac{\pi}{a+b}$

$\Rightarrow I = \pi\, ln(a+b) + c$ ..... (3) [ইন্টিগ্রেট করিয়া]

ধরি $a = b$ হয়। তাহা হইলে (3) $\Rightarrow I = \pi\, ln\, 2a + c$ ..... (4)

এবং (1) $\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} ln(a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)\, d\theta$

$= \int_0^{\pi/2} ln\, a^2\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} ln\, a\, d\theta = 2\, ln\, a\, [\theta]_0^{\pi/2}$

$= 2\, ln\, a \frac{\pi}{2} = \pi\, ln\, a$ ..... (5)

এখন (4) এবং (5) হইতে পাই $\pi\, ln\, 2a + c = \pi\, ln\, a$

$\Rightarrow \pi\, ln\, 2 + \pi\, ln\, a + c = \pi\, ln\, a \Rightarrow c = -\pi\, ln\, 2$

সুতরাং (3) $\Rightarrow I = \pi\, ln(a+b) - \pi\, ln\, 2 = \pi\, ln\frac{a+b}{2}$. [প্রমাণিত]

এখন $a = 0$ হইলে $(1) \Rightarrow I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ..... (4)

এবং $(3) \Rightarrow I = c$ ..... (5)

এখন (4) এবং (5) হইতে পাই $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

সুতরাং $(3) \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2a}$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–11. দেখাও যে $\int_0^\infty \cos x\, ln \frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2}\,dx = \pi(e^{-a} - e^{-b})$.

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^\infty \cos x\, ln \frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2}\,dx$ ..... (1)

$$= \int_0^\infty \cos x[ln(x^2 + b^2) - ln(x^2 + a^2)]dx$$

তাহা হইলে $\frac{dI}{da} = -\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2} \cdot 2a\,dx$

$$= -2a \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,dx$$

$$= -2a\,\frac{\pi}{2a}\,e^{-a} \left[\because \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\,e^{-a}\right]$$

$= -\pi e^{-a} \Rightarrow I = \pi e^{-a} + c$ ..... (2) [ইন্টিগ্রেটিং]

ধরি $a = b$. তাহা হইলে $(1) \Rightarrow I = \int_0^\infty \cos x.\ ln\ 1\,dx = 0$ ..... (3)

এবং $(2) \Rightarrow I = \pi e^{-b} + c$ ..... (4)

এখন (3) এবং (4) হইতে পাই $0 = \pi e^{-b} + c \Rightarrow c = -\pi e^{-b}$

সুতরাং $(2) \Rightarrow I = \pi(e^{-a} - e^{-b})$. [প্রমাণিত]

20.B.3. ইন্টিগ্রালের অন্তর্গত ইন্টগ্রাল (Integration under Integral sign) ঃ এখানে আমরা ইন্টিগ্রালের অন্তর্গত ইন্টিগ্রালের বিভিন্ন সমস্যাদি কিভাবে সমাধান করিতে হয় তাহা উদাহরণের সাহায্যে আলোচনা করিব।

উদাহরণ–12. যদি $a, b > 0$ হয় তবে দেখাও যে

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx\,dx = \tan^{-1}\frac{b}{m} - \tan^{-1}\frac{a}{m}.$$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin mx\,dx = \frac{m}{\alpha^2 + m^2}$ ..... (1)

এখন (1) কে α এর সাপেক্ষে a হইতে b সীমায় ইন্টিগ্রেট করিলে আমরা পাই

$$\int_a^b d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin mx\, dx = m \int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha^2 + m^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \sin mx \int_a^b e^{-\alpha x}\, d\alpha\, dx = \frac{m}{m}\left[\tan^{-1}\frac{\alpha}{m}\right]_{\alpha=a}^{\alpha=b}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \sin mx \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-x}\right]_{\alpha=a}^{\alpha=b} dx = \tan^{-1}\frac{b}{m} - \tan^{-1}\frac{a}{m}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx\, dx = \tan^{-1}\frac{b}{m} - \tan^{-1}\frac{a}{m}.$$

উদাহরণ–13. যদি a, b > 0 হয় তবে দেখাও যে

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos mx\, dx = \frac{1}{2} ln \frac{b^2 + m^2}{a^2 + m^2}.$$

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos mx\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2}$ ..... (1)

এখন (1) কে α এর সাপেক্ষে a হইতে b সীমায় ইন্টিগ্রেট করিলে পাই

$$\int_a^b d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos mx\, dx = \int_a^b \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2} d\alpha$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \cos mx \int_a^b e^{-\alpha x}\, d\alpha\, dx = \frac{1}{2}\left[ln(\alpha^2 + m^2)\right]_{\alpha=a}^{\alpha=b}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \cos mx \left[\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right]_{\alpha=a}^{\alpha=b} dx = \frac{1}{2} ln \frac{b^2 + m^2}{a^2 + m^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos mx\, dx = \frac{1}{2} ln \frac{b^2 + m^2}{a^2 + m^2}.$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ–14. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}$.

সমাধান ঃ আমরা জানি $\frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{\Gamma(1)}{(a^2 + x^2)}$

$$= 2\int_0^\infty e^{-(a^2 + x^2)z^2} z\, dz \text{ ..... (1)} \quad \left[\because \frac{\Gamma(n)}{k^n} = \int_0^\infty e^{-kx^2} x^{2n-1} dx\right]$$

(1) এর উভয় পক্ষকে cos mx দ্বারা গুণ করিয়া x এর সাপেক্ষে 0 হইতে ∞ সীমায় ইন্টিগ্রেট করিয়া পাই

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{a^2 + x^2} dx = 2\int_0^\infty \cos mx \int_0^\infty e^{-(a^2 + x^2)z^2} z\, dz\, dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-a^2z^2} z \left\{\int_0^\infty e^{-z^2x^2} \cos mx\, dx\right\} dz$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-a^2z^2} z \frac{\sqrt{\pi}}{2z} e^{-m^2/4z^2} dz$$

$$= \sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2(z^2 + m^2/4a^2z^2)} dz$$

$$= \sqrt{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2(m/2a)a^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}.$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ–15. দেখাও যে $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{(x-b)^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-am} \cos mb.$

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{(x-b)^2 + a^2} dx$

আবার ধরি $x = z + b$. তাহা হইলে $dx = dy$

এবং লিমিট $z = \begin{cases} \infty & \text{যখন } x = \infty \\ -\infty & \text{যখন } x = -\infty \end{cases}$

সুতরাং $I = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos m(z+b)}{z^2 + a^2} dz$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mz.\cos mb - \sin mz \sin mb}{z^2 + a^2}$$

$$= \cos mb \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mz}{z^2 + a^2} dz - \sin mb \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin mz}{z^2 + a^2} dz$$

$$= 2\cos mb \int_0^\infty \frac{\cos mz}{z^2 + a^2} dz - 0 \quad [\because \text{প্রথম ইন্টিগ্রান্ড জোড় এবং দ্বিতীয় ইন্টিগ্রান্ড বেজোড়}]$$

$$= 2\cos mb. \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \quad \left[\because \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}\right]$$

$$= \frac{\pi}{a} e^{-ma} \cos mb.$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ–16. দেখাও যে $\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{ln\, x} dx = ln \frac{a+1}{b+1}$.

সমাধান ঃ আমরা জানি $\int_0^1 x^m dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^1$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

$$\Rightarrow \int_a^b dm \int_0^1 x^m dx = \int_a^b \frac{1}{m+1} dm$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_a^b x^m \, dm \, dx = [\ln m + 1]_a^b \Rightarrow \int_0^1 \left[\frac{x^m}{\ln x}\right]_a^b dx = \frac{\ln b + 1}{\ln a + 1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \frac{\ln b + 1}{\ln a + 1} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx = \frac{\ln a + 1}{\ln b + 1}$$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–17. দেখাও যে

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 - a^2 \sin^2\theta) d\theta = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2}$$ যেখানে $a^2 < 1$.

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \ln(1 - a^2 \sin^2\theta) d\theta$ ..... (1)

আমরা জানি $\frac{dI}{da} = \int_0^{\pi/2} \frac{-2a \sin^2\theta}{1 - a^2 \sin^2\theta} d\theta = \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - a^2 \sin^2\theta - 1}{1 - a^2 \sin^2\theta} d\theta$

$$= \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{1 - a^2 \sin^2\theta}\right) d\theta = \frac{2}{a} \left\{[\theta]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - a^2 \sin^2\theta} d\theta\right\}$$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - a^2 \sin^2\theta} d\theta = \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta - a^2 \sec^2\theta \sin^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta}{1 + \tan^2\theta - a^2 \tan^2\theta} d\theta = \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta}{1 + (1 - a^2)\tan^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a(1 - a^2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta}{1/(1 - a^2) + \tan^2\theta} d\theta$$ ..... (2)

ধরি $z = \tan\theta$. তাহা হইলে $dz = \sec^2\theta \, d\theta$

এবং লিমিট $\theta = \begin{cases} \infty & \text{যখন} \quad \theta = \pi/2 \\ 0 & \text{যখন} \quad \theta = 0 \end{cases}$

সুতরাং (2) $\Rightarrow \frac{dI}{da} = \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a(1 - a^2)} \int_0^\infty \frac{dz}{1/1 - a^2 + z^2}$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a(1 - a^2)} \left[\sqrt{1 - a^2} \tan^{-1} \sqrt{1 - a^2} z\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{2\sqrt{1 - a^2}}{a(1 - a^2)} (\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0) = \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a\sqrt{1 - a^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{1 - a^2}}\right)$$

$$\Rightarrow I = \pi\left(\ln a + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right) + c$$ [ইন্টিগ্রেটিং]

$$= \pi \ln \frac{a(1 + \sqrt{1 - a^2})}{a} + c = \pi \ln(1 + \sqrt{1 - a^2}) + c$$ ..... (3)

এখন $a = 0$ হইলে (1) $\Rightarrow I = \int \ln 1 \, d\theta = 0$ ..... (4)

এবং (3) $\Rightarrow I = \pi \ln 2 + c$ ..... (5)

এখন (4) এবং (5) হইতে পাই $\pi \ln 2 + c = 0 \Rightarrow c = -\pi \ln 2$

সুতরাং (3) $\Rightarrow I = \pi \ln(1 + \sqrt{1 - a^2}) - \pi \ln 2$

$$= \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2}$$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–18. যদি $a \geq 0$ হয় তবে দেখাও যে

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \sin^2 x)}{\sin^2 x} dx = \pi(\sqrt{1 + a} - 1)$$

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \sin^2 x)}{\sin^2 x} dx$ ..... (1)

তাহা হইলে $\frac{dI}{da} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x(1 + a \sin^2 x)} dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a \sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x \, dx}{\sec^2 x + a \sec^2 x \sin^2 x}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x \, dx}{1 + \tan^2 x + a \tan^2 x}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x \, dx}{1 + (1 + a)\tan^2 x}$$ ..... (2)

ধরি $z = \tan x \Rightarrow dz = \sec^2 x \, dx$ এবং লিমিট $z = \begin{cases} \infty & \text{যখন} \quad x = \pi/2 \\ 0 & \text{যখন} \quad x = 0 \end{cases}$

সুতরাং (2) $\Rightarrow \frac{dI}{da} = \int_0^\infty \frac{dz}{1 + (1 + a)z^2} = \frac{1}{1 + a} \int_0^\infty \frac{dz}{1/(1 + a) + z^2}$

$$= \frac{1}{1 + a} \left[\sqrt{1 + a} \tan^{-1} \sqrt{1 + a} z\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\sqrt{1 + a}}{1 + a} (\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + a}} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + a}} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \frac{(1 + a)^{1/2}}{1/2} + c$$ [ইন্টিগ্রেটিং]

$= \pi(1 + a)^{1/2} + c$ ..... (3)

এখন $a = 0$ হইলে (3) $\Rightarrow I = \pi + c$ এবং (1) $\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln 1}{\sin^2 x} dx = 0$

তাহা হইলে $\pi + c = 0 \Rightarrow c = -\pi$

সুতরাং (3) $\Rightarrow I = \pi(\sqrt{1 + a} - 1)$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–19. দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(a^2+x^2)}dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ma})$ যেখানে $m \geq 0$.

সমাধান ঃ ধরি $I = \int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(a^2+x^2)}dx$ ..... (1)

তাহা হইলে $\frac{dI}{dm} = \int_0^\infty \frac{x\cos mx}{x(a^2+x^2)}dx = \int_0^\infty \frac{\cos mx}{a^2+x^2}dx$ ..... (2)

$\Rightarrow \frac{d^2I}{dm^2} = \int_0^\infty \frac{-x\sin mx}{a^2+x^2}dx = -\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\cdot\frac{x^2}{a^2+x^2}dx$

$= -\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\frac{a^2+x^2-a^2}{a^2+x^2}dx$

$= -\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\left(1-\frac{a^2}{a^2+x^2}\right)dx$

$= -\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}dx + a^2\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(a^2+x^2)}dx$

$= -\frac{\pi}{2} + a^2I \quad \left[\because \int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}dx\right]$

$\Rightarrow \frac{d^2I}{dm^2} - a^2I + \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2I}{dm^2} - a^2\left(I - \frac{\pi}{2a^2}\right) = 0$ ..... (3)

ধরি $z = I - \frac{\pi}{2a^2}$.

তাহা হইলে $\frac{dz}{dm} = \frac{dI}{dm}$ এবং $\frac{d^2z}{dm^2} = \frac{d^2I}{dm^2}$

সুতরাং (3) $\Rightarrow \frac{d^2z}{dm^2} - a^2z = 0$ ..... (4)

ধরি $z = e^{rm}$. তাহা হইলে (4) $\Rightarrow (r^2-a^2)e^{rm} = 0$

$\Rightarrow r^2 - a^2 = 0 \quad (\because e^{rm} \neq 0)$

$\Rightarrow r = a, -a$

সুতরাং (4) এর সাধারণ সমাধান $z = c_1e^{ma} + c_2e^{-ma}$

$\Rightarrow I - \frac{\pi}{2a^2} = c_1e^{ma} + c_2e^{-ma} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2a^2} + c_1e^{ma} + c_2e^{-ma}$ ..... (5)

তাহা হইলে $\frac{dI}{dm} = a(c_1e^{ma} - c_2e^{-ma})$ ..... (6)

এখন $m = 0$ হইলে (2) $\Rightarrow \frac{dI}{dm} = \int_0^\infty \frac{1}{a^2+x^2}dx = \left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^\infty$

$= \frac{1}{a}(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0) = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2a}$ ..... (7)

এবং (6) $\Rightarrow \frac{dI}{dm} = a(c_1e^0 - c_2e^0) = a(c_1 - c_2)$ ..... (8)

এখন (7) এবং (8) হইতে পাই $a(c_1 - c_2) = \frac{\pi}{2a} \Rightarrow c_1 - c_2 = \frac{\pi}{2a^2}$ ..... (9)

আবার $m = 0$ হইলে (1) $\Rightarrow I = \int_0^\infty 0\,dx = 0$ ..... (10)

এবং (5) $\Rightarrow I = \frac{\pi}{2a^2} + c_1 + c_2$ ..... (11)

এখন (10) এবং (11) হইতে পাই $\frac{\pi}{2a^2} + c_1 + c_2 = 0$

$\Rightarrow c_1 + c_2 = -\frac{\pi}{2a^2}$ ..... (12)

এখন (9) এবং (12) সমাধান করে পাই $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{\pi}{2a^2}$

সুতরাং (5) $\Rightarrow I = \frac{\pi}{2a^2} - \frac{\pi}{2a^2}e^{-ma} = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ma})$. [প্রমাণিত]

উদাহরণ–20. $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}dx$ এর অভিসৃতি পরীক্ষা কর। **[NUH–2004]**

সমাধান ঃ $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}dx$

$= -\int_\infty^0 \frac{\sin z}{z}dz$

$= \int_0^\infty \frac{\sin z}{z}dz$

$= \frac{\pi}{2}$

ধরি, $\frac{1}{x} = z$

$\therefore -\frac{1}{x^2}dx = dz$

$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = -x\,dz$

$= -\frac{1}{z}dz$

x	0	∞
z	∞	0

যেহেতু মান সসীম, সুতরাং ইহা অভিসারী।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

20.B.1. $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}dx$, $b > 0$ এর মান কত? [What is the value of $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}dx$, $b > 0$?]

Ans : $b > 0$ এর ক্ষেত্রে $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

20.B.2. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = ?$

Ans : $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

20.B.3. $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$, $b < 0$ এর মান কত?

Ans : $b < 0$ হইলে $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = -\frac{\pi}{2}$

20.B.4. $\int_0^\infty \left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2 dx = ?$

Ans : $\int_0^\infty \left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi b}{2}$

20.B.5. $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = ?$

Ans : $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$

EXERCISE–20(B)

প্রমাণ কর ঃ

1. $\int_0^{\pi/2} ln\left(\frac{a + b\sin x}{a - b\sin x}\right)\cdot\frac{dx}{\sin x} = \pi \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, $a > b$

2. $\int_0^{\pi/2} \frac{ln(1 + \alpha \sin^2 x)dx}{\sin^2 x} = \pi[\sqrt{(1+\alpha)} - 1]$

3. $\int_0^{\pi/2} ln(1 - a\sin^2\theta)\,d\theta = \pi\, ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-a}}{2}\right)$, $a < 1$

4. $\int_0^\infty \frac{\cos a\theta \sin\theta}{\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2}$, $0 < a < 1$

5. $\int_0^\infty \left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi b}{2}$.

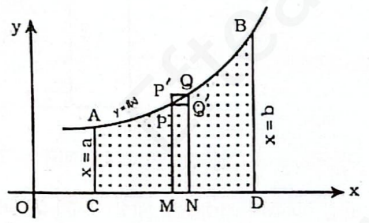
———×———

Chapter–21(A)
ক্ষেত্রফল (কার্তেসীয় আকারে)
AREA (IN CARTESIAN)

21.A.1. ক্ষেত্রফল (Area) ঃ কোন সরলরেখা অথবা বক্ররেখা দ্বারা কোন সমতল ক্ষেত্রে আবদ্ধ তল বা পৃষ্ঠের (Surface) সীমাবদ্ধ অংশের পরিমানকে উক্ত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বা কালি বলা হয়।

21.A.2. উপপাদ্য (Theorem) : $y = f(x)$ ফাংশনটি $a \le x \le b$ ব্যবধিতে সসীম, অবিচ্ছিন্ন এবং ক্রমবর্ধমান ফাংশন হইলে প্রমাণ কর $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ বক্ররেখা এবং x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $R = \int_a^b y\,dx$.

প্রমাণ ঃ মনে করি $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ বক্ররেখা এবং x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র ABDC. $y = f(x)$ ফাংশন দ্বারা সূচিত AB রেখার উপর যে কোন বিন্দু P(x, y) এবং P এর খুব নিকটবর্তী অপর একটি বিন্দু Q$(x + \delta x, y + \delta y)$. P ও Q বিন্দু হইতে x অক্ষের উপর PM ও QN কোটি দুইটি অংকন করি। P বিন্দু হইতে QN এর উপর PQ′ এবং Q বিন্দু হইতে PM এর বর্ধিত অংশের উপর QP′ লম্ব অংকন করি।



সুতরাং PM = y, QN = $y + \delta y$

$\therefore$ QQ′ = $y + \delta y - y = \delta y$ এবং MN = PQ′ = δx

ধরি ACMP অংশের ক্ষেত্রফল = R, $\therefore$ ACNQ অংশের ক্ষেত্রফল = $R + \delta R$

অতএব PMNQ অংশের ক্ষেত্রফল = $R + \delta R - R = \delta R$

সুতরাং MNQP′ অংশের ক্ষেত্রফল = $(y + \delta y)\,\delta x$.

$\therefore$ PMNQ ক্ষেত্রফল MNQ′P এবং MNQP′ এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ MNQ′P অংশের ক্ষেত্রফল < MNQP অংশের ক্ষেত্রফল < MNQP′ অংশের ক্ষেত্রফল $y\,\delta x < \delta R < (y + \delta y)\,\delta x$ বা $y < \frac{\delta R}{\delta x} < y + \delta y$

যখন $\delta x \to 0$ তখন $\delta y \to 0$, সুতরাং সীমায়িত মানে

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta R}{\delta x} = y \text{ বা } \frac{dR}{dx} = y \text{ বা } dR = y\,dx$$

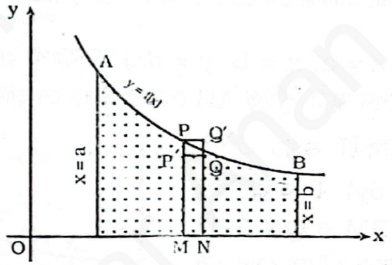
a হতে b সীমার মধ্যে ইন্ট্রিগ্রেট করে পাই $[R]_a^b = \int_a^b y\,dx$

বা (ক্ষেত্রফল R যখন $x = b$) – (ক্ষেত্রফল R যখন $x = a$) = $\int_a^b y\,dx$

বা ক্ষেত্রফল ABDC – 0 = $\int_a^b y\,dx$ $\quad \therefore R = \int_a^b y\,dx.$

নোট ঃ $y = f(x)$ ফাংশনটি $a \le x \le b$ ব্যবধিতে সসীম, অবিচ্ছিন্ন এবং ক্রমহ্রাসমান ফাংশন হইলেও $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ বক্ররেখা এবং x অক্ষদ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হইবে $R = \int_a^b y\,dx$

এইক্ষেত্রে নিম্নরূপ চিত্র হইবে ঃ



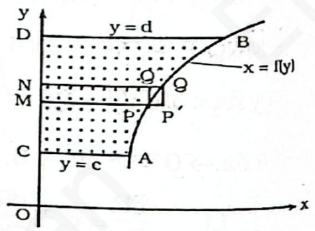
সুতরাং $y = f(x)$ ফাংশন ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান যাহাই হউক $x = a$, $x = b$ এবং $y = f(x)$ বক্ররেখা ও x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $R = \int_a^b y\,dx$

$= \int_a^b f(x)dx.$

21.A.3. উপপাদ্য ঃ $x = f(y)$ ফাংশনটি $c \le y \le d$ ব্যবধিতে সসীম, অবিচ্ছিন্ন হইলে প্রমাণ কর $y = c$, $y = d$, $x = f(y)$ বক্ররেখা এবং y অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $R = \int_{y=c}^{d} x\,dy.$

প্রমাণ ঃ মনে করি $y = c$, $y = d$, $x = f(y)$ বক্ররেখা এবং y অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র ABDC.

$x = f(y)$ ফাংশন দ্বারা সূচিত AB রেখার উপর যে কোন বিন্দু P(x, y) এবং P এর খুব নিকটবর্তী অপর একটি বিন্দু Q(x, + δx, y + δy). P ও Q বিন্দু হইতে y অক্ষের উপর PM ও QN ভূজদ্বয় অংকন করি। P বিন্দু হইতে QN এর উপর PQ′ এবং Q বিন্দু হইতে PM এর বর্ধিত অংশের উপ QP′ লম্ব অংকন করি।



চিত্র হইতে পাই MNQ′P অংশের ক্ষেত্রফল <MNQP অংশের ক্ষেত্রফল <MNQP′ অংশের ক্ষেত্রফল $\Rightarrow x.\,\delta y < \delta R < (x + \delta x).\,\delta y$

$$\Rightarrow x < \frac{\delta R}{\partial y} < x + \delta x$$

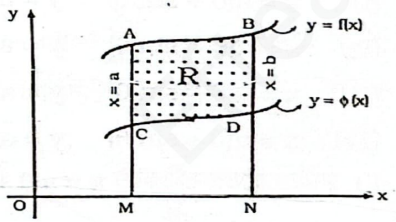
যখন $\delta x \to 0$ তখন $\delta y \to 0$, সুতরাং সীমায়িত মান

$$\lim_{\delta y \to 0} \frac{\partial R}{\partial y} = x \Rightarrow \frac{dR}{dy} = x \Rightarrow dR = x\,dy$$

সুতরাং ABDC ক্ষেত্রের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = \int_{y=c}^{d} x\,dy.$

21.A.4. উপপাদ্য ঃ $y = f(x)$ এবং $y = \phi(x)$ ফাংশন দুইটি $a \le x \le b$ ব্যবধিতে সসীম ও অবিচ্ছিন্ন হইলে প্রমাণ কর $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ এবং $y = \phi(x)$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $R = \int_a^b [f(x) - \phi(x)]\,dx.$

প্রমাণ ঃ মনে করি $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ এবং $y = \phi(x)$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র ABCD. চিত্র হইতে পাই ABDC অংশের ক্ষেত্রফল = AMNB অংশের ক্ষেত্রফল – CMND অংশের ক্ষেত্রফল



$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \phi(x)dx$$

$$\Rightarrow R = \int_a^b [f(x) - \phi(x)]\,dx.$$

21.A.5. প্রতিসম (Symmetric) ঃ কোন বক্ররেখার দৈর্ঘ্য বা উহার দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কোন রেখা বা অক্ষের উভয় পার্শ্বে সমান দৈর্ঘ্য বা আকারে বিস্তৃতি থাকিলে, উহাকে ঐ রেখা বা অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম বলে।

প্রতিসম একটি অংশের ক্ষেত্রফল বা দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে অবশিষ্ট প্রতিসম অংশ সমূহের ক্ষেত্রফল বা দৈর্ঘ্য প্রথম প্রতিসম অংশের কয়েকগুণ মাত্র।

বীজগণিতীয় সমীকরণে প্রতিসম সনাক্তকরণ

(i) x অথবা y অথবা উভয়ই জোড়ঘাত বিশিষ্ট হইলে রেখাটি যথাক্রমে y অক্ষ অথবা x অক্ষ অথবা উভয় অক্ষের সাথে প্রতিসম হইবে। যেমন $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$, $x^2 + y^2 = a^2$ রেখাত্রয় যথাক্রমে x অক্ষ, y অক্ষ এবং উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(ii) x ও y এর পরস্পর বিনিময়ের ফলে সমীকরণটি অপরিবর্তীত থাকিলে, রেখাটি $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম হইবে। যেমন $x^3 + y^3 = 3axy$.

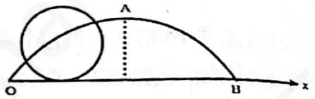
(iii) x এর স্থলে –y এবং y এর স্থলে –x বসাইলে যদি সমীকরণটি অপরিবর্তীত থাকে, তবে রেখাটি $y = -x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম হইবে। যেমন $x^3 - y^3 = 3axy$.

(iv) x ও y উভয়ের স্থলে – x ও – y বসালে যদি সমীকরণটি অপরিবর্তীত থাকে, তবে রেখাটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম হইবে। যেমন $y = x^3$.

21.A.6. কয়েকটি বক্ররেখা এবং উহাদের সনাক্তকরণ বৈশিষ্ট্যবলী (Some curves and its properties for identification) :

1. সাইক্লয়েড (Cycloid) ঃ একটি সরলরেখার উপর একটি ঘূর্নায়মান বৃত্তের (স্লিপিং ছাড়া) উপর অবস্থিত যে কোন একটি বিন্দুর সঞ্চার পথই হইল সাইক্লয়েড।

যে রেখার উপর বৃত্তটি ঘূর্নায়মান, সেই রেখাটিকে সাইক্লয়েডের ভিত্তি (Base) এবং বৃত্তটিকে উৎপাদনকারী বৃত্ত বলা হয়।



চিত্রে OAB সাইক্লয়েড এবং OB সাইক্লয়েডের ভিত্তি। সাইক্লয়েডের সমীকরণ নিম্নের চারভাবে হইতে পারে

(i) $x = a(\theta + \sin\theta)$ $y = a(1 + \cos\theta)$

(ii) $x = a(\theta + \sin\theta)$ $y = a(1 - \cos\theta)$

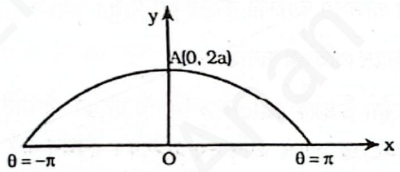
(iii) $x = a(\theta - \sin\theta)$ $y = a(1 + \cos\theta)$

(iv) $x = a(\theta - \sin\theta)$ $y = a(1 - \cos\theta)$

(i) সাইক্লয়েডের সমীকরণ $x = a(\theta + \sin\theta, y = a(1 + \cos\theta)$ হইলে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -\tan\frac{\theta}{2}$$

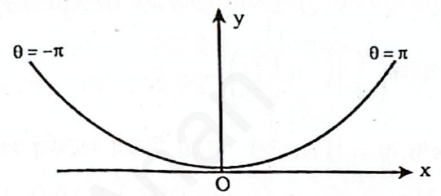
যখন $\theta = \pm\pi$ তখন $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$, সুতরাং সাইক্লয়ডটি $\theta = -\pi$ ও $\theta = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত এবং সাইক্লয়েডের শীর্ষবিন্দু A(0, 2a).



(ii) সাইক্লয়েডের সমীকরণ $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ হইলে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \tan\frac{\theta}{2}, \quad \theta = \pm\pi \text{ হইলে } \frac{dy}{dx} = \pm\infty$$

সুতরাং সাইক্লয়ডটি $\theta = -\pi$ ও $\theta = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত এবং ইহার শীর্ষবিন্দু O(0, 0).

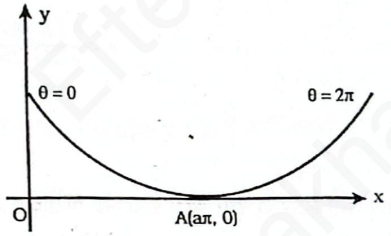


(iii) সাইক্লয়ডের সমীকরণ $x = a(\theta - \sin\theta)$

$y = a(1 + \cos\theta)$ হইলে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = -\cot\frac{\theta}{2}$$

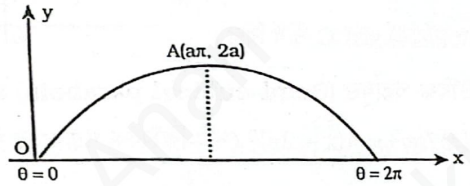
$\theta = 0, 2\pi$ হইলে $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$, সুতরাং সাইক্লয়েডটি $\theta = 0$ ও $\theta = 2\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত এবং ইহার শীর্ষবিন্দু A(aπ, 0).



(iv) সাইক্লয়েডের সমীকরণ $x = a(\theta - \sin\theta)$

$y = a(1 - \cos\theta)$ হইলে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \cot\frac{\theta}{2}, \ \theta = 0, 2\pi \text{ হইলে } \frac{dy}{dx} = \pm\infty,$$ সুতরাং সাইক্লয়েডটি $\theta = 0$ ও $\theta = 2\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত এবং ইহার শীর্ষবিন্দু A(aπ, 2a).



2. অ্যাসট্রোয়েড (Astroid) ঃ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

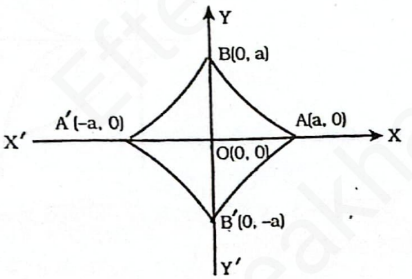
বা $x = a\cos^3\theta$,

$y = a\sin^3\theta$

ইহা অ্যাসট্রোয়েডের সমীকরণ। যাহা উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং যাহার প্রান্ত বিন্দুগুলো

A(a, 0), A′(–a, 0), B(0, a)

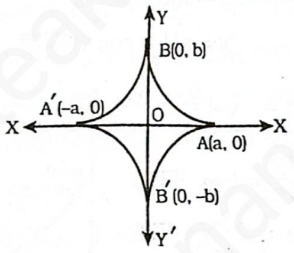
এবং B′(0, –a).



3. চার কাস্প যুক্ত হাইপো-সাইক্লয়েড (Fowr cusped Hypo-eycloid) ঃ

ইহার সমীকরণ হইল $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$

বা $x = a\cos^3\theta$, $y = b\sin^3\theta$; যাহা উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম এবং প্রান্ত বিন্দুগুলো হইল A(a, 0), A(– a, 0) এবং B(0, b), B′(0, – b).



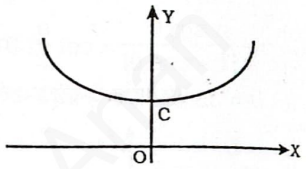
যদি a = b হয়, তবে ইহা অ্যাসট্রোয়েডে (Astroid) পরিনত হয়।

4. ক্যাটেনারী (Catenary) ঃ কোন সুষম তারকে দুইটি বিন্দু হতে অভিকর্ষীয় বলের প্রভাবে ঝুলালে যে একটি বক্ররেখা উৎপন্ন হয় তাহাকে ক্যাটেনারী (Catenary) বলে।

ইহার সমীকরণ $y = c\cosh\frac{x}{c}$

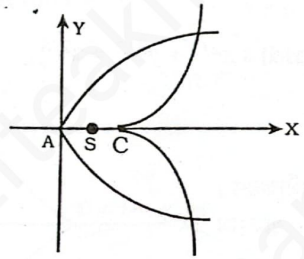
$= \frac{c}{2}(e^{x/c} + e^{-x/c})$

এখন OC = c (চিত্রে) এবং C শীর্ষ বিন্দু।



5. সেমি-কিউবিক পরাবৃত্ত (Semi-cubical parabola) ঃ

ইহার সমীকরণ $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$ সেমি-কিউবিক পরাবৃত্তের শীর্ষ C(2a, 0).

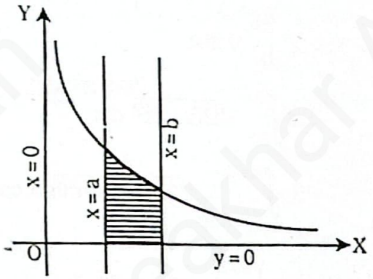


উদাহরণ–1. x অক্ষ $xy = c^2$ অধিবৃত্ত x = a এবং x = b সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DUH–1986]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $xy = c^2$ ..... (1) ইহা একটি আয়তাকার হাইপারবোলা।

যেহেতু x = 0 এর জন্য $y = \infty$ এবং y = 0 এর জন্য $x = \infty$ হয়। কাজেই x = 0[y অক্ষ] এবং y = 0[x অক্ষ] (1) এর দুইটি অসীমতট।

মনে করি a > 0, b> a তবে ক্ষেত্রটি প্রথম চর্তুভাগে অবস্থান করবে।



$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = \int_a^b y\,dx$

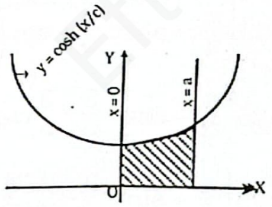
$= c^2\int_a^b \frac{dx}{x}$ [(1) নং দ্বারা]

$= c^2[\ln x]_a^b = c^2[\ln b - \ln a] = c^2 \ln\frac{b}{a}$ বর্গ একক।

উদাহরণ–2. $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ বক্ররেখা x অক্ষ এবং x = 0 ও x = a রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বক্ররেখাটি

$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ ..... (1)



এখানে স্পষ্ট যে, যে ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল বের করতে হবে তার জন্য x এর সীমা হলো x = 0 হতে x = a.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = \int_0^a y\,dx = \int_0^a c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)dx$ [(1) নং দ্বারা]

$= \left[c^2\sinh\left(\frac{x}{c}\right)\right]_0^a = c^2\left\{\sinh\left(\frac{a}{c}\right) - \sinh(0)\right\}$

$= c^2\sinh\left(\frac{a}{c}\right)$ বর্গ একক। $[\because \sinh(0) = 0]$

উদাহরণ–3. $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং x = 3 দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্ত এবং রেখাটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র ABCDA = 2 × (ABDA অংশের ক্ষেত্রফল) যেখানে x এর সীমা 3 হইতে 5 পর্যন্ত।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল।

$$R = 2\int_3^5 y\,dx$$

$$= 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx$$

$$= 2\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi/2} \sqrt{25(1-\sin^2\theta)}\,5\cos\theta\,d\theta$$

$$= 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi/2} 2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= 25\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi/2}$$

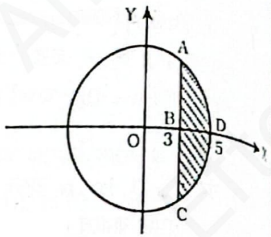
$$= 25\left[\theta + \sin\theta\ \cos\theta\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi/2}$$

$$= 25\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\right]$$

$$= 25\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\cos\cos^{-1}\frac{4}{5}\right]$$

$$= 25\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\right]$$

$$= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12 \text{ বর্গ একক।}$$



যেহেতু $x^2 + y^2 = 25$

$y^2 = 25 - x^2$

$\therefore y = \sqrt{25 - x^2}$

ধরি $x = 5\sin\theta$

$dx = 5\cos\theta\,d\theta$

$\therefore x = 3$ হলে $\theta = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

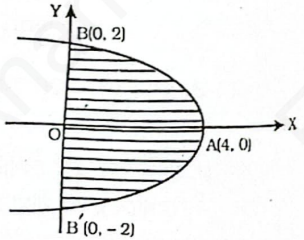
$x = 5$ হলে $\theta = \frac{\pi}{2}$

উদাহরণ–4. y অক্ষ এবং $y^2 = 4 - x$ বক্ররেখার মধ্যবর্তী ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[NUS–1994]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y^2 = 4 - x$ ..... (1)

(1) নং রেখাটি x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। যদি $y = 0$ হয় তবে $x = 4$ হয়। অতএব (1) নং রেখার শীর্ষবিন্দু A(4, 0).

এখন (1) নং রেখাটি y অক্ষকে ($x = 0$) B(0, 2) ও B′(0, – 2) বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং প্রথম চতুর্ভাগে x এর সীমা $x = 0$ হতে $x = 4$.



$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = 2\int_0^4 y\,dx$

$\Rightarrow R = 2\int_0^4 (4-x)^{1/2}\,dx$ [(1) নং দ্বারা]

$$\Rightarrow R = 2.\left[\frac{(4-x)^{3/2}}{(-1).\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$\Rightarrow R = -2.\frac{2}{3}[0 - (4)^{3/2}]$$

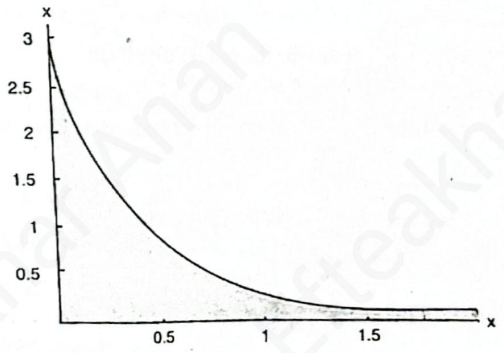
$$\Rightarrow R = \frac{4}{3}(2^2)^{3/2} = \frac{4}{3}.2^3 = \frac{4}{3}.8 = \frac{32}{3} \text{ বর্গ একক।}$$

উদাহরণ–5. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ বক্ররেখা ও অক্ষরেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের কর। **[DUH–1967]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ ..... (1)

(1) নং সমীকরণে $y = 0$ বসাইলে পাই $x = a$। অতএব (1) নং রেখাটি x অক্ষকে A(a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে। অনুরূপভাবে (1) নং রেখাটি y অক্ষকে B(0, a) বিন্দুতে ছেদ করে।

এখানে স্পষ্ট যে $x, y < 0$ এর জন্য রেখাটি কাল্পনিক হয়। অতএব $x, y < 0$ এলাকায় রেখাটির অস্তিত্ব নেই। অতএব রেখাটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করিবে। যেখানে x এর সীমা $x = 0$ হতে $x = a$ পর্যন্ত।



$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = \int_0^a y\,dx = \int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx$ [(1) নং দ্বারা]

$$= \int_0^a (a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x)dx$$

$$= \left[ax = \frac{4}{3}\sqrt{a}x^{3/2} + \frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

$$\Rightarrow R = a^2 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{6} \text{ বর্গ একক।}$$

উদাহরণ-6. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ রেখা দ্বারা বেষ্টিত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[NUH(NM)-2002, 2008, 2009, DUH-1986, 1988, DUS-1982]

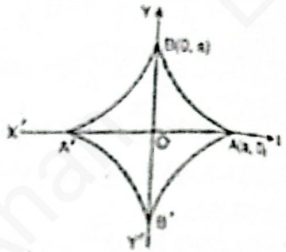
সমাধান : প্রদত্ত রেখা $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ..... (1)

এখানে (1) নং রেখাটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(1) নং রেখাটিতে $y = 0$ বসাই

$\therefore$ (1) $\Rightarrow x^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow x = \pm a$.

অতএব (1) নং রেখাটি x অক্ষের ($y = 0$) সাথে A(a, 0) ও A′(−a, 0) বিন্দুতে মিলিত হয়। অনুরূপভাবে (1) নং রেখাটি y অক্ষের ($x = 0$) সাথে B(0, a) ও B′(0, − a) বিন্দুতে মিলিত হয়। অতএব OAB ক্ষেত্রটির জন্য x এর সীমা $x = 0$ হইতে $x = a$.



$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = 4$[OABO এর ক্ষেত্রফল] $= 4\int_0^a y\,dx$ ..... (2)

(1) নং রেখার পরামিতিক সমীকরণ $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$

$\therefore dx = -3a\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$ $\quad\therefore \theta$ এর সীমা $\theta = \frac{\pi}{2}$ হতে $\theta = 0$

$\therefore$ (2) $\Rightarrow R = -4\int_{\pi/2}^{0} a\sin^3\theta.\,3a\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$

$= 12a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$= 12a^2\dfrac{\Gamma\frac{5}{2}\Gamma\frac{3}{2}}{2\Gamma 4}$ [গামা ফাংশন দ্বারা]

$= 12a^2\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.3.2.1} = \dfrac{3\pi a^2}{8}$ বর্গ একক।

উদাহরণ-7. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েড এবং ইহার ভূমি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[NUH-2008, DUS-1982]**

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ ..... (1)

$\therefore \dfrac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta), \dfrac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$

এখানে স্পষ্ট যে প্রদত্ত সাইক্লয়েডটির জন্য θ এর সীমা 0 হতে 2π.



$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = \int_0^{2\pi} y\dfrac{dx}{d\theta}\,.\,d\theta$

$\Rightarrow R = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta).\,a(1 - \cos\theta)d\theta = a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos\theta)^2\,d\theta$

$= a^2\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2 d\theta = 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\dfrac{\theta}{2}\,d\theta$

ধরি $\dfrac{\theta}{2} = x \Rightarrow d\theta = 2\,dx$ যখন $\theta = 0$ তখন $x = 0$ এবং যখন $\theta = 2\pi$ তখন $x = \pi$

$\therefore R = 4a^2\int_0^{\pi}\sin^4 x.\,2\,dx = 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx = 8a^2.\,2\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx$

$= 16a^2\dfrac{\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = 16a^2\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}}{2.2.1} = 3\pi a^2$ বর্গ একক।

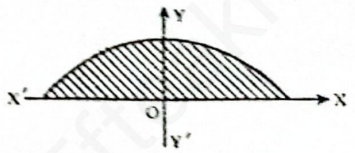
উদাহরণ-8. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ সাইক্লয়েড ও উহার ভূমি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত রেখা $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ ..... (1)

$\therefore \dfrac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta), \dfrac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \dfrac{-a\sin\theta}{a(1 + \cos\theta)} = \dfrac{-2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2a\cos^2\frac{\theta}{2}} = -\tan\dfrac{\theta}{2}$

যেহেতু $\theta = -\pi$ ও $\theta = \pi$ এর জন্য $\dfrac{dy}{dx} = \pm\infty$ হয়। সেহেতু (1) নং সাইক্লয়েড এ θ এর সীমা $-\pi$ হতে π.



$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = \int_{-\pi}^{\pi} y\dfrac{dx}{d\theta}\,.\,d\theta$

$\Rightarrow R = \int_{-\pi}^{\pi} a(1 + \cos\theta).\,a(1 + \cos\theta)d\theta$ [(1) নং দ্বারা]

$= 2a^2\int_0^{\pi}(1 + \cos\theta)^2\,d\theta = 2a^2\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)^2 d\theta$

$= 8a^2\int_0^{\pi}\cos^4\dfrac{\theta}{2}\,d\theta$

ধরি $\frac{\theta}{2} = x \Rightarrow d\theta = 2dx$. $\theta = 0$ হলে $x = 0$ হয় এবং $\theta = \pi$ হলে $x = \frac{\pi}{2}$ হয়।

$$\therefore R = 8a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 x.\, 2dx = 16a^2 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\frac{1}{2}}{2\Gamma(3)}$$

$$= 16a^2 . \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} . \sqrt{\pi} . \sqrt{\pi}}{2.2.1} = 3\pi a^2 \text{ বর্গ একক।}$$

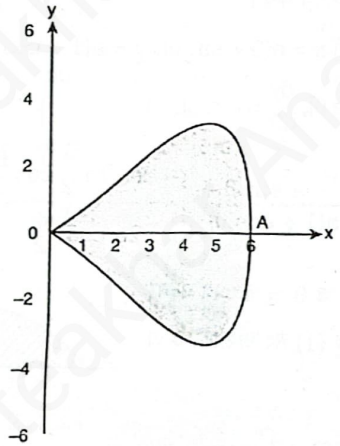
উদাহরণ–9. $a^2y^2 = x^3(2a - x)$ বক্ররেখাটি দ্বারা আবদ্ধ সম্পূর্ণ অংশের ক্ষে নির্ণয় কর। **[DUH–1985, DUS-19**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $a^2y^2 = x^3(2a - x)$ ..... (1) যাহা x অক্ষের সাপে প্রতিসম।

(1) নং রেখায় $y = 0$ বসালে পাই

$$x^3(2a - x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2a$$

অতএব (1) নং রেখাটির O(0, 0) ও A(2a, 0) বিন্দুগামী। $x > 2a$ এবং $x <$ এলাকায় রেখাটির অস্তিত্ব নেই।



প্রথম চতুর্ভাগে x এর সীমা O হতে 2a পর্যন্ত।

অতএব নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = 2\int_0^{2a} y\, dx$

$$= 2\int_0^{2a} \frac{x^{3/2}\sqrt{2a - x}}{a} dx \quad [(1) \text{ নং দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow R = \frac{2}{a}\int_0^{2a} x^{3/2}\sqrt{2a - x}\, dx$$

ধরি $x = 2a \sin^2\theta$

$\therefore dx = 4a \sin\theta \cos\theta\, d\theta$. $x = 0$ হলে $\theta = 0$ এবং $x = 2a$ হলে $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore R = \frac{2}{a}\int_0^{\pi/2} (2a \sin^2\theta)^{3/2} \times \sqrt{(2a - 2a \sin^2\theta)} \times 4a \sin\theta \cos\theta\, d\theta$$

$$= 32a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 32a^2 \frac{\Gamma\frac{5}{2}\Gamma\frac{3}{2}}{2\Gamma 4}$$

$$= 32a^2 \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} . \sqrt{\pi} . \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.3.2.1} = \pi a^2 \text{ বর্গ একক।}$$

উদাহরণ–10. $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[DUH–1961, 1981]

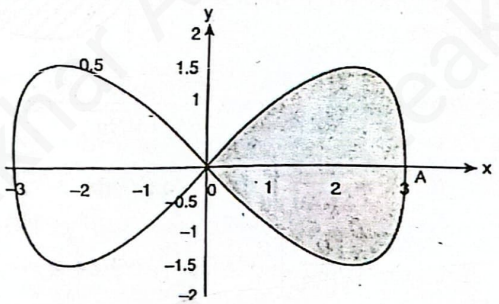
সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ ..... (1)

যাহা উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। এখন $y = 0$ বসালে পাই

$$x^2(a^2 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm a$$

$\therefore$ (1) নং রেখাটি x অক্ষের সাথে O(0, 0), A(a, 0) ও A′(–a, 0) বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রথম চর্তুভাগে রেখাটির জন্য x এর সীমা O হতে a পর্যন্ত।



$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = 2\int_0^a y\, dx$

$$\Rightarrow R = 2\int_0^a \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a} dx \quad [(1) \text{ নং দ্বারা}]$$

ধরি $x = a\sin\theta \quad \therefore dx = a\cos\theta\, d\theta$

$x = 0$ হলে $\theta = 0$. $x = a$ হলে $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore R = \frac{2}{a}\int_0^{\pi/2} a\sin\theta . a\cos\theta . a\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta = 2a^2\frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$= 2a^2.\frac{1.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}}{2.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{2a^2}{3}$$ বর্গ একক।

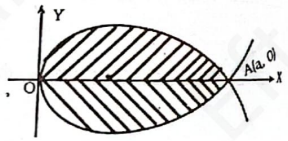
উদাহরণ–11. $3ay^2 = x(x-a)^2$ বক্ররেখা দ্বারা গঠিত ফাঁসের (loop) ক্ষেত্র নির্ণয় কর। **[NUH–2001, NUH(N...)–200...]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $3ay^2 = x(x-a)^2$ ..... (1)

যাহা x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। $y = 0$ বসালে (1) হইতে পাই

$$x(x-a)^2 = 0 \Rightarrow x = 0, a$$

অতএব (1) নং রেখাটি x অক্ষকে O(0, 0) ও A(a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে। $x < 0$ এর জন্য রেখাটির অস্থিত্ব নেই। অতএব ফাঁসটি $x = 0$ হতে $x = a$ পর্যন্ত বিস্তৃত।



$$\therefore \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল } R = 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \frac{\sqrt{x}\,(x-a)}{\sqrt{3a}}dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(3a)}}\int_0^a (x^{3/2} - ax^{1/2})dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(3a)}}\left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}ax^{3/2}\right]_0^a$$

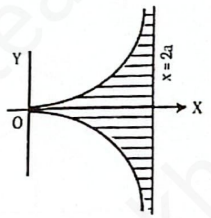
$$= \frac{2}{\sqrt{(3a)}}\left[\frac{2}{5}a^{5/2} - \frac{2}{3}a.a^{3/2}\right]$$

$$= -\frac{8a^2}{15\sqrt{3}} = \frac{8a^2}{15\sqrt{3}}$$ বর্গ একক। [(–) চিহ্ন উপেক্ষা করে]

উদাহরণ–12. $x^3 = y^2(2a - x)$ বক্ররেখা ও ইহার অসীমতট এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DUS–1978, RUH–1980]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $x^3 = y^2(2a-x) \Rightarrow y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ ..... (1)

যাহা x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। $y = 0$ হলে $x = 0$ হয়। অতএব (1) নং রেখাটি মূলবিন্দু (0, 0) গামী।



(1) হতে দেখা যায় যে $x < 0$ ও $x > 2a$ এর জন্য y এর মান কাল্পনিক হয়। অতএব $x < 0$ ও $x > 2a$ এলাকায় রেখাটির অস্তিত্ব নেই। $x = 2a$ হলে $y = \infty$ হয়। সুতরাং $x = 2a$, (1) নং রেখার অসীমতট।

$$\therefore \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল } R = 2\int_0^{2a} y\,dx$$

$$\Rightarrow R = 2\int_0^{2a}\frac{x^{3/2}}{\sqrt{2a-x}}dx$$

ধরি $x = 2a\sin^2\theta \Rightarrow dx = 4a\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$x = 0$ হলে $\theta = 0$ এবং $x = <a$ হলে $\theta = \frac{\pi}{2}$ হয়।

$$\therefore R = 2\int_0^{\pi/2}\frac{(2a\sin^2\theta)^{3/2}\,4a\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(2a)}\cos\theta}$$

$$= 16a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,d\theta = 16a^2.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma 3}$$

$$= 16a^2.\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}}{2.2.1} = 3a^2\pi = 3\pi a^2$$ বর্গ একক।

উদাহরণ–13. $xy^2 = 4a^2(2a - x)$ বক্ররেখা ও ইহার অসীমতট রেখার মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DUS–1990, 1993]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $xy^2 = 4a^2(2a-x)$ ..... (1)

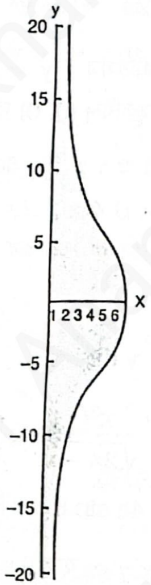
যাহা x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। (1) নং সমীকরণে $y = 0$ বসালে পাই

$$4a^2(2a-x) = 0 \Rightarrow x = 2a$$

অতএব (1) নং রেখাটি x অক্ষকে A(2a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

$$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{4a^2(2a-x)}{x}$$

যাহা হতে প্রতিয়মান হয় যে $x > 2a$ ও $x < 0$ এর জন্য y কাল্পনিক হয়। অর্থাৎ $x > 2a$ ও $x < 0$ এর জন্য রেখাটির অস্তিত্ব নেই। $x = 0$ হইল $y = \infty$ হয় অতএব y-অক্ষ উহার অসীমতট।



এখানে (1) নং রেখাটি $x = 0$ হতে $x = 2a$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = 2\int_0^{2a} y\,dx = 2\int_0^{2a} \frac{2a\sqrt{2a-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

ধরি $x = 2a\sin^2\theta \Rightarrow dx = 4a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$x = 0$ হলে $\theta = 0$, $x = 2a$ হলে $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore R = 4a\int_0^{2a} \frac{\sqrt{(2a)}\cos\theta.\,4a\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(2a)}\sin\theta}$$

$$= 16a^2\int_0^{2a}\cos^2\theta\,d\theta = 16a^2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma 2}$$

$$= 16a^2.\frac{\sqrt{\pi}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.1} = 4\pi a^2 \text{ বর্গ একক।}$$

উদাহরণ–14. $y = 2x$ সরল রেখা দ্বারা $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের কর্তিত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [DUS-1998]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y = 2x$ ..... (1) এবং $y^2 = 4x$ ..... (2)

এখানে (2) নং রেখাটি x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। (1) ও (2) নং সমাধান করি

$\therefore y^2 = 4x \Rightarrow (2x)^2 = 4x$ [(1) নং দ্বারা]

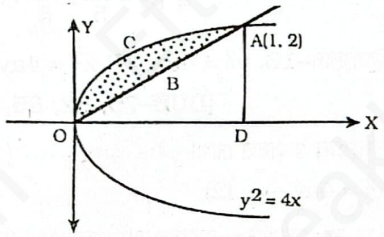
$\Rightarrow 4x^2 - 4x = 0$

$\Rightarrow 4x(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0, 1$

$\therefore y = 0, 2$ যথাক্রমে $x = 0, 1$ এর জন্য।

$\therefore$ (1) ও (2) নং রেখাদুইটি O(0, 0) এবং A(1, 2) বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু হতে x অক্ষের উপর AD লম্ব আঁকি। অতএব OD = 1 এবং AD = 2.



$\therefore \Delta OAD$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}.OD.AD = \frac{1}{2}.1.2 = 1$

আবার ODACO এর ক্ষেত্রফল $= \int_0^1 y\,dx = \int_0^1 \sqrt{4x}\,dx$ [(ii) নং দ্বারা]

$$= 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = 2.\frac{2}{3}[1^{3/2} - 0] = \frac{4}{3}$$

$\therefore$ OBACO এর ক্ষেত্রফল = ODACO এর ক্ষেত্রফল – ΔOAD এর ক্ষেত্রফল

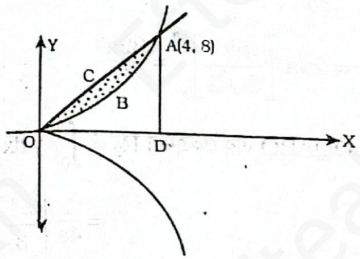
$= \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ বর্গ একক।

উদাহরণ–15. $y^2 = x^3$ বক্ররেখা এবং $y = 2x$ রেখা দ্বারা বেষ্টিত অংশের ক্ষেত্রফর নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y^2 = x^3$ ..... (1) এবং $y = 2x$ ..... (2)

(1) নং ও (2) নং রেখা সমাধান করে পাই $x = 0, 4$ এবং $y = 0, 8$

অতএব (1) ও (2) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু হইল O(0, 0) ও A(4, 8). A হতে x অক্ষের উপর AD লম্ব আঁকি।



$\therefore$ OD = 4 এবং AD = 8

$\therefore \Delta OAD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}.OD.AD = \frac{1}{2}.4.8 = 16.$

আবার ODABO এর ক্ষেত্রফল $= \int_0^4 y\,dx = \int_0^4 x^{3/2}\,dx$

$= \frac{2}{5}\left[x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{2}{5} \times 32 = \frac{64}{5}$.

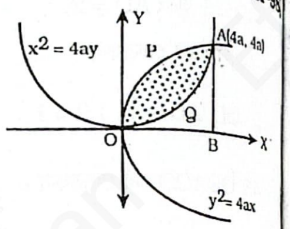
$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল R = OBACO এর ক্ষেত্রফল

= ΔODA এর ক্ষেত্রফল –ODABO এর ক্ষেত্রফল

$= 16 - \frac{64}{5} = \frac{16}{5}$ বর্গ একক।

উদাহরণ–16. $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের সাধারণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DUH–75, 82, 85, 03, DUS–88, RUH–68, JUH–86]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y^2 = 4ax$ ..... (1) এবং $x^2 = 4ay$ ..... (2)



(1) নং রেখাটি x অক্ষের সাপেক্ষে এবং (2) নং রেখাটি y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(1) নং (2) নং সমীকরণ সমাধান করে ছেদবিন্দু নির্ণয় করি

$(1) \Rightarrow \left(\frac{x^2}{4a}\right)^2 = 4ax \Rightarrow x^4 = 64a^3x \Rightarrow x(x^3 - 64a^3) = 0 \Rightarrow x = 0, 4a$

$\therefore y = 0$ ও $y = 4a$

সুতরাং রেখা দুইটি O(0, 0) ও A(4a, 4a) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ OPABO এর ক্ষেত্রফল $A_1 = \int_0^{4a} y\,dx$

$R_1 = \int_0^{4a} 2\sqrt{a}\,\sqrt{x}\,dx$ [(1) নং দ্বারা]

$= 2\sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{4a} = \frac{32a^2}{3}$

এবং OQABO এর ক্ষেত্রফল $R_2 = \int_0^{4a} y\,dx = \int_0^{4a} \frac{x^2}{4a}\,dx$ [(2) নং দ্বারা]

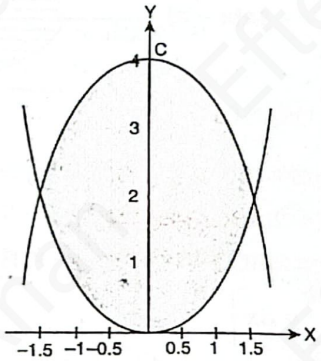
$= \frac{1}{4a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a} = \frac{16a^2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = R_1 - R_2 = \frac{32A_2}{3} - \frac{16a^2}{3} = \frac{16a^2}{3}$ বর্গ একক।

উদাহরণ–17. $x^2 = y$ ও $x^2 = 4 - y$ পরাবৃত্তদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DUH–1988, 1987]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $x^2 = y$ ..... (1) $x^2 = 4 - y$ ..... (2)

এখানে উভয় রেখাই y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। (1) নং রেখার শীর্ষ বিন্দু O(0, 0) এবং (2) নং রেখার শীর্ষ বিন্দু C(0, 4). (1) নং ও (2) নং সমীকরণ সমাধান করিয়া ছেদের ছেদ বিন্দু নির্ণয় কর।



$(2) \Rightarrow x^2 = 4 - y \Rightarrow x^2 = 4 - x^2$ [(1) নং দ্বারা]

$\Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$, (1) হতে $y = 2$ যখন $x = \pm\sqrt{2}$

অতএব (1) নং ও (2) নং রেখা $A(\sqrt{2}, 2)$ এবং $B(-\sqrt{2}, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল R = 2[OACO এর ক্ষেত্রফল]

= 2[OADO এর ক্ষেত্রফল + DACD এর ক্ষেত্রফল]

$= 2\left[\int_0^2 x\,dy + \int_2^4 x\,dy\right]$

$= 2\left[\int_0^2 y^{1/2}\,dy + \int_2^4 (4-y)^{1/2}\,dy\right]$ [(1) ও (2) নং দ্বারা]

$= 2\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 + 2\left[\frac{(4-4)^{3/2}}{(-1)^{3/2}}\right]_2^4$

$= 2.\frac{2}{3}[2^{3/2} - 0] - 2.\frac{2}{3}[0 - 2^{3/2}]$

$= \frac{4}{3}.2\sqrt{2} + \frac{4}{3}2\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ বর্গ একক।

উদাহরণ–18. $y^2 = 4a(x + a)$ এবং $y^2 = -4a(x - a)$ পরাবৃত্তদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DUH–1965]**

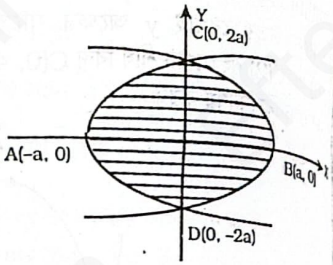
সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y^2 = 4a(x + a)$ ..... (1) এবং $y^2 = -4a(x - a)$ ..... (2)

(1) ও (2) নং সমীকরণদ্বয় x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(1) নং এ $y = 0$ বসালে $x = -a$ হয়

$\therefore$ (1) নং এর শীর্ষবিন্দু A(–a, 0)

অনুরূপভাবে (2) নং এর শীর্ষবিন্দু B(a, 0), (1) ও (2) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই



$(1) \Rightarrow 4a(x + a) = -4a(x - a)$ [(2) নং দ্বারা]

$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\therefore y = \pm 2a$

সুতরাং (1) ও (2) নং রেখা C(0, 2a) ও D(0, –2a) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল R = 2[ABCA এর ক্ষেত্রফল]

= 2[ACO এর ক্ষেত্রফল + OCB এর ক্ষেত্রফল]

$$= 2\left[\int_{-a}^{0} y\,dx + \int_{0}^{a} y\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_{-a}^{0} 2\sqrt{a}(x+a)^{1/2}\,dx + \int_{0}^{a} 2\sqrt{a}(a-x)^{1/2}\,dx\right]$$ [(1) ও (2) নং দ্বারা]

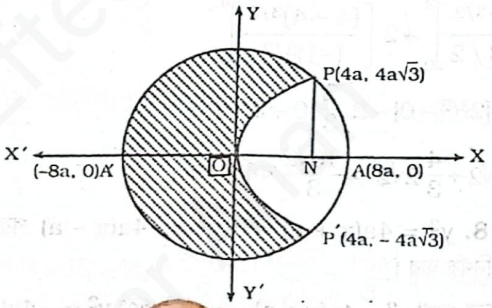
$$\Rightarrow R = 4\sqrt{a}\left[\frac{(x+a)^{3/2}}{3/2}\right]_{-a}^{0} + 4\sqrt{a}\left[\frac{(a-x)^{3/2}}{(-1)^{3/2}}\right]_{0}^{a}$$

$$= 4\sqrt{a}\,\frac{2}{3}[a^{3/2} - 0] - 4\sqrt{a}\,\frac{2}{3}[0 - a^{3/2}]$$

$$= \frac{8a^2}{3} + \frac{8a^2}{3} = \frac{16a^2}{3}$$ বর্গ একক।

উদাহরণ–19. $x^2 + y^2 = 64a^2$ বৃত্তকে $y^2 = 12ax$ যে দুইটি অংশে বিভক্ত তার বৃহৎ অংশটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $x^2 + y^2 = 64a^2$ ..... (1) এবং $y^2 = 12ax$ ..... (2)



(1) নং সমীকরণটি একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ 8a. (2) নং সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত যাহার শীর্ষ বিন্দু (0, 0) এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব '12a'.

(1) নং ও (2) নং সমীকরণ সমাধান করি $\Rightarrow x^2 + 12ax - 64a^2 = 0$

$\Rightarrow x = 4a, -16a$ কিন্তু $x \neq -16a$ $\therefore x = 4a$

অতএব (1) ও (2) নং রেখার ছেদবিন্দু P এর x এর স্থানাংক হইল 4a.

আবার (1) নং রেখাটিতে $y = 0$ বসাইলে পাই $x^2 = 64a^2 \Rightarrow x = \pm 8a$

$\therefore$ (1) নং রেখাটি x অক্ষকে (y = 0), A(8a, 0) ও A′(–8a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে। এখানে উভয় রেখাই x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল R = (বৃত্তের ক্ষেত্রফল) – (OP′APO এর ক্ষেত্রফল)

$= \pi(8a)^2 - 2$[OAPO এর ক্ষেত্রফল]

$= 64\pi a^2 - 2$[OPN এর ক্ষেত্রফল + PAN এর ক্ষেত্রফল]

$$= 64\pi a^2 - 2\left[\int_{0}^{4a}\sqrt{12ax}\,dx + \int_{4a}^{8a}\sqrt{64a^2 - x^2}\,dx\right]$$

$$= 64\pi a^2 - 2\left[2\sqrt{3}a\int_{0}^{4a}\sqrt{x}\,dx + \int_{4a}^{8a}\sqrt{(8a)^2 - x^2}\,dx\right]$$

$$= 64\pi a^2 - 2.2\sqrt{3}a\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{0}^{4a}$$

$$-2\left[\left\{\frac{1}{2}x\sqrt{64a^2 - x^2} + \frac{1}{2}.64a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{8a}\right)\right\}\right]_{4a}^{8a}$$

$$= 64\pi a^2 - 4\sqrt{3}a\left\{\frac{2}{3}(4a)^{3/2} - 0\right\} - 2$$

$$\left\{0 + 32a^2\sin^{-1}(1) - \frac{1}{2}4a.\,4\sqrt{3}.a - 32a^2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= 64\pi a^2 - \frac{64}{3}\sqrt{3}.a^2 - 32\pi a^2 + 16\sqrt{3}.\,a^2 + \frac{32}{3}\pi a^2$$

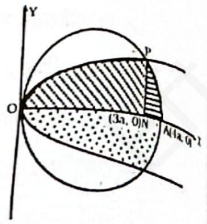
$$= \frac{16}{3}a^2(8\pi - \sqrt{3})$$ বর্গ একক।

উদাহরণ–20. $y^2 = ax$ এবং $x^2 + y^2 = 4ax$ বক্ররেখার সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y^2 = ax$ ..... (1) এবং $x^2 + y^2 = 4ax$ ..... (2)

(1) নং রেখাটি একটি পরাবৃত্ত (Parabola) যাহার শীর্ষ (0, 0) এবং (2) নং রেখাটি একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র (2a, 0) এবং ব্যাসার্ধ 2a.

(1) নং (2) নং সমীকরণ সমাধান করি



$x^2 = ax = 4ax$

$\Rightarrow x^2 - 3ax = 0$

$\Rightarrow x(x - 3a) = 0 \Rightarrow x = 0, 3a$

অতএব (1) ও (2) নং রেখার ছেদবিন্দু P যাহার x এর স্থানাংক হইল 3a (চিত্র দেখ)।

এখন (2) নং রেখা ও x অক্ষের ($y = 0$ ছেদ বিন্দু নির্ণয় কর।

$\therefore (2) \Rightarrow x^2 = 4ax \quad [\because y = 0]$

$\Rightarrow x(x - 4a) = 0 \Rightarrow x = 0, 4a$

অতএব (2) নং রেখাটি x অক্ষেকে (0, 0) ও (4a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু উভয় রেখাই x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। অতএব নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

R = 2[OAPO এর ক্ষেত্রফল]

= 2[OPN এর ক্ষেত্রফল + PNA এর ক্ষেত্রফল]

$= 2\left[\int_0^{3a} y\,dx + \int_{3a}^{4a} y\,dx\right]$

$= 2\left[\int_0^{3a} \sqrt{ax}\,dx + \int_{3a}^{4a} \sqrt{4ax - x^2}\,dx\right]$

$= 2\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{3a} + 2\int_{3a}^{4a} \sqrt{(2a)^2 - (x - 2a)^2}\,dx$

$= \frac{4\sqrt{a}}{3}[(3a)^{3/2} - 0] + 2\left[\frac{1}{2}(x - 2a)\sqrt{4a^2 - (x - 2a)^2}\right.$

$\left. + \frac{1}{2}4a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x^2a}{2a}\right)\right]_{3a}^{4a}$

$= 4\sqrt{3}.a^2 + 2\left[2a^2 \sin^{-1}(1) - \frac{1}{2}a\sqrt{(3a^2)} - 2a^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

$= 3\sqrt{3}.a^2 + 2\pi a^2 - a\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi a^2$

$= 3\sqrt{3}a^2 + \frac{4}{3}\pi a^2$ বর্গ একক।

উদাহরণ-21. $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত ও $x^2 + 4y^2 = 9$ উপবৃত্তের সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $x^2 + y^2 = 4$ ..... (i) এবং $x^2 + 4y^2 = 9$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ সমাধান করি (ii) $\Rightarrow x^2 + 4y^2 = 9$

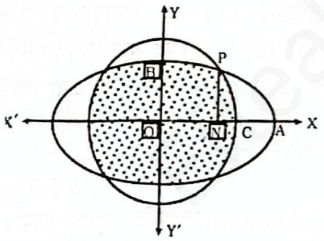
$\Rightarrow x^2 + 4(4 - x^2) = 9 \Rightarrow x^2 + 16 - 4x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)}$

অতএব প্রথম চতুর্ভাগের রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু P এর জন্য $x = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)}$

(1) নং রেখা ও x অক্ষের ($y = 0$) ছেদ বিন্দু বের করি।

$\therefore (1) \Rightarrow x = \pm 2 \quad \therefore C(2, 0)$

অতএব O হতে N পর্যন্ত x এর সীমা



$x = 0$ হতে $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ এবং N হতে C বিন্দু পর্যন্ত x এর সীমা $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ হতে $x = 2$.

যেহেতু উভয় রেখাই x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল R = 4[OCPBO এর ক্ষেত্রফল]

= 4[OBPNO এর ক্ষেত্রফল + CPN এর ক্ষেত্রফল]

$= 4\left[\int_0^{\sqrt{7/3}} y\,dx + \int_{\sqrt{7/3}}^{2} y\,dx\right]$

$= 4\left[\int_0^{\sqrt{7/3}} \frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2}\,dx + \int_{\sqrt{7/3}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx\right]$

$= 2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{9x^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^{\sqrt{7/3}} + 4\left[\frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\sqrt{7/3}}^{2}$

$= 2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)}\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)} + \frac{8}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\right]$

$+ 4\left[0 + 2\sin^{-1}(1)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)} - 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\right]$

$$= \frac{2\sqrt{(35)}}{3} + 9\sin^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} + 4\pi - \frac{2}{3}\sqrt{(35)} - 8\sin^{-1}\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

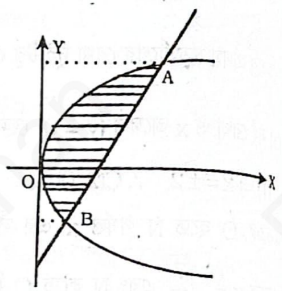
$$= 4\pi + 9\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right) - 8\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$$ বর্গ একক।

উদাহরণ–22. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্ত ও $y = 4x - 4$ সরলরেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রফল বাহির কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা

$y^2 = 8x$ ..... (1) এবং

$y = 4x - 4$ ..... (2)



এখানে (1) নং পরাবৃত্তের শীর্ষ O(0, 0). (1) ও (2) নং সমীকরণ সমাধান করলে তাদের ছেদবিন্দু পাওয়া যায় $A(2, 4)$ ও $B\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

$\therefore$ (1) ও (2) নং হইতে পাওয়া যায় $x = \frac{y^2}{8} = f(y)$

এবং $x = \frac{1}{4}(y + 4) = \phi(y)$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $R = \left|\int_{-2}^{4}\{f(y) - \phi(y)\}dy\right|$

$$= \left|\int_{-2}^{4}\left\{\frac{y^2}{8} - \frac{1}{4}(y + 4)\right\}dy\right|$$

$$= \left|\frac{1}{8}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}y^2 + 4y\right]_{-2}^{4}\right|$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}\cdot 64 + \frac{1}{3}\cdot 8\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\cdot 16 + 4.4 - \frac{1}{2}\cdot 4 + 4.2\right]$$

$$= \frac{1}{8}(24) - \frac{1}{4}(30)$$

$$= \left|3 - \frac{15}{2}\right| = \frac{9}{2}$$ বর্গ একক।

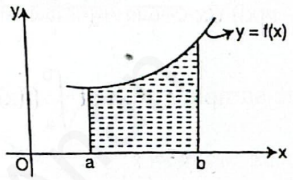
Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

21.A.1. যদি [a, b] ব্যবধিতে f(x) একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হয়, তবে x = a, x = b, y = f(x) এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র লিখ। (If f(x) is a continuous function on [a, b], then write the integral formula to find the area of the region bounded by x = a, x = b, y = f(x) and x-axis.)

Ans : প্রদত্ত শর্তে আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের ইন্টিগ্রাল সূত্র ঃ $\int_a^b f(x)\,dx$

21.A.2. $\int_a^b f(x)\,dx$ ক্ষেত্রের নমুনা চিত্র আঁক। (Draw the sample graph of $\int_a^b f(x)\,dx$)

Ans : $\int_a^b f(x)\,dx$ ক্ষেত্রের নমুনা চিত্র আকাঁ হইল ঃ

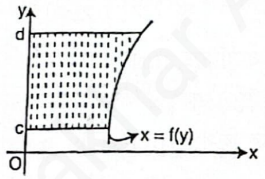


21.A.3. যদি [c, d] ব্যবধিতে f(y) একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হয়, তবে y = c, y = d, x = f(y) এবং y অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র লিখ। (If f(y) is a continuous function on [c, d], then write the integral formula to find the area of the region bounded by y = c, y = d, x = f(y) and y-axis.)

Ans : প্রদত্ত শর্তে সীমাবদ্ধ এলাকার সমাকলন সূত্র ঃ $\int_c^d f(y)\,dy$.

21.A.4. $\int_c^d f(y)\,dy$ ক্ষেত্রের নমুনা চিত্র আকঁ। (Draw the sample graph of $\int_c^d f(y)\,dy$.)

Ans : নিম্নে নমুনা চিত্র আকাঁ হইল ঃ



21.A.5. ধরি $y = f(x)$ এবং $y = g(x)$ ফাংশনদ্বয় [a, b] ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. প্রদত্ত ব্যবধিতে ফাংশনদ্বয়ের মধ্যবর্তী সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র লিখ। (Let $y = f(x)$ and $y = g(x)$ are two continuous functions on [a, b] and $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Write the integral formula to find area of the region bounded by the two functions on the given interval.)

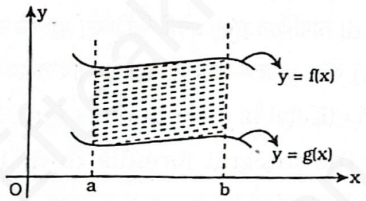
Ans : প্রদত্ত শর্তে আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফর নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র ঃ

$$\int_a^b (f(x) - (x))\, dx.$$

21.A.6. $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$ ক্ষেত্রের নমুনা চিত্র আঁক।

(Draw the sample graph of $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$.)

Ans : নিম্নের নমুনা চিত্র আঁকা হইল ঃ

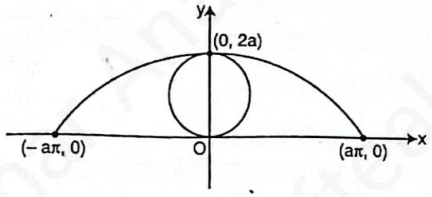


21.A.7. সাইক্লয়েড কাকে বলে? (What is called cycloid?)

Ans : একটি সরলরেখার উপর একটি ঘূর্ণায়মান বৃত্তের উপর অবস্থিত যে কোন একটি বিন্দুর সঞ্চারপথকে সাইক্লয়েড বলে। **[NUH-2010]**

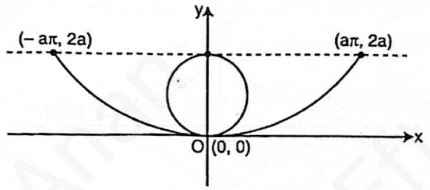
21.A.8. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ দ্বারা কি নির্দেশিত হয়? ইহার চিত্র আঁক। (What is denoted by $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$? Draw it.)

Ans : $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ দ্বারা সাইক্লয়েড নির্দেশিত হয়। ইহার চিত্র নিম্নে আঁকা হইল।



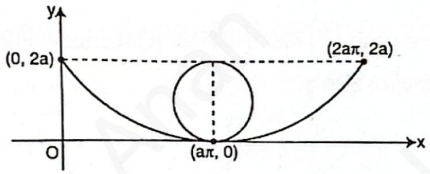
21.A.9. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডটি আঁক।

Ans : প্রদত্ত সাইক্লয়েডটি আঁকা হইল ঃ



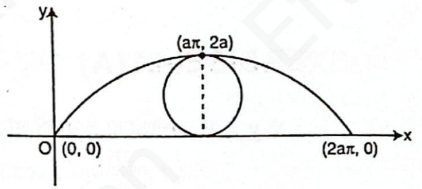
21.A.10. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ সাইক্লয়েডটি আঁক।

Ans : প্রদত্ত সাইক্লয়েডটি আঁকা হইল ঃ



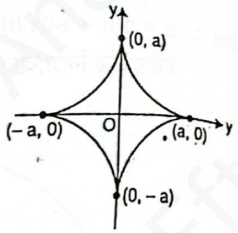
21.A.11. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডটি আঁক।

Ans : প্রদত্ত সাইক্লয়েডটি নিম্নে আঁকা হইল ঃ



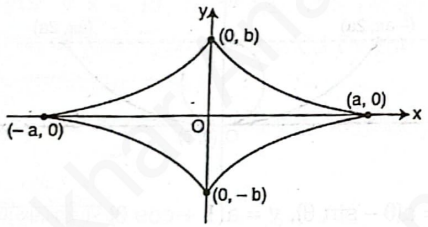
21.A.12. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ কি নির্দেশ করে? ইহার চিত্র আঁক। (What is denoted by $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$? Draw its graph.)

Ans : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ অ্যাসট্রোয়েড (Astroid) নির্দেশ করে। ইহা আঁকা হইল ঃ



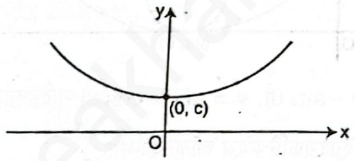
21.A.13. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ দ্বারা কি নির্দেশিত হয়? ইহার চিত্র আঁক।

Ans : $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ দ্বারা হাইপো-সাইক্লয়েড (Hypo-cycloi নির্দেশিত হয়। ইহার চিত্র নিম্নে আঁকা হইল ঃ



21.A.14. $y = c \cosh\left(\frac{y}{c}\right)$ দ্বারা কি নির্দেশিত হয়? ইহার চিত্র আঁক।

Ans : $y = c \cosh\left(\frac{y}{c}\right)$ দ্বারা ক্যাটেনারী (Catenary) নির্দেশিত হয়। ইহার চি নিম্নে আঁকা হইল ঃ



EXERCISE–21(A)

1. $y = x^3$, y অক্ষ এবং $y = 1$ ও $y = 8$ রেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রে নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{45}{4}$ বর্গ একক।
2. $y = x^2$, x অক্ষ $x = 1$ এবং $x = 3$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{26}{3}$ বর্গ একক।

3. $y = 3x^2$ পরাবৃত্ত $x = 2$ ও $x = 4$ রেখা এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ 56 বর্গ একক।
4. $y = x^3$, $x = 0$ ও $x = 4$ রেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ 64 বর্গ একক।
5. প্রথম চতুর্ভাগের অবস্থানরত $xy^2 = 1$ রেখা, অক্ষদ্বয় এবং $x = 2$ সরল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $2\sqrt{2}$ বর্গ একক।
6. x অক্ষ $xy = a^2$, $x = a$ ও $x = 2a$ রেখাগুলো দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $a^2 \ln 2$.
7. $y = \sin x$ বক্ররেখা, অক্ষদ্বয় ও $x = \pi$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ 2 বর্গ একক।
8. x অক্ষ $y = 2 \cos x$, $x = -\frac{\pi}{2}$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ রেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের কর। উত্তর ঃ 4 বর্গ একক।
9. x অক্ষ $y = \ln x$, $x = a$ ও $x = b$ রেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ (i) $a \ln a - b \ln b - a + b$ যখন $0 < a < b < 1$

   (ii) $a \ln a + b \ln b - a - b + 2$; যখন $0 < a < 1 < b$.
10. $y = \cos h \frac{x}{c}$, $x = -c$, $x = c$ ও x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $c\left(e - \frac{1}{e}\right)$.
11. x অক্ষ $y = \tan x$, $x = 0$ ও $x = \frac{\pi}{4}$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{1}{2} \ln 2$
12. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত ও $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{16\pi}{2} - 16 \sin^{-1}\frac{3}{4} - 3\sqrt{7}$.
13. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের যে ক্ষুদ্রতম অংশটি $x = \frac{a}{2}$ রেখা দ্বারা কর্তিত হয়েছে সে অংশটির ক্ষেত্রফল বের কর। উত্তর ঃ $\frac{a^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$ বর্গ একক।
14. $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তের এক-চতুর্থাংশের ক্ষেত্রফর নির্ণয় কর। উত্তর ঃ 3π বর্গ একক।

15. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ πab বর্গ একক।

16. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত $x=0$, $x=c$ ও x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{b}{2a}\left[c\sqrt{a^2-c^2}+a^2\sin^{-1}\frac{c}{a}\right]$

17. $y^2=4ax$ পরাবৃত্ত এবং ইহার উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক।

18. x অক্ষ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্ত এবং যে কোন একটি কোটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{b}{2a}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\,ln_e\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)\right]$

19. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$ হাইপো-সাইক্লোয়েডটি দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[NU(NM)-2003, DUH-1963]** উত্তর ঃ $\frac{3}{8}\pi ab$ বর্গ একক।

20. $x=3+\cos\theta$, $y=\sin\theta$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফর নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ π বর্গ একক।

21. $x=3\cos\theta$, $y=2\sin\theta$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ 6π বর্গ একক।

22. $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ πab বর্গ একক।

23. $x(1+t^2)=1-t^2$, $y(1+t^2)=2t$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফর নির্ণয় কর। উত্তর ঃ π.

24. $x=a(\theta+\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ সাইক্লোয়েড ও ইহার ভূমি দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $3\pi a^2$ বর্গ একক।

25. $y^2=x^2(4-x)$ বক্ররেখা দ্বারা গঠিত ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $\frac{256}{15}$ বর্গ একক।

26. $y^2=x^2(x+a)$ রেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[DUH-2007] উত্তর ঃ $\frac{8}{15}a^{5/2}$ বর্গ একক।

27. $y^2=x^2(4-x^2)$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $\frac{16}{3}$ বর্গ একক।

28. $a^4y^2=x^4(a^2-x^2)$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $\frac{\pi a^2}{8}$ বর্গ একক।

29. $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ বর্গ একক।

30. $y^2=x(x-1)^2$ রেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[RUH-1980]**
উত্তর ঃ $\frac{8}{15}$ বর্গ একক।

31. $y^2(a-x)=x^2(a+x)$ রেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $2a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ বর্গ একক।

32. $x=a\sin 2t$, $y=a\sin t$ রেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $\frac{4}{3}a^2$ বর্গ একক।

33. $x^3=y^2(a-x)$ রেখা ও ইহার অসীমতটের অন্তবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $\frac{3a^2\pi}{4}$ বর্গ একক।

34. $y^2(4-x)=x^2$ রেখা এবং ইহার অসমিতট দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{64}{3}$ বর্গ একক।

35. $x^2(x^2+y^2)=a^2(y^2-x^2)$ রেখা এবং ইহার অসমিতট সমূহ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $a^2(\pi+2)$ বর্গ একক।

36. প্রমাণ কর যে $a^2y^2=x^3(2a-x)$ বক্ররেখার মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল; a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান।

37. প্রথম চতুর্ভাগের $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত হইতে $x+y=a$ রেখাটি যে অংশ কর্তিত করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{1}{4}a^2(\pi-2)$ বগ। একক।

38. $y^2=4x$ পরাবৃত্ত হইতে $y=x$ সরলরেখা দ্বারা কর্তিত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[RUH-1967, 1969] উত্তর ঃ $\frac{8}{3}$ বর্গ একক।

39. $y^2=2x$ পরাবৃত্ত হইতে $y=4x-1$ সরলরেখাটি যে অংশ ছেদ করে তার ক্ষেত্রফর নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{9}{32}$ বর্গ একক।

40. $x^3 = y^2$ বক্ররেখা হইতে $y = x$ সরলরেখাটি যে অংশ ছেদ করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{1}{10}$ বর্গ একক।

41. $y^2 = 12x$ এবং $x^2 = 12y$ পরাবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DUH-1988, 1987]** উত্তর ঃ 48 বর্গ একক।

42. $y^2 = x$ এবং $x = 3 - y^2$ বক্ররেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $2\sqrt{6}$ বর্গ একক।

43. $y^2 = 4a(x + a)$ এবং $y^2 = 4b(b - a)$, $(a > 0, b > 0)$ পরাবৃত্ত দুইটির সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{8}{3}(a + b)\sqrt{ab}$ বর্গ একক।

44. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্ত এবং $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $2\left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)$.

45. প্রমাণ কর যে $y^2 = ax$ পরাবৃত্ত ও $x^2 + y^2 = 2ax$ বৃত্তের মধ্যবর্তী যে অংশ x অক্ষের উপরে অবস্থিত উহার ক্ষেত্রফল হইবে $a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$ বর্গ একক। **[JUH-1996]**

46. $y^2 = 1 - x$ পরাবৃত্তের ভিতরে $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্তের যে অংশটুকু অবস্থিত তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[NUH-2002, DUH-1969, 2007]** উত্তর ঃ $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\right)$ বর্গ একক।

47. $y^2 = 4x$ এবং $y^2 = x$ পরাবৃত্ত দুইটি এবং $x = 1$ ও $x = 4$ সরলরেখা দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{28}{3}$ বর্গ একক।

48. $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত ও $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ বক্ররেখার মধ্যবর্তী সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\left(2\pi - \frac{4}{3}\right)a^2$ বর্গ একক।

49. $x = 1$ সরলরেখা ও $x = y^2(1 - x)$ বক্ররেখার মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ π বর্গ একক।

50. দেখাও যে $xy^2 = a^2(a - x)$ এবং $y^2(a - x) = a^2x$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $a^2(\pi - 2)$ বর্গ একক।



Chapter–21(B)

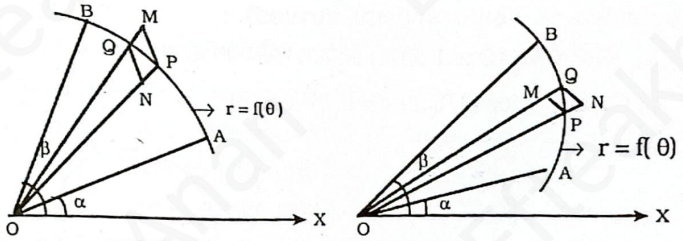
ক্ষেত্রফল (পোলার স্থানাংকে)

AREA (IN POLAR)

21.B.7. উপপাদ্য (Theorem) : যদি $r = f(\theta)$ অবিচ্ছিন্ন পোলার সমীকরণ হয় তবে প্রমাণ কর উক্ত সমীকরণ এবং $\theta = \alpha$ ও $\theta = \beta$ দুইটি ব্যাসার্ধ ভেক্টর দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হইবে

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta.$$

প্রমাণ ঃ



মনে করি $r = f(\theta)$ বক্ররেখার অংশ AB যাহা $\theta = \alpha$ এবং $\theta = \beta$ এর মধ্যে অবস্থিত। $P(r, \theta)$ বক্ররেখার উপর যে কোন বিন্দু এবং P এর খুব নিকটবর্তী $Q(r + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$ অপর একটি বিন্দু।

$\therefore \angle XOA = \alpha$, $\angle XOB = \beta$, $\angle POQ = \Delta\theta$, $OP = r$ এবং $OQ = r + \Delta r$.

OPM অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$, OQN অক্ষের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2.\Delta\theta$

উভয় চিত্রের ক্ষেত্রে $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta < \Delta A < \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2\Delta\theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}r^2 < \frac{\Delta A}{\Delta\theta} < \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2$$

যখন $Q \to P$ তখন $\Delta r \to 0$ এবং $\Delta\theta \to 0$

$$\therefore \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta\theta} = \frac{1}{2}r^2 \Rightarrow \frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}r^2 \Rightarrow dA = \frac{1}{2}r^2\, d\theta$$

সুতরাং OABO অংশের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$

21.B.8. পোলার সমীকরণে প্রতিসম সনাক্তকরণ (Symmetric identification in polar equations) :

(i) θ এর স্থলে $-\theta$ বসালে যদি সমীকরণটি অপরিবর্তীত থাকে, তবে রেখাটি আদি রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম হইবে। যেমন $r = a\cos\theta$.



(ii) θ এর স্থলে $(\pi - \theta)$ অথবা r এর স্থলে $-r$ ও θ এর স্থলে $-\theta$ একত্রে বসালে যদি সমীকরণটি অপরিবর্তীত থাকে তবে রেখাটি $\theta = \frac{\pi}{2}$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম হইবে।

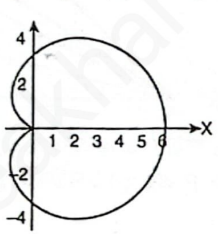
(iii) θ এর স্থলে $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ বসালে যদি সমীকরণটি অপরিবর্তীত থাকে তবে রেখা $\theta = \frac{\pi}{4}$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম হইবে।

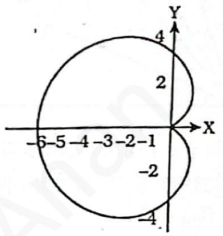
(iv) r এর স্থলে $-r$ বসালে যদি সমীকরণটি অপরিবর্তীত থাকে তবে সমীকরণটি দ্বারা সূচিত রেখা পোলের সাপেক্ষে প্রতিসম হইবে।

21.B.9. বিশেষ কিছু বক্ররেখার আকার ও বৈশিষ্ট (Shape and properties of some special curves) :

1. কার্ডিঅয়েড (Cordioide) ঃ ইহার সমীকরণ হলো

(i) $r = a(1 + \cos\theta)$ বা (ii) $r = a(1 - \cos\theta)$.





এখানে উভয় বক্ররেখা আদিরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম এবং আদি রেখার উপরাংশে উভয়রেখার জন্য $\theta = 0$ হতে $\theta = \pi$ পর্যন্ত পরিবর্তীত হয়।

(i) নং রেখায় A এর জন্য $\theta = 0$ এবং মূলবিন্দু O এর জন্য $\theta = \pi$

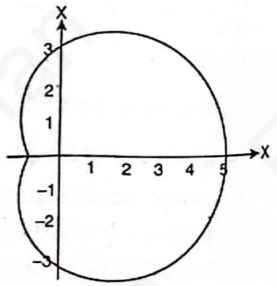
(ii) নং রেখায় A এর জন্য $\theta = \pi$ এবং মূলবিন্দু O এর জন্য $\theta = 0$.

উভয় বক্ররেখাই মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং মূলবিন্দুতে ইহাদের স্পর্শক হলো আদি রেখা A বিন্দুতে স্পর্শক হবে আদি রেখার উপর লম্ব।

2. লিমাকোণ (Limacon) ঃ ইহার সমীকরণ হলো $r = a + b\cos\theta$.

যখন $a > b$ হবে, তখন বক্ররেখাটি বাহিরের চিত্রের ন্যায় আকার ধারণ করবে এবং যখন $a < b$ হতে তখন বক্ররেখাটি ভিতরের চিত্রের ন্যায় (ফাঁসসহ) আকার ধারণ করে।

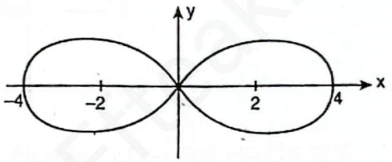
যদি $a = b$ হয়, তবে বক্ররেখাটি কার্ডিঅয়েডে (Cardioide) পরিনত হয়। [1 নং চিত্র]



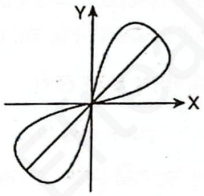
3. লেমনিসকেট (Lemniscate) ঃ

ইহার সমীকরণ $r^2 = a^2\cos 2\theta$ বা $(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$

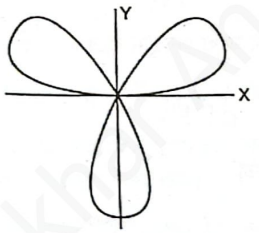
ইহা সমান দুইটি ফাঁস (loop) গঠন করে। যাহার প্রত্যেকটি আদিরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম এবং আদিরেখার প্রত্যেক ফাঁসকে (loop) সমান দুইভাবে ভাগ করে। এখানে $OA = OA' = a$ মূলবিন্দুতে এর স্পর্শকের সমীকরণ হলো $y = \pm x$.

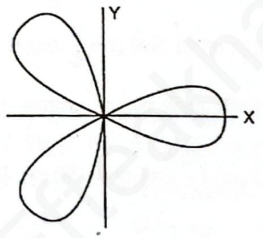


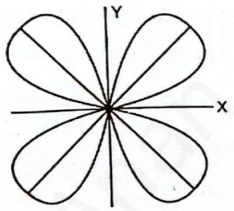
আবার $r^2 = a^2\sin 2\theta$; ইহাও একটি লেম্‌নিসকেট এর সমীকরণ। যাহা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। এবং প্রথম ও তৃতীয় চর্তুভাগে ইহা দুইটি সমান ফাঁস (loop) গঠন করে। মূলবিন্দুতে x অক্ষ ও y অক্ষ এর দুইটি স্পর্শক।

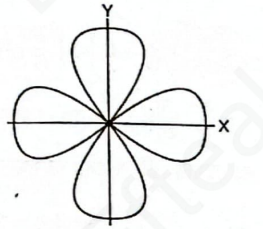


4. Loop (ফাঁস) ঃ ইহার সমীকরণ $r = a\sin n\theta$ বা $r = a\cos n\theta$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। এখানে সমীকরণগুলি n বা 2n সংখ্যক ফাঁস (loop) গঠন করে। যদি n বিজোড় বা জোড় সংখ্যা হয়।

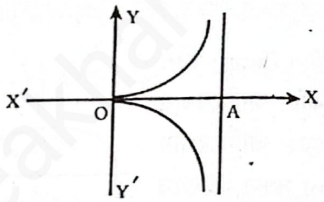








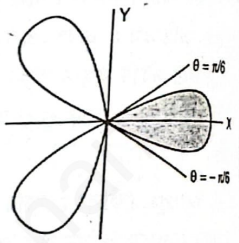
5. ছিসয়েড (Cissoid of Discles) ঃ



ইহার সমীকরণ হলো $y^2(2a - x) = x^3$ বা $r = \frac{2a \sin^2\theta}{\cos\theta}$

এখানে OA = 2a (চিত্রে) এবং x = 2a, ইহার একটি অসীমতট (Asyomptote)

উদাহরণ–23. r = a cos 3θ রেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, উহার সমস্ত ফাঁসগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DUS–1986, RUH–198**



সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা

$$r = a \cos 3\theta \quad \cdots\cdots (1)$$

(1) নং সমীকরণে ও একটি বিজোড় সংখ্যা; সুতরাং (1) নং সমীকরণে 3টি সমান ফাঁস আছে।

সমীকরণটিতে r = 0 বসালে $a \cos 3\theta = 0$

বা $\cos 3\theta = \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$ বা $3\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta = \pm\frac{\pi}{6}$

সুতরাং একটি ফাঁস $\theta = \frac{\pi}{6}$ এবং $\theta = -\frac{\pi}{6}$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

$\therefore$ নির্ণয় একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল $A = 2\int_0^{\pi/6} \frac{1}{6} r^2\, d\theta$

$\Rightarrow A = \int_0^{\pi/6} a^2 \cos^2 3\theta\, d\theta$ [(1) নং হতে]

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6} (1 + \cos 6\theta)\, d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{6}\sin 6\theta\right]_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) + \left(\frac{1}{6}\sin\pi - 0\right)\right]$$

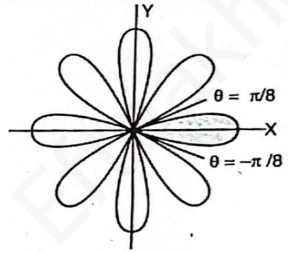
$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi a^2}{12}$$ বর্গ একক।

(1) নং রেখার 3টি ফাঁসের বা সমস্ত ফাঁসের ক্ষেত্রফল

$$= 3.A = 3.\frac{\pi a^2}{12} = \frac{\pi a^2}{4}$$ বর্গ একক।

উদাহরণ–24. r = a cos 4θ রেখা দ্বারা গঠিত ফাঁস সমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DUH–1988, DUS–1985]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $r = a \cos 4\theta$ ..... (1)



রেখাটিতে θ এর পরিবর্তে – θ বসালে অপরিবর্তীত থাকে। সুতরাং রেখাটি আদি রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। যেহেতু (1) নং রেখায় অবস্থানকৃত সংখ্যাটি 4, যাহা জোড় সংখ্য। সুতরাং (1) নং রেখায় 2.4 = 8টি ফাঁস আছে।

(1) নং রেখায় r = 0 বসালে $a \cos 4\theta = 0$ বা $\cos 4\theta = 0 = \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \theta = \pm\frac{\pi}{8}$

সুতরাং প্রথম চতুর্ভাগের ফাঁসের জন্য θ এর সীমা হলো O হতে $\frac{\pi}{8}$.

$\therefore$ সম্পূর্ণ ফাঁসগুলোর অর্থাৎ 8টির ক্ষেত্রফল

$A = 8.2\int_0^{\pi/8} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = 8\int_0^{\pi/8} a^2 \cos^2 4\theta\, d\theta$ [(1) নং হতে]

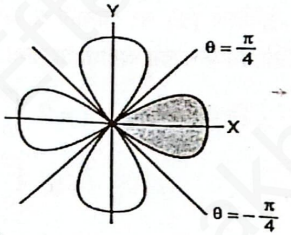
$$= 4a^2\int_0^{\pi/8} (1 + \cos 8\theta) d\theta = 4a^2\left[\theta + \frac{1}{8}\sin 8\theta\right]_0^{\pi/8}$$

$$= 4a^2\left[\left(\frac{\pi}{8} - 0\right) + \left(\frac{\pi}{8}\sin\pi - 0\right)\right]$$

$$= 4a^2.\frac{\pi}{8} = \frac{\pi a^2}{2}$$ বর্গ একক।

উদাহরণ–25. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ রেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল বাহির করে, উহার সমস্ত ফাঁসগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DUH–1968, 1989]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ..... (1)



সমীকরণটিতে r এর পরিবর্তে – r এবং θ এর পরিবর্তে – θ বসালে রেখাটি অপরিবততি থাকে। সুতরাং (1) নং রেখাটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(1) নং সমীকরণে r = 0 বসালে $0 = a^2 \cos 2\theta$

বা $\cos 2\theta = 0$ বা $2\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta = \pm\frac{\pi}{4}$

সুতরাং একটি ফাঁস $-\frac{\pi}{4}$ এবং $\frac{\pi}{4}$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

$\therefore$ নির্ণয় একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল $A = 2\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta$ [(1) নং হতে]

$= \frac{a^2}{2}[\sin 2\theta]_0^{\pi/4}$

$= \frac{a^2}{2}\left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$

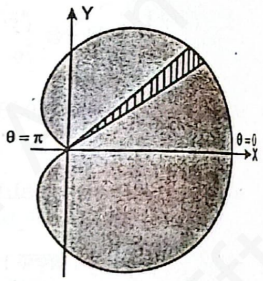
$= \frac{a^2}{2}$ বর্গ একক।

অতএব (1) নং রেখার দুইটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল $= 2A = 2.\frac{a^2}{2} = a^2$ বর্গ একক।

উদাহরণ-26. $r = a(1 + \cos\theta)$ কার্ডিয়ডের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[NUH-03, 05, NUH(NM)-05, BSc(Pass)-06, 10, DUH-90, 73, 06]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ



$r = a(1 + \cos\theta)$ ..... (1)

(1) নং সমীকরণে θ এর পরিবর্তে $-\theta$ বসালে এর কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং (1) নং রেখাটি আদিরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

$\therefore$ (1) নং সমীকরণে $r = 0$ বসালে পাই

$a(1 + \cos\theta) = 0$

বা $\cos\theta = -1 = \cos(\pm\pi)$ $\therefore \theta = \pm\pi$

সুতরাং (1) নং রেখাটি $\theta = \pi$ এবং $\theta = -\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত। অতএব (1) নং কার্ডিয়ডের উপরের অর্ধাংশের জন্য θ এর সীমা 0 হতে π পর্যন্ত।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$

$= a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta$

$= a^2 \int_0^{\pi} \left(2\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 d\theta$

$= 4a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\theta}{2} \, d\theta$ ধরি $\frac{\theta}{2} = t$

$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \, . \, 2dt$ $\therefore d\theta = 2dt$

যখন $\theta = 0$ তখন $t = 0$

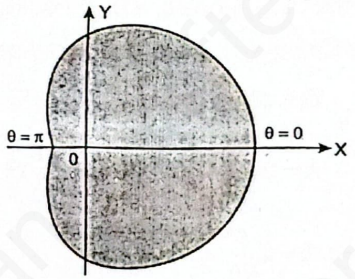
$= 8a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \, dt$ যখন $\theta = \pi$ তখন $t = \frac{\pi}{2}$

$= 8a^2 . \frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma\frac{5}{2}}{2\Gamma 3} = 8a^2 . \frac{\sqrt{\pi} . \frac{3}{2} . \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.2.1}$

$= \frac{3\pi a^2}{2}$ বর্গ একক।

উদাহরণ-27. দেখাও যে $r = a + b\cos\theta$; $a > b$ লিমাকোণের ক্ষেত্রফল $\pi\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right)$ বর্গ একক।

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা



$r = a + b\cos\theta$; $a > b$ ..... (1)

(1) নং রেখাটি আদি রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। রেখাটি $\theta = \pi$ হতে $\theta = -\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$

$= \int_0^{\pi} (a + b\cos\theta)^2 \, d\theta$ [(1) নং দ্বারা]

$= \int_0^{\pi} (a^2 + 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta) d\theta$

$= \int_0^{\pi} \left\{a^2 + 2ab\cos\theta + \frac{b^2}{2}(1 + \cos 2\theta)\right\} d\theta$

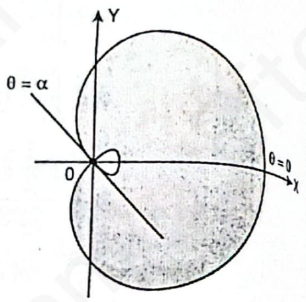
$= \left[a^2\theta + 2ab\sin\theta + \frac{b^2}{2}\theta + \frac{b^2}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}$

$= \left(a^2\pi + 0 + \frac{b^2}{2}\pi + 0\right) - (0)$

$= \pi\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right)$ বর্গ একক।

উদাহরণ-28. $r = a + b\cos\theta$; $a < b$ লিমাকণোর দুইটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল ক্ষ কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $r = a + b\cos\theta$ ..... (1) $a < b$; যাহা আদি রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। যেহেতু $\theta = \frac{2\pi}{3}$ এর জন্য $r > 0$ এবং $\theta = \frac{3\pi}{4}$ এর জন্য $r < 0$; সেহেতু $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ও $\theta = \frac{3\pi}{4}$ এর মধ্যবর্তী θ এর কোন মানের জন্য $r = 0$ হয়।



মনে করি $\theta = \alpha\left[\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{3\pi}{4}\right]$ এর জন্য $r = 0$ হয়।

অর্থাৎ $a + b\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{a}{b}$ প্রাথমিক রেখার উপরে বড় ফাঁসের জ θ এর সীমা 0 হতে α এবং ছোট ফাঁসের জন্য θ এর সীমা α হতে π.

$\therefore$ ফাঁস দুইটির ক্ষেত্রফল

$$A = 2\left[\int_0^\alpha \frac{1}{2}r^2\,d\theta + \int_\alpha^\pi \frac{1}{2}r^2\,d\theta\right]$$

$$\Rightarrow A = 2\int_0^\pi \frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi (a + b\cos\theta)^2\,d\theta \quad [(1)\text{ নং দ্বারা}]$$

$$= \int_0^\pi (a^2 + 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta)d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left\{a^2 + 2ab\cos\theta + \frac{b^2}{2}(1 + \cos 2\theta)\right\}d\theta$$

$$= \left[a^2\theta + 2ab\sin\theta + \frac{b^2}{2}\theta + \frac{b^2}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi$$

$$= \left(a^2\pi + 0 + \frac{b^2}{2}\pi + 0\right) - (0)$$

$$= \pi\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right)$$ বর্গ একক।

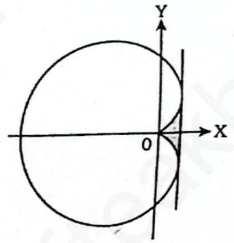
উদাহরণ-29. দেখাও যে $r = a(1 - \cos\theta)$ কার্ডিঅয়েড এবং ইহার ডাবল (double) স্পর্শক $x = \frac{a}{4}$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $a^2\left(\frac{15\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{2}\right)$ বর্গ একক।

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $r = a(1 - \cos\theta)$ ..... (1) এবং $x = \frac{a}{4}$

$$\Rightarrow r\cos\theta = \frac{a}{4} \quad [\because x = r\cos\theta]$$

$$\Rightarrow 4r\cos\theta = a \text{ ..... (2)}$$

এখানে (2) নং সমীকরণ (1) নং সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত রেখাকে স্পর্শ করে। অতএব স্পর্শ বিন্দুর জন্য (1) ও (2) সমাধান করি



(2) $\Rightarrow 4r\cos\theta = a$

$\Rightarrow 4a(1 - \cos\theta)\cos\theta = a$ [(1) নং দ্বারা]

$\Rightarrow 4\cos\theta - 4\cos^2\theta = 1$ [a দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow 1 - 4\cos\theta + 4\cos^2\theta = 0 \Rightarrow (1 - 2\cos\theta)^2 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3} \therefore r = a\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a.$

অতএব (2) নং রেখা (1) নং রেখাকে $B\left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ ও $D\left(\frac{a}{2}, \frac{-\pi}{3}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

এখানে $OB = r = a\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right)$ $\left[\because$ বিন্দুতে $\theta = \frac{\pi}{3}\right]$

$$= a\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2}$$

$\therefore \Delta OBC$ হতে $\frac{OC}{OB} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow OC = OB\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a}{4}$

এবং $\frac{BC}{OB} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow BC = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \Delta OBC$ এর ক্ষেত্রফল $A_1 = \frac{1}{2}\cdot OC.BC$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{32}$$

আবার OEBO অংশের ক্ষেত্রফল $A_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} r^2\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} a^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta$ [(1) নং দ্বারা]

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} a^2(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/3}\left\{1-2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right\}d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\left[\theta-2\sin\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/3}$

$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3\theta}{2}-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/3}$

$= \frac{a^2}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-2.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(0)\right]$

$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)$

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = 2[A_1 - A_2] = 2\left[\frac{a^2\sqrt{3}}{32}-\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)\right]$

$= \frac{a^2\sqrt{3}}{16}-a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)$

$= \frac{a^2\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi a^2}{2}+\frac{7\sqrt{3}a^2}{8}$

$= a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{7\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{2}\right)$

$= a^2\left(\frac{\sqrt{3}+14\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{2}\right)$

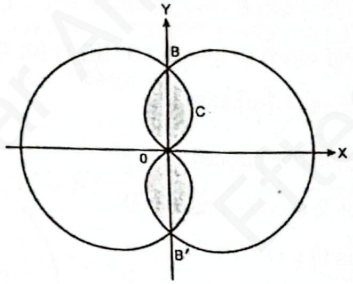
$= a^2\left(\frac{15\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{2}\right)$ বর্গ একক।

উদাহরণ–30. $r = a(1+\cos\theta)$ এবং $r = a(1-\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডদ্বয়ের সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $r = a(1+\cos\theta)$ ..... (i)

এবং $r = a(1-\cos\theta)$ ..... (ii)

এখানে (i) ও (ii) নং কার্ডিঅয়েড দুইটি আদিরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। (i) ও (ii) নং সমীকরণ সমাধান করি।



∴ $a(1+\cos\theta) = a(1-\cos\theta)$ [(i) ও (ii) হতে]

$\Rightarrow 2\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2}$ যখন $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ তখন $r = a$

অতএব কার্ডিঅয়েড দুইটি $B\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ ও $B'\left(a, -\frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = 4$[OCBO এর ক্ষেত্রফল]

$\Rightarrow A = 4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$

$= 4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}a^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta$ [(ii) নং দ্বারা]

$= 2a^2\int_0^{\pi/2}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$

$= 2a^2\int_0^{\pi/2}\left\{1-2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right\}d\theta$

$= 2a^2\left[\theta-2\sin\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$

$= 2a^2\left[\frac{3\theta}{2}-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{a^2}{2}(3\pi-8)$ বর্গ একক।

উদাহরণ–31. $r = \sin\theta$ বৃত্তের অন্তঃস্থ এবং $r = 1 - \cos\theta$ কার্ডিঅয়েডের বহিঃস্থ অংশের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $r = \sin\theta$ ..... (i) এবং $r = 1 - \cos\theta$ ..... (ii)

(i) ও (ii) সমাধান করি $\sin\theta = 1 - \cos\theta$ [(i) ও (ii) হতে]

$\Rightarrow \sin^2\theta = (1 - \cos\theta)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - 2\cos\theta + \cos 2\theta$

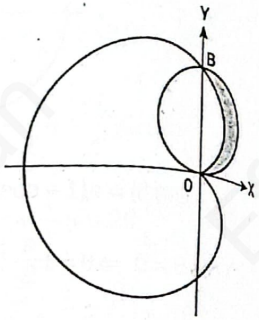
$\Rightarrow 1 - \cos^2\theta - 1 + 2\cos\theta - \cos^2\theta = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(1 - \cos\theta) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 0$ এবং $1 - \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ এবং $\theta = 0$ $\therefore$ (1)

$\Rightarrow r = 1, 0$



$\therefore$ (i) ও (ii) নং রেখা $O(0, 0)$ ও $B\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\, d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \{\sin^2\theta - (1 - \cos\theta)^2\} d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2\theta - 1 + 2\cos\theta - \cos^2\theta) d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - 2\cos^2\theta) d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \{2\cos\theta - (1 + \cos 2\theta)\} d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - 1 - \cos 2\theta) d\theta$

$= \frac{1}{2}\left[2\sin\theta - \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2}\left[\left(2.1 - \frac{\pi}{2} - 0\right) - (0)\right]$

$= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ বর্গ একক।

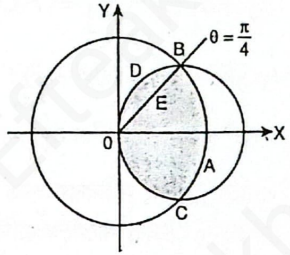
উদাহরণ–32. $r = a\sqrt{2}$ এবং $r = 2a\cos\theta$ বৃত্ত দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $r = a\sqrt{2}$ ..... (1) এবং $r = 2a\cos\theta$ ..... (2)

(1) নং ও (2) নং সমীকরণ সমাধান করে তাদের ছেদ বিন্দু বের করি

$a\sqrt{2} = 2a\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}$



অতএব (i) নং ও (ii) নং রেখা দুইটি $B\left(a\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ এবং $C\left(a\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ OABEO অংশের ক্ষেত্রফল $= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2a^2\, d\theta$ [(1) নং দ্বারা]

$= a^2\left[\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi a^2}{4}$

$\therefore$ OEBDO অংশের ক্ষেত্রফল $= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4a^2\cos^2\theta\, d\theta$

$= 2a^2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta$

$= a^2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$= a^2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 2[OABDO অংশের ক্ষেত্রফল]

= 2[OABEO অংশের ক্ষেত্রফল + OEBDO অংশের ক্ষেত্রফল]

$= 2\left[\frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right] = a^2[\pi - 1]$. বর্গ একক।

উদাহরণ–33. $r\cos\theta = a\cos 2\theta$ রেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল বাহির কর।

[DUH–1965]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $r\cos\theta = a\cos 2\theta$

$\Rightarrow r\cos\theta = a(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ ..... (i)

(i) নং সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে রূপান্তর করি।

(যেখানে $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$)

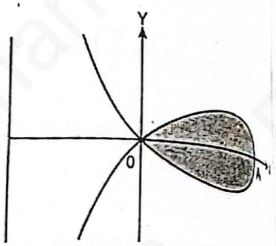
$$\therefore x = a\left[\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}\right] \Rightarrow r^2x = a(x^2 - y^2)$$

$$\Rightarrow x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2) \quad [\because r^2 = x^2 + y^2]$$

$$\Rightarrow x^3 + xy^2 = ax^2 - ay^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2(a-x)}{a+x} \ldots\ldots \text{(ii)}$$

এখানে (ii) নং সমীকরণ হতে দেখা যায় যে, রেখাটি x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। যদি $y = 0$ হয় তবে (ii) হইতে পাই $x^2(a - x) = 0$
$\Rightarrow x = 0, a$

$\therefore$ রেখাটি O(0, 0) ও A(a, 0) বিন্দুগামী। সুতরাং রেখাটির একটি ফাঁস $x = 0$ হইতে $x = a$ এর মধ্যে অবস্থিত।



$$\therefore \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল } A = 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx \text{ [(ii) নং দ্বারা]}$$

ধরি $x = a\cos\theta \Rightarrow dx = -a\sin\theta\,d\theta$

$x = 0$ হইলে $\theta = \frac{\pi}{2}$ এবং $x = a$ হলে $\theta = 0$

$$\therefore A = -2\int_{\pi/2}^{0} a\cos\theta\sqrt{\frac{a - a\cos\theta}{a + a\cos\theta}} \times a\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{a-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\cdot\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{a\sin^2\theta/2}{2\cos^2\theta/2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2} 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta - \cos^2\theta)d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi/2}\left\{\cos\theta - \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right\}d\theta$$

$$= 2a^2\left[\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2a^2\left[\left(1 - \frac{\pi}{4} - 0\right) - (0 - 0 - 0)\right]$$

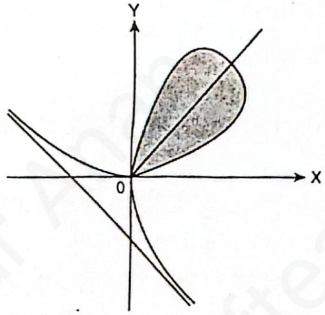
$$= 2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \text{ বর্গ একক।}$$

উদাহরণ-34. $x^3 + y^3 = 3axy$ রেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[NUH-2007, 2009, NUH(NM)-2004, RUH-1964]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $x^3 + y^3 = 3axy$ ..... (1)

যেহেতু (1) নং সমীকরণ x ও y পরস্পর স্থান বিনিময় করিলে সমীকরণটি অপরিবর্তীত থাকে। সেহেতু (1) নং রেখাটি $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম $x = 0$ ও $y = 0$ উহার দুইটি স্পর্শক।



(1) নং সমীকরণকে পোলার সমীকরণে রূপান্তর করি, যেখানে

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta.$

$$(1) \Rightarrow r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3a\,r^2\cos\theta\sin\theta$$

$$\Rightarrow r = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} \ldots\ldots (2)$$

যদি $r = 0$ হয়, তবে $3a\sin\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0, \cos\theta = 0$

$$\Rightarrow \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ ফাঁসটি $\theta = 0$ এবং $\theta = \frac{\pi}{2}$ এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $A = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{9a^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2}$$ [(2) নং দ্বারা]

$$= \frac{1}{2} \cdot 9a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{\cos^6\theta(1 + \tan^3\theta)^2}$$

$$= \frac{3a2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{3 \tan^2\theta . \sec^2\theta}{(1 + \tan^3\theta)^2} d\theta$$

ধরি $1 + \tan^3\theta = t \Rightarrow 3 \tan^2\theta \sec^2\theta \, d\theta = dt$

$\theta = 0$ হইলে $t = 1$ এবং $\theta = \frac{\pi}{2}$ হইলে $t = \infty$

$$\therefore A = \frac{3a^2}{2} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{3a^2}{2} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{\infty}$$

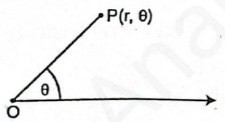
$$= \frac{3a^2}{2} [-0 + 1] \left[\because \frac{1}{\infty} = 0 \right]$$

$$= \frac{3a^2}{2}$$ বর্গ একক।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

21.B.1. পোলার স্থানাংক পদ্ধতি বলিতে কি বুঝ? (What do you mean by polar coordinate system?)

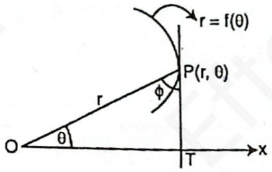
Ans : পোলার স্থানাংক পদ্ধতি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O (মূলবিন্দু বা পোল) এবং ঐ বিন্দু হইতে উৎসারিত রশ্মি (পোলার অক্ষ) দ্বারা গঠিত। এই পদ্ধতিতে P বিন্দুর স্থানাংক (r, θ) দ্বারা বোঝায়, P বিন্দু হইতে মূলবিন্দুর দূরত্ব r এবং পোলার অক্ষ ও OP এর মধ্যবর্তী কোণ θ.



21.B.2. কোন বক্ররেখার উপরস্থ কোন বিন্দুতে স্পর্শক ও ব্যাসার্ধ ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয়ের সূত্র লিখ। (Write the formula to find angle between tangent and radius vector at any point on a curve.)

Ans : যদি $r = f(\theta)$ বক্ররেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শক PT এবং ব্যাসার্ধ ভেক্টর OP এর অন্তর্গত কোণ ϕ হয় তবে ϕ নির্ণয়ের সূত্র ঃ

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}, \sin\phi = r\frac{d\theta}{ds}, \cot\phi = \frac{dr}{ds}.$$



21.B.3. পোলার আকারে ds নির্ণয় কর। (Evaluate ds in polar form.)

Ans : কার্তেসীয় স্থানাংক পদ্ধতিতে জানি,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$= (\cos\theta \, dr - r \sin\theta \, d\theta)^2 + (\sin\theta \, dr + r \cos\theta \, d\theta)^2$$

$$= dr^2 + r^2 \, d\theta^2$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \, d\theta^2} = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

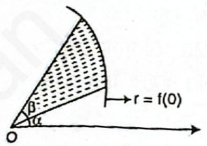
21.B.4. $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ এবং $r = f(\theta)$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র লিখ। (Write the integral formula to find the area of the region bounded by $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ and $r = f(\theta)$.)

Ans : প্রদত্ত শর্তে আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের ইন্টিগ্রাল সূত্র ঃ

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta, \; r = f(\theta)$$

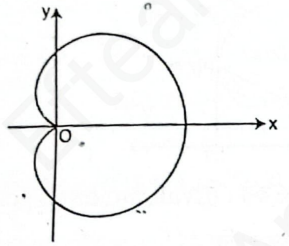
21.B.5. $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta, \; r = f(\theta)$ ক্ষেত্রের নমুনা চিত্র আঁক। (Draw the sample graph of the area $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta, \; r = f(\theta)$.)

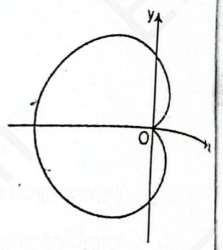
Ans : নিম্নে নমুনা লেখচিত্র আঁকা হইল ঃ



21.B.6. $r = a(1 + \cos\theta)$ এবং $r = a(1 - \cos\theta)$ বক্ররেখাদ্বয় অংকন কর। [Sketch the figure of two curves $r = a(1 + \cos\theta)$ and $r = a(1 - \cos\theta)$.] [NUH-2010]

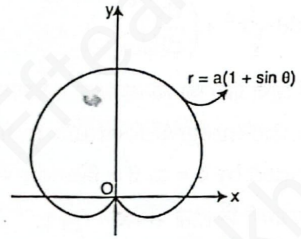
Ans : নিম্নে প্রদত্ত বক্ররেখাদ্বয় অংকন করা হইল ঃ

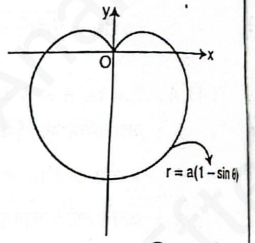




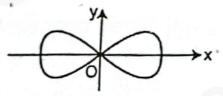
21.B.7. $r = a(1 + \sin\theta)$ ও $r = a(1 - \sin\theta)$ দ্বারা কি বোঝায়? ইহাদের চিত্র আঁক। (What are meant by $r = a(1 + \sin\theta)$ and $r = a(1 - \sin\theta)$? Draw its graph.)

Ans : $r = a(1 + \sin\theta)$ ও $r = a(1 - \sin\theta)$ কার্ডিঅয়েড এর পোলার সমীকরণ। ইহাদের চিত্র নিম্নে আঁকা হইল ঃ





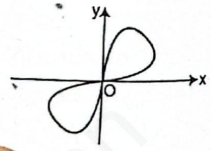
21.B.8. লেমনিসকেট এর চিত্র দেওয়া হইল। ইহার পোলার সমীকরণ লিখ। (Given a graph of lemniscate. Write it polar equation.)



Ans : চিত্রের লেমনিসকেট এর পোলার সমীকরণ $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

21.B.9. $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ কি নির্দেশ করে? ইহা আঁক। (What is $r^2 = a^2 \sin 2\theta$? Draw it.)

Ans : $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ লেমনিসকেটের পোলার সমীকরণ। ইহার চিত্র আঁকা হইল ঃ



21.B.10. $r = a \sin n\theta$, $n \in \mathbb{N}$ দ্বারা নির্দেশিত হয়? (What is denoted by $r = a \sin n\theta$, $n \in \mathbb{N}$?)

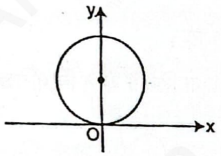
Ans : $r = a \sin n\theta$, $n \in \mathbb{N}$ দ্বারা ফাঁস (loop) নির্দেশিত হয়। যদি n বেজোড় হয় তবে n সংখ্যক ফাঁস এবং n জোড় হইলে 2n সংখ্যক ফাঁস হইবে। সকল ফাঁস মূলবিন্দুতে মিলিত হইবে।

21.B.11. $r = a \cos n\theta$, $n \in \mathbb{N}$ দ্বারা কি নির্দেশিত হয়? (What is denoted by $r = a \cos n\theta$, $n \in \mathbb{N}$?)

Ans : $r = a \cos n\theta$, $n \in \mathbb{N}$ দ্বারা ফাঁস নির্দেশিত হয়। যদি n বেজোড় হয় তবে n সংখ্যক এবং n জোড় হইলে 2n সংখ্যক ফাঁস হইবে। সকল ফাঁস মূলবিন্দুতে মিলিত হইবে।

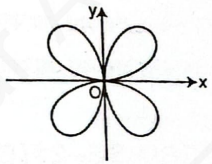
21.B.12. $r = a \sin\theta$ আঁক। (Draw $r = a \sin\theta$.)

Ans : $r = a \sin\theta$ দ্বারা একটি ফাঁস (বা বৃত্ত) নির্দেশিত হয়। নিম্নে ইহা আঁকা হইল ঃ



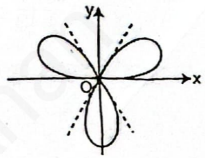
21.B.13. $r = a \sin 2\theta$ আঁক।

Ans : $r = a \sin 2\theta$ দ্বারা চারটি ফাঁস নির্দেশিত হয়। নিম্নে ইহার চিত্র আঁকা হইল ঃ



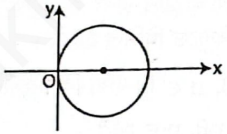
21.B.14. $r = a \sin 3\theta$ আঁক।

Ans : $r = a \sin 3\theta$ দ্বারা তিনটি ফাঁস নির্দেশিত হয়। নিম্নে ইহার চিত্র আঁক হইল ঃ



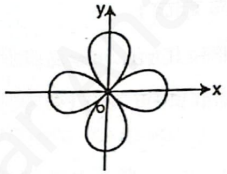
21.B.15. $r = a\cos\theta$ আঁক।

Ans : $r = a\cos\theta$ দ্বারা একটি ফাঁস (বা বৃত্ত) নির্দেশিত হয়। নিম্নে ইহা আঁকা হইল ঃ



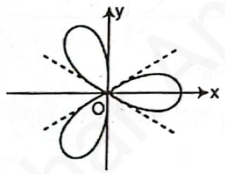
21.B.16. $r = a\cos 2\theta$ আঁক।

Ans : $r = a\cos 2\theta$ দ্বারা চারটি ফাঁস নির্দেশিত হয়। নিম্নে ইহা আঁকা হইল।



21.B.17. $r = a\cos 3\theta$ আঁক।

Ans : $r = a\cos 3\theta$ দ্বারা তিনটি ফাঁস নির্দেশিত হয়। নিম্নে ইহা আঁকা হইল।



21.B.18. $r = a\cos 4\theta$ বা $r = a\sin 4\theta$ এর কয়টি ফাঁস আছে? [NUH-201

Ans : $r = a\cos 4\theta$ বা $r = a\sin 4\theta$ এর আটটি ফাঁস আছে।

EXERCISE–21(B)

1. $r = a\cos\theta$ এবং $\theta = 0$ ও $\theta = \frac{\pi}{3}$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ $\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ বর্গ একক।

2. $r = \theta$ এবং $\theta = 0$ ও $\theta = \frac{\pi}{2}$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ $\frac{\pi^3}{48}$ বর্গ একক।

3. $r = \sec^2\frac{\theta}{2}$ এবং $\theta = 0$ ও $\theta = \frac{\pi}{2}$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ $\frac{4}{3}$ বর্গ একক।

4. $a^2 = r^2\cos 2\theta$ এবং $\theta = 0$ ও $\theta = 30^0$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ $\frac{a^2}{4} ln\,(2 + \sqrt{3})$ বর্গ একক।

5. $a = r(1 + \cos\theta)$ এবং $\theta = 0$ ও $\theta = \frac{2\pi}{3}$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ বর্গ একক।

6. $r = a\sin 3\theta$ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{\pi}{4}a^2$

7. $r = a\sin 2\theta$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[NUH–2006]**

   উত্তর ঃ $\frac{\pi a^2}{8}$

8. প্রমাণ কর যে $r = a\cos 2\theta$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল $\frac{\pi a^2}{8}$ বর্গ একক।

9. $r = 2a\cos\theta$ বৃত্তের সম্পূর্ণ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ πa^2 বর্গ একক।

10. $r^2 = a^2\sin 2\theta$ রেখায় একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

    উত্তর ঃ $\frac{a^2}{2}$ বর্গ একক।

11. $r^2 = a^2\cos 5\theta$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[RUH–1958]**

    উত্তর ঃ a^2 বর্গ একক।

12. $r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ বক্ররেখার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

    উত্তর ঃ $(a^2 + b^2)\frac{\pi}{2}$ বর্গ একক।

13. $r\cos\theta = a\sin^2\theta$ ছিসয়েড এবং ইহার অসীমতট দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{3\pi a^2}{4}$ বর্গ একক।

14. $r = 2 - \cos\theta$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

    উত্তর ঃ $\frac{9\pi}{2}$ বর্গ একক।

15. $r = 2 - \sec\theta$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

    উত্তর ঃ $\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} - 4\,ln(2 + \sqrt{3})$ বর্গ একক।

16. $r = 2(1 + \cos\theta)$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [DUH
উত্তর ঃ 6π বর্গ একক।

17. $r = a(1 + \sin\theta)$ কার্ডিঅয়েড দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $\frac{3\pi a^2}{2}$ বর্গ একক।

18. $r = a(1 - \cos\theta)$ কার্ডিঅয়েড দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[NUS–1999] উত্তর ঃ $\frac{3\pi a^2}{2}$ বর্গ একক।

19. $r = \frac{1}{2} + \cos 2\theta$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $\frac{3\pi}{4}$ বর্গ একক।

20. $r = 1 + 2\cos\theta$ বক্ররেখার ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ 3π বর্গ একক।

21. $r = a\cos 3\theta + b\sin 3\theta$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $\frac{1}{12}(a^2 + b^2)\pi$ বর্গ একক।

22. $r = \sqrt{3}\cos 3\theta + \sin 3\theta$ বক্ররেখাটি অংকন কর, উহার একটি ফাঁসের ক্ষে
নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{\pi}{3}$ বর্গ একক।

23. $x^4 + y^4 = 2a^2xy$ রেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[DUH–69, CUH–84, 74] উত্তর ঃ $\frac{\pi a^2}{4}$ বর্গ একক।

24. $x^5 + y^5 = 5ax^2y^2$ রেখায় একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[DUH–1972, 1974] উত্তর ঃ $\frac{5a^2}{2}$ বর্গ একক।

25. $x^6 + y^6 = a^2x^2y^2$ রেখায় একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [DUH-19
উত্তর ঃ $\frac{\pi a^2}{12}$ বর্গ একক।

26. প্রমাণ কর $(x^2 + y^2)^2 = 4axy^2$ রেখার একটি ফাঁসের ক্ষেত্রফল $\frac{\pi a^2}{4}$ বর্গ একক।

27. $r = a$ এবং $r = a(1 + \cos\theta)$ কার্ডিওয়েড দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নি
কর। উত্তর ঃ $\frac{a^2}{4}(5\pi - 8)$ বর্গ একক।

28. $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ লিমনিস্‌কেটের অন্তঃস্থ এবং $r = a$ বৃত্তের বহিঃস্থ সাধারণ ক্ষে
ক্ষেত্রফল বাহির কর। [NUH-20
উত্তর ঃ $\frac{a^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$ বর্গ একক।

Chapter–22(A)

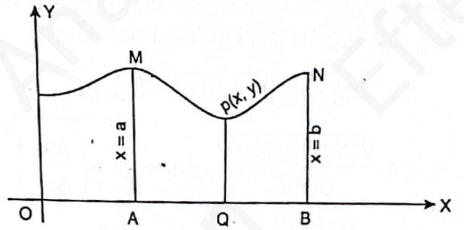
দৈর্ঘ্য নির্ণয় করণ (কার্তেসীয় আকারে)

RECTIFICATION (IN CARTESIAN)

22.A.1. কোন বক্ররেখার নির্দিষ্ট অংশ বা সম্পূর্ণ চাপের দৈর্ঘ্য কার্তেসীয়, পোলার ও প্যারামিটার সমীকরণে প্রকাশ করা থাকিলে, এই অধ্যায়ে তা নির্ণয় করা হইবে। দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের পদ্ধতিকে দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা (Rectification) বলা হয়।

22.A.2. কার্তেসীয় স্থানাংকে চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় (To find are length in Cartesian co-ordinates) : প্রথম পদ্ধতি ঃ মনে করি $y = f(x)$ বক্ররেখা যদি (a, b) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং একমান বিশিষ্ট হয়, তবে MN অংশের চাপের দৈর্ঘ্য

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



প্রমাণ ঃ মনে করি $y = f(x)$ নির্দেশিত রেখার MN অংশের প্রান্ত বিন্দু M ও N বিন্দুতে অপর দুইটি সরলরেখা $x = a$ ও $x = b$। রেখাটির উপর $p(x, y)$ যে কোন বিন্দুতে MP চাপটি x এর ফাংশন। অন্তরীকরণের সাহায্যে MP অংশক চাপটির দৈর্ঘ্য l হলে

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

বা $\int_a^b \frac{dl}{dx}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ [সমগ্র অংশের দৈর্ঘ্যের সীমা a হতে b]

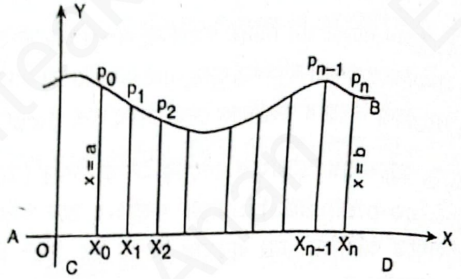
বা $[l]_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

বা (l এর মান যখন $x = b$) – (l এর মান যখন $x = a$) $= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

MN চাপের দৈর্ঘ্য $0 = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

$\therefore l = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ



মনে করি $y = f(x)$ বক্ররেখা AB এর উপর $p_0, p_1, p_2 \cdots \cdots p_{n-1}, p_n$ বিন্দু সমূহ দ্বারা n সংখ্যক অংশের ক্ষুদ্র চাপে বিভক্ত করিয়া যুক্ত করা হইল। C এবং D বিন্দুতে অঙ্কন দুইটি সরলরেখা $x = a$ এবং $x = b$। বিন্দু সমূহকে $[x_i, f(x)_i]$ এবং দৈর্ঘ্য $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $f(x_i) - f(x_{i-1}) = \Delta y_i$ দ্বারা নির্দেশিত হইলে দুই বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

$$l_i = \frac{\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}}{(\Delta x_i)^2} \cdot \Delta x_i = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

যখন $\Delta x_i \to 0$ তখন $\sum_{i=1}^{n} l_i = L$ মোট দৈর্ঘ্য নির্দেশ করে।

অর্থাৎ $L = \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \lim_{\Delta x_i \to 0} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$

যখন $\Delta x_i \to 0$ তখন $\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(x_i)$

$\therefore L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}\, dx$

22.A.3. প্যারামিটার যুক্ত রেখার চাপের দৈর্ঘ্য (Arc length of lines with parameters) : যদি $x = f_1(t)$ ও $y = f_2(t)$ রেখার উপরস্থ t_1 এবং t_2 বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী চাপের দৈর্ঘ্য L হয়, তবে

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

নোট-১ ঃ (a, b) ব্যবধিতে $f'(x)$ অবিচ্ছিন্ন হলে $y = f(x)$ রেখার চাপের দৈর্ঘ্য

$$= \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

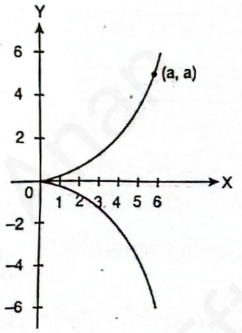
নোট-২ ঃ $f'(y)$ অবিচ্ছিন্ন হলে (a, c) এবং (b, d) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী $x = f(y)$ রেখায় চাপের দৈর্ঘ্য $= \int_d^c \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dy.$

উদাহরণ-1. $ay^2 = x^3$ রেখার সূক্ষাগ্র (0, 0) হইতে (a, a) বিন্দু পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[DUH-1976]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $ay^2 = x^3$ ..... (1)

$$\therefore y = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{a}} x^{1/2}$$

$$\therefore \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{a}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{9x}{4a}} = \sqrt{\frac{4a+9x}{4a}} = \frac{\sqrt{4a+9x}}{2\sqrt{a}}$$



অতএব (0, 0) বিন্দু হইতে (a, a) বিন্দু পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য

$$L = \int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^a \frac{\sqrt{4a+9x}}{2\sqrt{a}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\frac{(4a+9x)^{3/2}}{9.3/2}\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{27} [(13a)^{3/2} - (4a)^{3/2}]$$

$$= \frac{1}{27\sqrt{a}}[13a\sqrt{13a} - 4a\sqrt{4a}]$$

$$= \frac{1}{27\sqrt{a}}[13a.\sqrt{13a} - 8a\sqrt{a})]$$

$$= \frac{a}{27}[13\sqrt{13} - 8].$$

উদাহরণ–2. $y = ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ বক্ররেখার $x = 1$ হইতে $x = 3$ পর্যন্ত চাপের দৈ
নির্ণয় কর। **[NUH-2002]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y = ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = ln(e^x - 1) - ln(e^x + 1)$

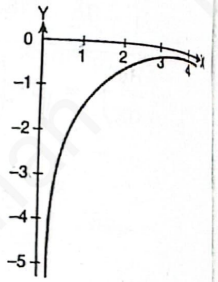
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = e^x\left\{\frac{e^x + 1 - e^x + 1}{(e^x - 1)(e^x + 1)}\right\} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$\therefore \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{2e^x}{e^{2x} - 1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(e^{2x} - 1)^2 + 4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(e^{2x} + 1)^2}{(e^{2x} - 1)^2}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \quad \ldots\ldots (1)$$



অতএব $x = 1$ হতে $x = 3$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^3 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\, dx \quad [(1) \text{ নং দ্বারা}]$$

$$\Rightarrow L = \int_1^3 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\, dx = [ln(e^x - e^{-x})]_1^3 = ln(e^3 - e^{-3}) - ln(e - e^{-1})$$

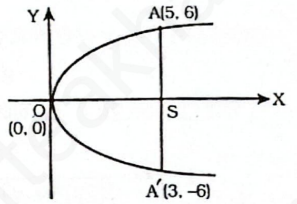
$$= ln\left\{\frac{e^3 - e^{-3}}{e - e^{-1}}\right\} = ln\left\{\frac{(e - e^{-1})(e^2 + 1 + e^{-2})}{(e - e^{-1})}\right\}$$

$$= ln(e^2 + e^{-2} + 1).$$

উদাহরণ–3. $y^2 = 12x$ অধিবৃত্তটি উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা খন্ডিত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[NUH–1996]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $y^2 = 12x$ ..... (1)

$\Rightarrow y^2 = 4.3x$ শীর্ষ O(0, 0) এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু A(3, 6) এবং A′(3, – 6)



(1) নং হতে $2y = 12\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{6}$

এখানে $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{6^2 + y^2}$

চাপ $y = 0$ এবং $y = 6$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

$\therefore$ সীমা 0 থেকে 6 পর্যন্ত।

$$\therefore \text{নির্ণয় চাপের দৈর্ঘ্য} = \int_0^6 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$L = \frac{1}{6}\int_0^6 \sqrt{6^2 + y^2}\, dy = \frac{1}{6}\left[\frac{y\sqrt{36 + y^2}}{2} + \frac{36}{2} ln(y + \sqrt{36 + y^2})\right]_0^6$$

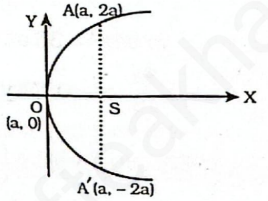
$$= \frac{1}{6}\left[\frac{6\sqrt{36 + 36}}{2} + 18\, ln(6 + \sqrt{36 + 36}) - \{0 + 18\, ln\, 6\}\right]$$

$$= \frac{1}{6}[18\sqrt{2} + 18\, ln\, 6(\sqrt{2} + 1) - 18\, ln\, 6] = \frac{18}{6}\left[\sqrt{2} + ln\frac{6(\sqrt{2} + 1)}{6}\right]$$

$\therefore L = 3[\sqrt{2} + ln(\sqrt{2} + 1)]$

উদাহরণ–4. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু হইতে উপকেন্দ্রিক লম্বের এক প্রান্ত বিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[DUH–9971, 2004]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $y^2 = 4ax$ ..... (i) রেখাটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম। শীর্ষ O(0, 0) এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু A(a, 2a) এবং A′(a, –2a)।



(i) নং সমীকরণকে y সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে

$2y = 4a\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2a}$

অতএব $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{y^2}{4a^2}} = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2+y^2}$

যেহেতু চাপ OA, $y = 0$ এবং $y = 2a$ এর মধ্যে অবস্থান করে

$\therefore$ সীমা O থেকে 2a $\quad\therefore$ চাপের দৈর্ঘ্য $= \int_0^{2a}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$

$$L = \frac{1}{2a}\int_0^{2a}\sqrt{(2a)^2+y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{y\sqrt{3a^2+y^2}}{2} + \frac{4a^2}{2}\ln(y+\sqrt{4a^2+y^2})\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\left\{\frac{2a\sqrt{8a^2}}{2} + 2a^2\ln(2a+\sqrt{8a^2})\right\} - \{0 + 2a^2\ln\sqrt{4a^2}\}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}[2\sqrt{2}\,a^2 + 2a^2\ln 2a(1+\sqrt{2}) - 2a^2\ln 2a]$$

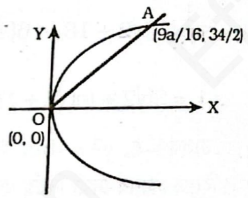
$$= a\left[\sqrt{2} + \ln\frac{2a(1+\sqrt{2})}{2a}\right]$$

$\therefore L = a[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$.

উদাহরণ–5. $y^2 = 4ax$ এবং $3y = 8x$ সরলরেখা দ্বারা খন্ডিত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[CUH–1997]**

সমাধান ঃ $y^2 = 4ax$ ..... (i)

এবং $3y = 8x \Rightarrow y = \frac{8x}{3}$ ..... (ii)



(i) নং রেখা x অক্ষের সাথে প্রতিসম। রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু (i) $\Rightarrow \left(\frac{8x}{3}\right)^2 = 4ax$

$$\Rightarrow 64x^2 = 36\,ax \Rightarrow 4x(16x - 9a) = 0$$

$\therefore x = 0, \frac{9a}{16}$. $x = 0$ হলে $y = 0$ এবং $x = \frac{9a}{16}$ হলে $y = \frac{8}{3}\times\frac{9a}{16} = \frac{3a}{2}$

$\therefore$ রেখাদ্বয় O(0, 0) এবং $A\left(\frac{9a}{16}, \frac{3a}{2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) নং কে y এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে $2y = 4a\frac{dx}{dy}$ $\quad\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2a}$.

এখানে $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{y^2}{4a^2}} = \sqrt{\frac{4a^2+y^2}{4a^2}}$

$$\therefore \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2+y^2} \text{ ..... (3)}$$

$y = 0$ এবং $y = \frac{3a}{2}$ এর মধ্যে OA চাপ অবস্থিত।

$\therefore$ y এর সীমা 0 হতে $\frac{3a}{2}$ পর্যন্ত।

$\therefore$ নির্ণয় চাপের দৈর্ঘ্য $= \int_0^{3a/2}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$

$$L = \frac{1}{2a}\int_0^{3a/2}\sqrt{(2a)^2+y^2}\,dy.$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{y\sqrt{4a^2+y^2}}{2} + \frac{4a^2}{2}\ln(y+\sqrt{4a^2+y^2})\right]_0^{3/2}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3a}{2}\sqrt{4a^2+\frac{9a^2}{4}} + 2a^2\ln\left(\frac{3a}{2}+\sqrt{4a^2+\frac{9a^2}{4}}\right) - 2a^2\ln 2a\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{3a}{4}\frac{\sqrt{25a^2}}{4} + 2a^2\left\{\ln\left(\frac{3a}{2}+\frac{5a}{2}\right) - \ln 2a\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{3a}{4}\cdot\frac{5a}{2} + 2a^2(\ln 4a - \ln 2a)\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{15a^2}{8} + 2a^2\ln\frac{4a}{2a}\right]$$

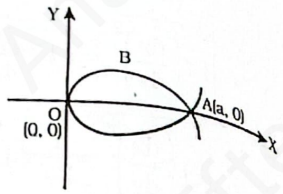
$$= \frac{2a^2}{2a}\left[\frac{15}{16} + \ln 2\right] = a\left[\ln 2 + \frac{15}{16}\right].$$

উদাহরণ–6. $3ay^2 = x(x-a)^2$ বক্ররেখার একটি ফাঁসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[NUH–2008, NUH(NM)–2002, DUH–1969]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখাটি $3ay^2 = x(x-a)^2$ $\quad\therefore y = \pm\left(\sqrt{\frac{x}{3a}}\right)(x-a)$ ..... (i)

এখানে প্রদত্ত রেখাটি x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। যদি (i) নং সমীকরণে y = 0 বসানো হয় তবে x = 0, a হয়। অতএব (i) নং রেখাটি x অক্ষকে O(0, 0) এবং A(a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।



(i) নং হতে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3a}} \frac{d}{dx}\{\sqrt{x}(x-a)\} = \frac{1}{\sqrt{3a}}\left[\frac{x-a}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}.1\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{3a}}\left[\frac{x-a+2x}{2\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{\sqrt{3a}}\left[\frac{3x-a}{2\sqrt{x}}\right]$

$\therefore \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{(3x-a)^2}{12ax}}$

$= \sqrt{\frac{12ax+(3x-a)^2}{12ax}}$

$= \sqrt{\frac{(3x+a)^2}{12ax}}$

$= \frac{3x+a}{2\sqrt{3ax}}$ ..... (2)

এখানে OBA চাপটির জন্য x এর সীমা O হইতে a পর্যন্ত।

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $L = 2\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\int_0^a \frac{3x+a}{2\sqrt{3ax}}\,dx$ [(2) নং দ্বারা]

$\Rightarrow L = \frac{1}{\sqrt{3a}}\int_0^a \frac{3x+a}{\sqrt{x}}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{3a}}\int_0^a \left(3\sqrt{x} + \frac{a}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= \frac{1}{\sqrt{3a}}\left[\frac{3x^{3/2}}{3/2} + \frac{a\sqrt{x}}{1/2}\right]_0^a$

$= \frac{1}{\sqrt{3a}}[2a^{3/2} + 2a\sqrt{a} - 0]$

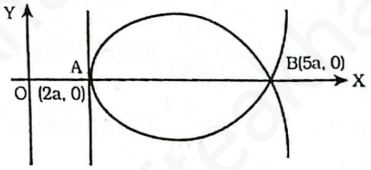
$= \frac{1}{\sqrt{3a}}.[2a\sqrt{a} + 2a\sqrt{a}]$

$= \frac{1}{\sqrt{3a}}.4a\sqrt{a} = \frac{4a}{\sqrt{3}}.$

উদাহরণ-7. $9ay^2 = (x-2a)(x-5a)^2$ রেখার একটি ফাঁসের পরিসীমা নির্ণয় কর। **[DUH-1992]**

সমাধান ঃ (1) নং সমীকরণটি x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। যদি y = 0 হয় তবে $(x-2a)(x-5a)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 2a, 5a$



সুতরাং (1) নং রেখাটি A(2a, 0); B(5a, 0) বিন্দুগামী এবং ফাসটি x = 2a এবং x = 5a এর মধ্যে অবস্থিত।

(1) নং হইতে $y = \frac{1}{3\sqrt{a}}(x-2a)^{1/2}(x-5a)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt{a}}\left[\frac{1}{2\sqrt{x-2a}}(x-5a) + \sqrt{x-2a}.1\right]$

$= \frac{1}{3\sqrt{a}}\left[\frac{x-5a+2(x-2a)}{2\sqrt{x-2a}}\right]$

$= \frac{1}{3\sqrt{a}}\left[\frac{3x-9a}{2\sqrt{x-2a}}\right] = \frac{x-3a}{2\sqrt{a}\sqrt{x-2a}}$

$\therefore 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{(x-3a)^2}{4a(x-2a)} = \frac{4ax-8a^2+x^2-6ax+9a^2}{4a(x-2a)}$

$= \frac{x^2-2ax+a^2}{4a(x-2a)} = \frac{(x-a^2)}{4a(x-2a)}$

$\therefore \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x-a)^2}{4a(x-2a)}} \Rightarrow \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{x-a}{2\sqrt{a}\sqrt{x-2a}}$ ..... (ii)

যেহেতু ফাঁসটি x = 2a ও x = 5a এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $L = 2\int_{2a}^{5a} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\int_{2a}^{5a} \frac{x-a}{2\sqrt{a}\sqrt{x-2a}}\,dx$

[(ii) নং দ্বারা]

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{2a}^{5a} \frac{(x-2a)+a}{\sqrt{x-2a}}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{2a}^{5a} \sqrt{x-2a}\,dx + \frac{a}{\sqrt{a}}\int_{2a}^{5a} \frac{dx}{\sqrt{x-2a}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{(x-2a)^{3/2}}{3/2}\right]_{2a}^{5a} + \sqrt{a}\left[\frac{\sqrt{x-2a}}{1/2}\right]_{2a}^{5a}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{a}}[(3a)^{3/2} - 0] + 2\sqrt{a}[\sqrt{3a} - 0]$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{a}}\, 3a\sqrt{3a} + 2\sqrt{a}\sqrt{3a}$$

$$= 2a\sqrt{3} + 2a\sqrt{3} = 4a\sqrt{3}.$$

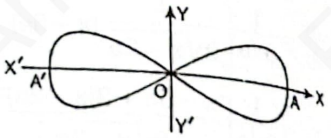
উদাহরণ–8. $8y^2 = x^2 - x^4$ বক্ররেখাটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[RUH-19**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখাটি $8y^2 = x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2)$ ..... (1)

(1) নং রেখাটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। যদি $y = 0$ হয়, তবে

$x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$

অতএব (1) নং রেখাটি x অক্ষকে O(0, 0), A(1, 0) ও A′(–1, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।



(1) হতে $16y\frac{dy}{dx} = 2x - 4x^3$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2(x-2x^3)}{16y} = \frac{x-2x^3}{8y}$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x-2x^3}{8y}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{(x-2x^3)^2}{64y^2}$$

$$= 1 + \frac{(x-2x^3)^2}{8(x^2-x^4)} \quad [\because 8y^2 = x^2 - x^4]$$

$$= 1 + \frac{x^2(1-2a^2)^2}{8x^2(1-x^2)}$$

$$= 1 + \frac{1 - 4x^2 + 4x^4}{8(1-x^2)}$$

$$= \frac{8 - 8x^2 + 1 - 4x + 4x^4}{8(1-x^2)}$$

$$= \frac{4x^4 - 12x^2 + 9}{8(1-x^2)} = \frac{(3-2x^2)^2}{8(1-x^2)}$$

$$\therefore \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{(3-2x^2)^2}{8(1-x^2)}} = \frac{3-2x^2}{\sqrt{8}\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় দৈর্ঘ্য } L = 4\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 4\int_0^1 \frac{3-2x^2}{\sqrt{8}\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \frac{4}{\sqrt{8}}\int_0^1 \frac{3-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{4}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2(1-x^2)+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 \left\{2\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\} dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\, dx + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\, dx$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_0^1 + \sqrt{2}\left[\sin^{-1}x\right]_0^1$$

$$= 2\sqrt{2}\,[0 + \sin^{-1}(1) - 0 - \sin^{-1}(0)] + \sqrt{2}\,[\sin^{-1} - \sin^{-1}(0)]$$

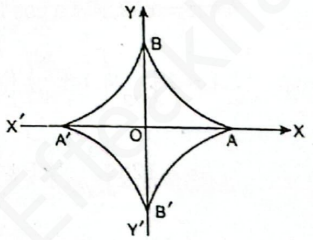
$$= \sqrt{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] + \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$$\therefore L = \sqrt{2}\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\frac{\pi}{2} = 2\sqrt{2}\frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{2}.$$

উদাহরণ–9. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ হাইপোসাইক্লয়েডের পরিসীমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[NUH–2007, NUH(NM)–2007]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ ..... (1)

এখানে, স্পষ্ট যে, (1) নং রেখাটি x অক্ষকে A(a, 0) ও A′(–a, 0) বিন্দুতে এবং y অক্ষকে B(0, b) ও B′(0 – b) বিন্দুতে ছেদ করে। আরও (1) নং রেখাটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতি সম এবং প্রথম চতুর্ভাগে x এর সীমা O হতে a পর্যন্ত।



এখন (1) নং সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অন্তরিকরণ করে পাই

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^{-1/3}\cdot\frac{1}{a} + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{b}\right)^{-1/3}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow b\left(\frac{x}{a}\right)^{-1/3} + a\left(\frac{y}{b}\right)^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \left[\frac{3}{2}\,ab \text{ দ্বারা গুন করে}\right]$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{y}{b}\right)^{-1/3}\frac{dy}{dx} = -b\left(\frac{x}{a}\right)^{-1/3}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{(x/a)^{-1/3}}{(-y/b)^{-1/3}} = -\frac{b}{a}\frac{(y/b)^{1/3}}{(x/a)^{1/3}}$$

$$\therefore 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{b^2}{a^2}\frac{(y/b)^{2/3}}{(x/a)^{2/3}}$$

$$= 1+\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{1-(x/a)^{2/3}}{(x/a)^{2/3}}\right] \quad [(1) \text{ নং হতে}]$$

$$= 1+\frac{b^2}{a^2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-2/3} - 1\right]$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় পরিসীমা } s = 4\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{\left[1+\frac{b^2}{a^2}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{-2/3} - 1\right\}\right]}\,dx$$

ধরি $x = a\cos^3\theta$. $dx = -3a\cos^2\theta\sin\theta$

যদি $x = 0$ হয়, তবে $a\cos^3\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

যদি $x = a$ হয়, তবে $a\cos^3\theta = a \Rightarrow \theta = 0$.

$$\therefore L = 4\int_{\pi/2}^0 \sqrt{\left[1+\frac{b^2}{a^2}\{(\cos\theta)^{-2} - 1\right]}. -3a\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= -12a\int_{\pi/2}^0 \sqrt{\left[1+\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right\}\right]}\cos^2\theta.\sin\theta\,d\theta$$

$$= +12a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta}}.\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= 12\int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)}.\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

আবার ধরি $t = \sin^2\theta \Rightarrow dt = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

যদি $\theta = 0$ হয়, তবে $t = 0$ হয়। যদি $\theta = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে $t = 1$ হয়।

$$\therefore L = 12\int_0^1 \sqrt{\{a^2(1-t) + b^2t\}}.\frac{dt}{2} = 6\int_0^1 \sqrt{a^2 + (b^2-a^2)t}\,dt$$

$$= 6\left[\frac{a^2 + (b^2-a^2)t^{3/2}}{3/2(b^2-a^2)}\right]_0^1 = 6\frac{2}{3}\left[\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}\right]$$

$$= 4\left[\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{(b-a)(b+a)}\right] = 4\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right).$$

উদাহরণ-10. দেখাও যে, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$ রেখাটির পূর্ণ দৈর্ঘ্য 6a.

[NUH-2007]

সমাধান ঃ উদাহরণ-9 হইতে পাই,

$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ রেখাটির পূর্ণ দৈর্ঘ্য $= 4\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right)$

এখন, $b = a$ বসিয়ে,

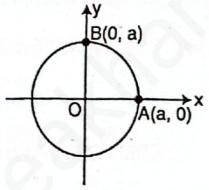
$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$ রেখাটির পূর্ণ দৈর্ঘ্য $= 4\left(\frac{a^2+a^2+a^2}{2a}\right)$

$= 6a.$

উদাহরণ-11. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটির পরিসীমা নির্ণয় কর।

[NUH-2010, BSc(Pass)-2006]

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = a^2$ ..... (1)



$$\Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

এখন, $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

এখানে (1) বৃত্তটির এক চতুর্থাংশ AB, $x = 0$ ও $x = a$ এর মধ্যে অবস্থিত।

$$\therefore \text{বৃত্তটির পরিসীমা} = 4\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= 4a\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= 2\pi a.$$

উদাহরণ–12. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডের সম্পূর্ণ চাপ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [DUS-18]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ ..... (1)

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta), \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}, \frac{dy}{d\theta} = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

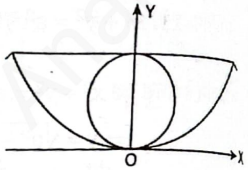
$$\therefore \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{4a^2\cos^4\frac{\theta}{2} + 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= 2a\cos\frac{\theta}{2} \text{ ..... (2)}$$

এবং $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{2a\sin\theta/2\cos\theta/2}{2a\cos^2\theta/2} = \tan\frac{\theta}{2}$.

এখানে $\theta = -\pi$ এবং $\theta = \pi$ এর জন্য $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$ হয়। অতএব θ এর সীমা $-\pi$ হইতে π. কিন্তু প্রথম চতুর্ভাগে θ এর সীমা O হতে π.



$$\therefore \text{নির্ণেয় চাপের দৈর্ঘ্য } s = 2\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \quad \text{[(ii) নং দ্বারা]}$$

$$= 4a\left[\frac{\sin\theta/2}{1/2}\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow L = 4a\left[\frac{\sin\pi.2}{1/2} - 0\right] = 4a.2[1 - 0]$$

$$\therefore L = 8a.$$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

22.A.1. $y = f(x)$ বক্ররেখার $[a, b]$ ব্যবধিতে চাপদৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র লিখ। [Write the integral formula to find arc length of the curve $y = f(x)$ in the interval $[a, b]$.]

Ans : $y = f(x)$ বক্ররেখার $[a, b]$ ব্যবধিতে চাপদৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র ঃ

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

22.A.2. $x = f_1(t)$ ও $y = f_2(t)$ রেখার উপরস্থ t_1 ও t_2 বিন্দুর মধ্যবর্তী চাপ দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের ইনটিগ্র্যাল সূত্র লিখ। [Write the integral formula to find arc length of the curve $x = f_1(x)$ to $y = f_2(t)$ between two points t_1 to t_2.]

Ans : $x = f_1(x)$ ও $y = f_2(t)$ রেখার উপরস্থ t_1 ও t_2 বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী চাপের দৈর্ঘ্য

$$= \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

EXERCISE–22(A)

1. $y = ln(\sec x)$ রেখার $x = 0$ হইতে $x = \frac{\pi}{4}$ পর্যন্ত চাঁপ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
   উত্তর ঃ $ln(2 + \sqrt{3})$
2. $y = 2x - x^2$ রেখার $x = 0$ হইতে $x = 2$ পর্যন্ত চাঁপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
   উত্তর ঃ $\frac{1}{2}ln(2 + \sqrt{5}) + \sqrt{5}$
3. $y = (x + 1)(x + 2) - \frac{1}{8}ln(2x + 3)$ রেখার $x = 1$ এবং $x = 2$ এর মর্ধবর্তী অংশের চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $6 + \frac{1}{8}ln(7/8)$
4. $y = 2\cos h(x/2)$ ক্যাটিনারীর $x = 1$ হইতে $x = 2$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $(e - 1)(e + 1 - \sqrt{e})/e$
5. $y = ln\tan h(x/2)$ রেখার $x = 1$ হইতে $x = 2$ পর্যন্ত চাঁপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
   উত্তর ঃ $ln(e^2 + 1) - 1$.
6. যদি $y = c\cos h(x/2)$ ক্যাটিনারীর শীর্ষবিন্দু $(0, c)$ হইতে (x, y) বিন্দু পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য s হয়, তবে দেখাও যে $s^2 = y^2 - c^2$.
7. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু হইতে উপকেন্দ্রিক লম্বের এক প্রান্ত পর্যন্ত বিস্তৃত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $4\{\sqrt{2} + ln(1 + \sqrt{2})\}$

8. $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু হইতে উপকেন্দ্রিক লম্বের এক প্রান্তবিন্দু পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [NUH-2003]

উত্তর ঃ $a\{\sqrt{2} + ln(1 + \sqrt{2})\}$

9. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $y = 2x$ সরলরেখায় ছেদবিন্দুর মধ্যবর্তী চাঁপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $a\{\sqrt{2} + ln(1 + \sqrt{2})\}$

10. $3ay^2 = x^2(a - x)$ বক্ররেখাদ্বারা সৃষ্ট ফাঁসের পরিসীমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $4a/\sqrt{3}$

11. $9y^2 = (x - 4)(x - 7)^2$ রেখায় একটি ফাঁসের সম্পূর্ণ পরিসীমা নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $4\sqrt{3}$

12. দেখাও যে $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$ ইডোলিউটের সুক্ষ্মাগ্র হইতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের সহিত একটি ছেদ কিন্তু পর্যন্ত ইডোলিউটের চাপের দৈর্ঘ্য $2a(3\sqrt{3}-1)$.

13. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তের চাঁপ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $2\pi\sqrt{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \frac{e^6}{5} \cdots\right\}$

14. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$ এবং $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{28} = 1$ কণিক দুইটির পরিসীমার দৈর্ঘ্যের তুলনা কর।

[RUH-1969]

উত্তর ঃ দ্বিতীয়টির পরিসীমা প্রথমটির দ্বিগুন।

15. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ সাইক্লয়েডটির $\theta = 0$ হইতে $\theta = \pi$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $4a$ [RUH-1968, 1975]

16. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ রেখার $\theta = 0$ হইতে যে কোন বিন্দু θ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{1}{2}a\theta^2$.

17. $x = a(3\sin t - \sin^3 t)$, $y = a\cos^3 t$ রেখায় $(0, a)$ বিন্দু হইতে (x, y) বিন্দু পর্যন্ত চাঁপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $3a(t + \sin t\cos t)/2$

18. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ রেখায় সম্পূর্ণ চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $6a$

19. $x = e^\theta \sin\theta$, $y = e^\theta\cos\theta$ রেখায় $\theta = 0$ হইতে $\theta = \frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত চাঁপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\sqrt{2}\,(e^{\pi/2} - 1)$

20. $x = e^\theta\left(\sin\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\right)$, $y = e^\theta\left(\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\right)$ রেখায় $\theta = 0$ হইতে $\theta = \pi$ পর্যন্ত চাঁপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{5}{2}(e^\pi - 1)$

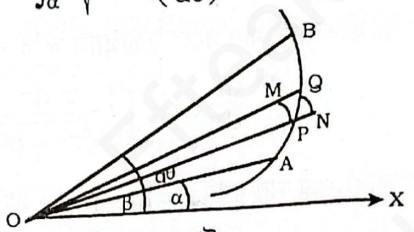
Chapter–22(B)

দৈর্ঘ্য নির্ণয় করণ (পোলার আকারে)

RECTIFICATION (IN POLAR)

22.B.1. $r = f(\theta)$ রেখার চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর [Find are length of line $r = f(\theta)$] : যদি (α, β) ব্যবধিতে $\frac{dr}{d\theta}$ অবিচ্ছিন্ন হয় এবং $\theta = \alpha$ ও $\theta = \beta$ ভেক্টোরিয়াল কোন দুইটির মধ্যবর্তী চাপের দৈর্ঘ্য L হইলে $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

প্রমাণ ঃ যদি $r = f(\theta)$ নির্দেশিত রেখার AB অংশের A ও B বিন্দুতে ফ্যাক্টোরিয়াল কোণ $\theta = \alpha$ ও $\theta = \beta$ হয়, তবে $P(r, \theta)$ বিন্দু AB চাপের উপর অবস্থিত হইলে AB চাপ θ এর একটি ফাংশন।



AB অংশকে L দ্বারা নির্দেশ করিলে, অন্তরীকরণের সাহায্যে পাই

$$\frac{dL}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

α হইতে β সীমার মধ্যে ইনটিগ্র্যাল করে পাই

$$\int_\alpha^\beta \frac{dL}{d\theta}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta,\quad [L]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

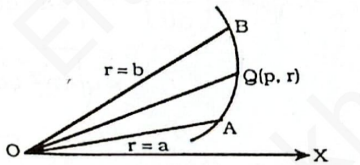
($\theta = b$ বিন্দুতে L এর মান) – ($\theta = \alpha$ বিন্দুতে L এর মান) $= \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

AB চাপের দৈর্ঘ্য $\delta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

$$\therefore L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

22.B.2. পেডাল সমীকরণ বিশিষ্ট রেখার চাপ দৈর্ঘ্য (Arc length of line with pedal equation) : (a, b) ব্যবধিতে $p = f(r)$ সমীকরণের মধ্যবর্তী চাপের দৈর্ঘ্য $L = \int_a^b \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2 - p^2}}$

প্রমাণ ঃ মনে করি $p = f(r)$ নির্দেশিত পেডাল সমীকরণের A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে $r = a$ ও $r = b$. AB রেখার উপর Q(p, r) যে কোন বিন্দু। সুতরাং AQ চাপ r এর একটি ফাংশন।



অন্তরীকরণের সাহায্যে পাই

$$\sec\phi = \frac{dL}{dr} \quad [\because \text{বিন্দুতে স্পর্শক ব্যাসার্ধ ভেক্টরের সৃষ্টি কোণ } \phi]$$

বা $\frac{1}{\cos\phi} = \frac{dL}{dr}$ বা $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\phi}} = \frac{dL}{dr}$

$$\therefore \frac{dL}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2-p^2}} \quad \left[\because p = r\sin\phi, \therefore \sin\phi = \frac{p}{r}\right]$$

a হতে b সীমার মধ্যে ইন্ট্রিগ্র্যাল করে পাই

$$\int_a^b \frac{dL}{dr}dr = \int_a^b \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-p^2}} \quad \text{বা } [L]_a^b = \int_a^b \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-p^2}}$$

বা (L এর মান যখন r = b) – (L এর মান যখন r = a) $= \int_a^b \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-p^2}}$

AB চাপের দৈর্ঘ্য $L = \int_a^b \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-p^2}} \Rightarrow L = \int_a^b \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-p^2}}$.

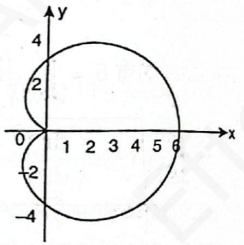
উদাহরণ–13. $r = a(1+\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডের পরিসীমা নির্ণয় কর।

[DUH–1975, JBH-1997]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $r = a(1+\cos\theta)$ ..... (1)

$$= 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$$

এখানে (1) নং রেখাটি আদি রেখার সহিত প্রতিসম। (1) নং রেখাটিতে r = 0 হলে $a(1+\cos\theta) = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pm\pi$



অতএব (1) নং কার্ডিঅয়েডটি $\theta = -\pi$ হতে $\theta = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত এবং আদি রেখার উপরে θ. এর সীমা 0 হতে π পর্যন্ত।

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta = -2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{4a^2\cos^4\frac{\theta}{2} + 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় পরিসীমা $L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$\Rightarrow L = 2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$ [(ii) নং দ্বারা]

$$= 4a\left[\frac{\sin\theta/2}{1/2}\right]_0^{\pi} = 4a.2\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$= 8a[1-0] = 8a.$$

উদাহরণ–14. $r = 2(1-\cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডের পরিসীমা নির্ণয় কর।

[NUH(NM)–2003, 2009, BSc(Pass)–2007, DUH–1989]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখাটি $r = 2(1-\cos\theta)$ ..... (1)

$$\Rightarrow r = 2.2\sin^2\frac{\theta}{2} = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

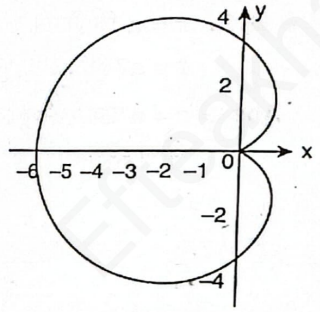
এখানে (1) নং রেখাটি আদি রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। যদি (1) নং রেখায় r = 0 হয় তবে

$$2(1-\cos\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

আবার যদি r = 4 হয় তবে $2(1-\cos\theta) = 4$

$\Rightarrow \cos\theta = -1$

$\Rightarrow \theta = \pm\pi$



অতএব (1) নং রেখাটি $\theta = -\pi$ হতে $\theta = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত এবং আদি রেখার উপরে θ এর সীমা 0 হতে π.

এখন $\frac{dr}{d\theta} = 2\sin\theta = 4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$\therefore \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{16\sin^3\frac{\theta}{2} + 16\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore = \sqrt{16\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} = 4\sin\frac{\theta}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় চাপের দৈর্ঘ্য $L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$$\Rightarrow L = 2\int_0^{\pi} 4\sin\frac{\theta}{2} = -8\left[\frac{-\cos\theta/2}{1/2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -16\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right]$$

$$= -16[0-1] = 16.$$

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

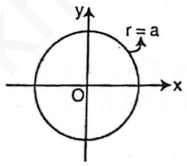
22.B.1. $\theta = \alpha$ ও $\theta = \beta$ এর মধ্যে $r = f(\theta)$ বক্ররেখার চাপদৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র লিখ। (Write the integral formula to find arc length of the curve $r = f(\theta)$ between $\theta = \alpha$ and $\theta = \beta$.)

Ans : $\theta = \alpha$ ও $\theta = \beta$ এর মধ্যে $r = f(\theta)$ বক্ররেখার চাপদৈর্ঘ্য নির্ণয়ের ইন্টিগ্রাল সূত্র ঃ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

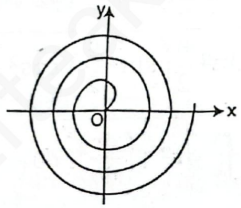
22.B.2. $r = a$ কি নির্দেশ করে। ইহার চিত্র আঁক। (What is denoted by $r = a$? Draw its graph.)

Ans : $r = a$ দ্বারা মূলবিন্দু কেন্দ্র ও a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত নির্দেশিত হয়। নিম্নের ইহা আঁকা হইল ঃ



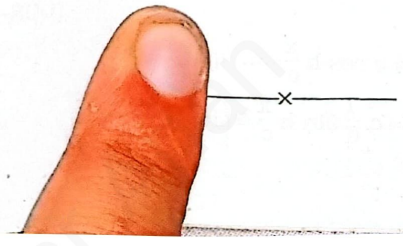
22.B.3. $r = a\theta$ কি নির্দেশ করে? ইহা আঁক। (What is denoted by $r = a\theta$? Draw it.)

Ans : $r = a\theta$ কুন্ডলী (spiral) নির্দেশ করে। ইহা নিম্নে আঁকা হইল ঃ



EXERCISE-22(B)

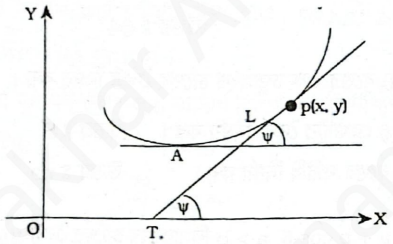
1. $r(1 + \cos\theta) = 2$ পরাবৃত্তের $\theta = 0$ হইতে $\theta = \frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত অংশটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[DUH-2007]**
   উত্তর ঃ $\sqrt{2} + ln(1 + \sqrt{2})$
2. $r = a\theta$ স্পাইরালের $\theta = 0$ হইতে $\theta = \pi$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
   উত্তর ঃ $\frac{1}{2}a\{\pi\sqrt{\pi^2 + 1} + ln(\sqrt{\pi^2 + 1} + \pi)\}$
3. দেখাও যে $r = a(1 - \cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডের উপরস্থ অর্ধচাপ $\theta = \frac{2\pi}{3}$ দ্বারা সমদ্বিখন্ডিত।
4. $r = 8(1 - \cos\theta)$ কার্ডিয়ডটির পরিসীমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[DUH-1987]**
   উত্তর ঃ 64
5. $r = 2a\sin\theta$ বৃত্তের এক চতুঅংশ চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{1}{2}\pi a$.
6. $r = 1 - \sin\theta$ রেখাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ 8
7. $r = a\cos\theta$ বৃত্তের পরিধি নির্ণয় কর। উত্তর ঃ πa
8. প্রমাণ কর $r = a + b\cos\theta$, $a > b$ লিমাকণের চাপের দৈর্ঘ্য $2\pi a\left(1 + \frac{b^2}{4a^2}\right)$ প্রায়।
9. যদি $r = 2a\cos^3\frac{\theta}{3}$ হয়, তবে প্রমাণ কর $ds = 2a\cos^2\frac{\theta}{3}\,d\theta$ এবং আরও দেখাও যে রেখার সম্পূর্ণ চাপ দৈর্ঘ্য $3\pi a$.
10. $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা খন্ডিত অংশের চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $l\{\sqrt{2} + ln(1 + \sqrt{2})\}$
11. দেখাও যে $xy = a^2$ পরাবৃত্তের $x = b$ হইতে $x = c$ পর্যন্ত চাপের দৈর্ঘ্য এবং $p^2(a^4 + r^4) = a^4r^2$ রেখায় $r = b$ হইতে $r = c$ পর্যন্ত চাঁপের দৈর্ঘ্যে সমান।
12. দেখাও যে $r = a(1 + \cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডকে $4r\cos\theta = 3a$ সরলরেখা দ্বারা দুই অংশে খন্ডিত করিলে সরলরেখার প্রত্যেক দিকের চাপ দৈর্ঘ্য সমান।
13. $r = a(1 - \cos\theta)$ কার্ডিওয়েড এবং $r = a\cos\theta$ বৃত্ত দ্বারা খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $4a\sqrt{3}$.



Chapter–22(C)
বক্ররেখার স্বকীয় সমীকরণ
INTRINSIC EQUATION OF A CURVE

22.C.1. কোন বক্ররেখার উপরস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি চলমান বিন্দুর মধ্যকার চাপের দৈর্ঘ্য L এবং চলমান বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক x অক্ষের সহিত ψ কোণ উৎপন্ন করলে L এবং ψ এর সম্পর্ককে রেখাটির স্বকীয় সমীকরণ বলে।

স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় পদ্ধতি ঃ (i) কার্তেসীয় সমীকরণ হইতে ঃ মনে করি $y = f(x)$ সমীকরণের A বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল। রেখাটির উপর যে কোন বিন্দু p(x, y)। p বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক x অক্ষের সহিত T বিন্দুতে মিলিত হয়। মনে করি A বিন্দুতে $x = a$ সরলরেখা এবং AP চাপ = L.



$\therefore$ চাপের দৈর্ঘ্য $\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ ..... (i) এবং $\tan\psi = \frac{dy}{dx}$ ..... (ii)

সুতরাং (i) ও (ii) নং সমীকরণ হইতে x অপসারণ করিলে স্বকীয় সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

(ii) পোলার সমীকরণ হইতে ঃ $r = f(\theta)$, পোলার সমীকরণ হইতে পাই

$$L = \int_\alpha^\theta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \quad \text{..... (i)}$$

$$= y = \theta + \phi \quad \text{..... (ii) এবং } \tan\phi = \frac{d\theta}{dr} \quad \text{..... (iii)}$$

(i), (ii) এবং (iii) নং সমীকরণ হইতে θ এবং ϕ অপসারণ করিলে নির্ণয় স্বকীয় সমীকরণ পাওয়া যায়।

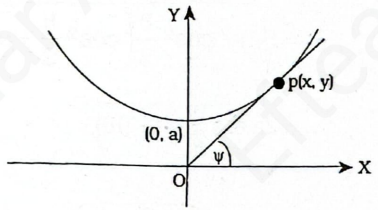
উদাহরণ–15. শীর্ষ বিন্দু (O, c) কে নির্দিষ্ট বিন্দু ধরিয়া $y = c\cos h\frac{x}{c}$ ব্যাটেনারীর স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় কর। **[DUS–1983]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $y = c\cos h\frac{x}{c}$ ..... (i)

$$\text{বা } \frac{dy}{dx} = c.\frac{1}{c}\sin h\frac{x}{c} = \sin h\frac{x}{c}$$

আমরা জানি $\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \sin h\frac{x}{c}$ ..... (ii)

$$\therefore \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{c}} = \sqrt{\cosh^2\frac{x}{c}} = \cos h\frac{x}{c}$$



মনে করি p(x, y) যে কোন বিন্দু এবং শীর্ষ O(0, c) নির্দিষ্ট বিন্দু।

$\therefore$ নির্ণয় চাপের দৈর্ঘ্য $\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

$$L = \int_0^x \cos h\frac{x}{c}\, dx = c\left[\sinh\frac{x}{c}\right]_0^x$$

$$= c\sin h\frac{x}{c} = c\tan\psi \quad [\text{(ii) নং হতে}]$$

$\therefore L = c\tan\psi$, ইহাই নির্ণয় স্বকীয় সমীকরণ।

উদাহরণ–16. $r = a(1+\cos\theta)$ কার্ডিয়ডের $\theta = 0$ নির্দিষ্ট বিন্দু ধরিয়া ইহার স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় কর। **[RUH–1990, 1981, RUS–1977]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $r = a(1+\cos\theta) = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = -2a.\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = -2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

আমরা জানি $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = r/\frac{dr}{d\theta} = \frac{2a\cos^2\theta/2}{-2a\sin\theta/2\cos\theta/2}$

$$\therefore \tan\phi = -\cot\frac{\theta}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \phi = \frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2} \quad \text{..... (i) এবং } y = \theta+\phi$$

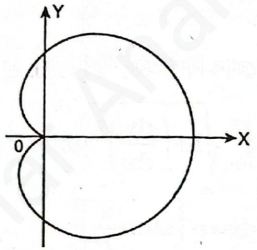
$$\text{বা } \psi = \theta+\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2} \quad [\text{(i) নং হতে}]$$

$$\therefore \psi-\frac{\pi}{2} = \frac{3\theta}{2} \quad \therefore \frac{1}{3}\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\theta}{2} \quad \text{..... (ii)}$$

এখন $\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{4a^2\cos^4\frac{\theta}{2}+4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$= \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$

$= 2a\cos\frac{\theta}{2}$ ..... (iii)



মনে করি $p(r, \theta)$ যে কোন বিন্দু এবং $A(2a, 0)$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

নির্ণয় চাপের দৈর্ঘ্য $AP = \int_0^\theta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$= \int_0^\theta 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$ [(iii) নং হতে]

$= 2a.\,2\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\theta$

$= 4a\left[\sin\frac{\theta}{2}-0\right]$

$= 4a\sin\frac{\theta}{2}$

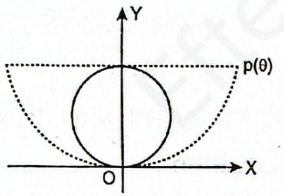
$= 4a\sin\frac{1}{3}\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)$ [(ii) নং হতে] ইহাই নির্ণয় স্বকীয় সমীকরণ।

উদাহরণ–17. মূলবিন্দুকে নির্দিষ্ট বিন্দু ধরিয়া $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডটির স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় কর। **[DUS–1979]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$

$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta)$ এবং $\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$

$= 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$ $= 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$



আমরা জানি $\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{2a\sin\theta/2\cos\theta/2}{2a\cos2\,\theta/2}$

$\therefore \tan\psi = \tan\frac{\theta}{2}$ $\therefore \psi = \frac{1}{2}\theta$ ..... (i)

এখন $\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{4a^2\cos^4\frac{\theta}{2}+4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$= \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$

$= 2a\cos\frac{\theta}{2}$ ..... (ii)

মনে করি সাইক্লয়েডের উপর যে কোন বিন্দু $p(\theta)$ এবং নির্দিষ্ট বিন্দু $O(0, 0)$.

$\therefore$ নির্ণয় চাপের দৈর্ঘ্য $= \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$\therefore L = \int_0^\theta 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$ [(ii) নং হতে]

$= 2a.\,2\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\theta$

$= 4a\sin\frac{\theta}{2}$

$= 4a\sin\psi$ ইহাই নির্ণেয় স্বকীয় সমীকরণ।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

22.C.1. স্বকীয় সমীকরণ কি? [What is the intrinsic equation?]

Ans : কোন বক্ররেখার উপরস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি চলমান বিন্দুর মধ্যকার চাপের দৈর্ঘ্য s এবং চলমান বিন্দুতে অংকিত স্পর্শ X অক্ষের সহিত ψ কোণ উৎপন্ন করিলে s এবং ψ সম্পর্ককে রেখাটির স্বকীয় সমীকরণ বলে।

22.C.2. স্বকীয় সমীকরণের উদাহরণ দাও। [Give an example of the intrinsic equation.]

Ans : $s = 5\psi$ একটি স্বকীয় সমীকরণ।

EXERCISE–22(C)

1. (a, 0) বিন্দুকে নির্দিষ্ট ধরিয়া $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ এ্যাস্ট্রয়েডের স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $S = \frac{3}{2} a \sin^2\psi$

2. যদি সুক্ষাগ্রকে নির্দিষ্ট বিন্দু ধরিয়া দেখাও যে, $ay^2 = x^3$ অর্ধ-ত্রিঘাতী বক্ররেখার স্বকীয় সমীকরণ $27s = 8a(\sec^2\psi - 1)$.

3. দেখাও যে $r = a(1 - \cos\theta)$ এর স্বকীয় সমীকরণ। উত্তর ঃ $8a \sin^2\frac{\psi}{2}$.

4. $y = a \cos h \frac{x}{a}$ ক্যাটেনারীর স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $s = a \tan\psi$

5. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $s = a\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)$

6. $x = at^2$, $y = 2at$ রেখার স্বকীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

   উত্তর ঃ $s = a[\cot\psi \operatorname{cosec}\psi + ln(\cot\psi + \operatorname{cosec}\psi)]$.

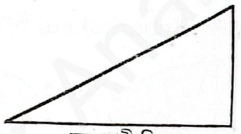
Chapter–23(A)

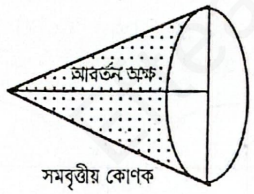
আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর আয়তন (কার্তেসীয় আকারে)

VOLUME OF SOLIDS OF REVOLUTION (IN CARTESIAN)

23.A.1. আবর্তন জনিত ঘনবস্তু (Solid of revolution) ঃ কোন নির্দিষ্ট ক্ষেত্র (area) কে একটি সরলরেখার চারিদিকে আবর্তন করিলে, একটি আবর্তন জনিত ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়। সরলরেখাটিকে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আবর্তন অক্ষ বলে। যে ক্ষেত্রকে আবর্তন অক্ষের চারিদিকে ঘুরানো হয় তাহার আকার এবং অবস্থান অনুসারে উৎপন্ন ঘনবস্তু ভিন্ন ভিন্ন হয়। নিম্নে কয়েকটি ক্ষেত্রকে আবর্তন করাইয়া যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাহা দেওয়া হইল ঃ

(i) সমকোণী ত্রিভূজ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে উহার লম্ব বা ভূমির সাপেক্ষে আবর্তন করিলে একটি সমবৃত্তীয় কোণকে (right circulas cone) উৎপন্ন হয়।

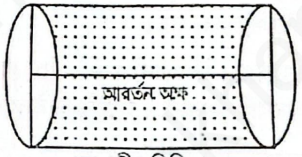

সমকোণী ত্রিভূজ



সমবৃত্তীয় কোণক

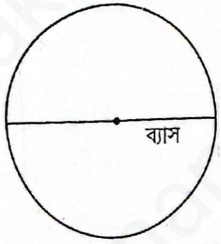
(ii) একটি আয়তকার ক্ষেত্রকে উহার বাহুর সাপেক্ষে আবর্তন করিলে একটি সমবৃত্তীয় সিলিন্ডার (right circular cylinder) উৎপন্ন হয়।


আয়তাকার ক্ষেত্র

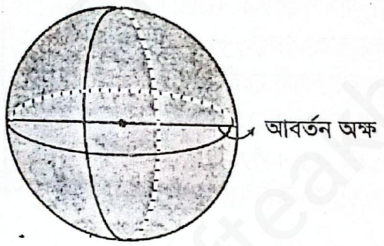


সমবৃত্তীয় সিলিন্ডার

(ii) একটি অর্ধবৃত্ত বা বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে উহার ব্যাসের চারিদিকে ঘুরাইলে একটি গোলক উৎপন্ন হয়।



বৃত্ত

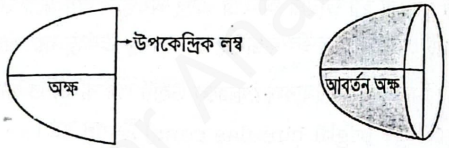


গোলক

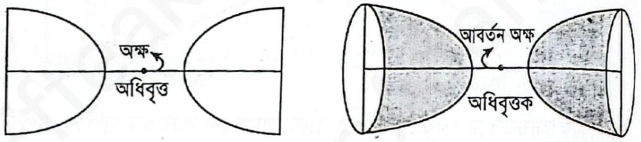
(iv) উপবৃত্ত (ellips) দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে উহার বৃহৎ অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উপবৃত্তক (ellipsoid) উৎপন্ন হয়।



(v) পরাবৃত্ত (Parabola) ও উহার উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে পরাবৃত্তের অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে পরাবৃত্তক (Paraboloid) উৎপন্ন হয়।



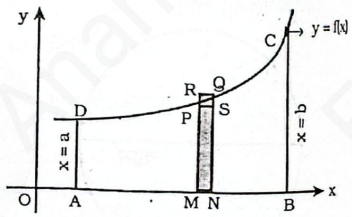
(vi) অধিবৃত্ত (Hyperbola) ও উহার উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে অধিবৃত্তের অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে অধিবৃত্তক (Hyperboloid) উপন্ন হয়।



এইভাবে বিভিন্ন ক্ষেত্রকে আবর্তন অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করাইয়া আবর্তন জনিত ঘনবস্তু উৎপন্ন করা যায়।

23.A.2. উপপাদ্য ঃ $y = f(x)$ ফাংশন, x অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, প্রমাণ কর উহার আয়তন $V = \pi \int_a^b y^2\,dx$.

প্রমাণ ঃ মনে করি $y = f(x)$ ফাংশন, x অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধক্ষেত্র ABCD. $y = f(x)$ ফাংশনের উপর $P(x, y)$ ও $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ কাছাকাছি দুইটি বিন্দু। বিন্দু দুইটির কোনটি PM ও QN হইলে, $PM = y$ এবং $QN = y + \delta y$. QN এর উপর PS এবং MP এর বর্ধিতাংশের উপর QR লম্ব আঁকি।



$\therefore MN = PS = RQ = \delta x$.

এখন PMNS আয়তক্ষেত্রটিকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন সিলিন্ডারের আয়তন $= \pi(PM)^2 . MN = \pi y^2 \delta x$

আবার MNQR আয়তক্ষেত্রটিকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন সিলিন্ডারের আয়তন $= \pi(QN)^2\, MN = \pi(y + \delta y)^2\, \delta x$

চিত্র হইতে পাই, ক্ষেত্র PMNS দ্বারা উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন <PMNQ ক্ষেত্র দ্বারা উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন <MNQR ক্ষেত্র দ্বারা উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন

$\Rightarrow \pi y^2\, \delta x <$ PMNQ ক্ষেত্র দ্বারা উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন $< \pi(y + \delta y)^2\, \delta x$

ধরি PMNQ ক্ষেত্র x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন হয়,

$dV \Rightarrow \pi y^2\, \delta x < dV < \pi(y + \delta y)^2\, \delta x$

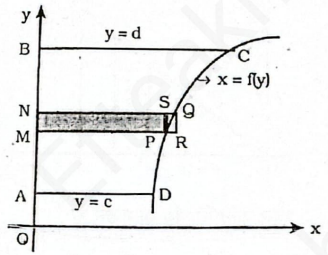
যদি $Q \to P$ হয় অর্থাৎ $\delta x \to 0$ হয় তবে $\delta y \to 0$ অর্থাৎ $dV = \pi y^2\, dx$ ..... (1)

সুতরাং x অক্ষের সাপেক্ষে ABCD ক্ষেত্রকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন (1) কে $x = a$ ও $x = b$ সীমার মধ্যে সমাকলন করে যাওয়া যাইবে।

$$(1) \Rightarrow V = \int_a^b \pi y^2\, dx \Rightarrow V = \pi \int_a^b y^2\, dx .$$

23.A.3. উপপাদ্য ঃ $x = f(y)$ ফাংশন, y অক্ষ এবং $y = c$ ও $y = d$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে y অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়। প্রমাণ কর উহার আয়তন $V = \pi \int_c^d x^2\, dy$.

প্রমাণ ঃ মনে করি $x = f(y)$ ফাংশন, y অক্ষ এবং $y = c$ ও $y = d$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধক্ষেত্র ABCD. $x = f(y)$ ফাংশনের উপর $P(x, y)$ ও $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ কাছাকাছি দুইটি বিন্দু। বিন্দু দুইটির ভুজ PM ও QN হইলে $PM = x$ এবং $QN = x + \delta x$, QN এর উপর PS এবং MP এর বর্ধিতাংশের উপর QR লম্ব আঁকি।



$\therefore MN = PS + RQ = \delta y$.

PMNS আয়তক্ষেত্রটিকে y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন হইবে $= \pi(PM)^2 . MN = \pi x^2\, \delta y$

আবার MNQR আয়তক্ষেত্রটিকে y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন হইবে $= \pi(QN)^2 . MN = \pi(x + \delta x)^2\, \delta y$

যদি PMNQ ক্ষেত্রটিকে y অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন dV হয়।

তবে আমরা পাই $\pi x^2\,\delta y < dV < \pi(x+\delta x)^2\,\delta y$

যদি $Q \to P$ হয় তবে $\delta x \to 0$ এবং $\delta y \to 0$, এইক্ষেত্রে পাই $dV = \pi x^2\,dy$

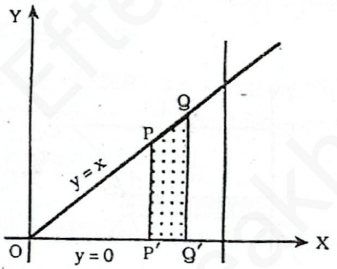
$y = c$ ও $y = d$ সীমার মধ্যে ইনটিগ্রেশন করে $V = \int_c^d \pi x^2\,dy$

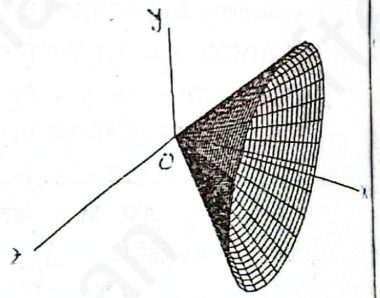
$\Rightarrow V = \pi\int_c^d x^2\,dy$ = y অক্ষের সাপেক্ষে ABCD ক্ষেত্র আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন।

উদাহরণ–1. $y = x$, $y = 0$ এবং $x = 1$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ১ম পদ্ধতি ঃ প্রদত্ত রেখাত্রয় $y = x$, $y = 0$, $x = 1$

মনে করি $y = x$ রেখার উপর $P(x, y)$ এবং $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ কাছাকাছি দুটি বিন্দু। P ও Q থেকে যথাক্রমে x অক্ষের উপর PP′ ও QQ′ লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে PP′Q′Q প্রাথমিক ক্ষেত্র (Elementary area) কে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন $\pi y^2\,\delta x$ হবে। এখানে ঘন বস্তুটি $x = 0$ এবং $x = 1$ এর মধ্যে অবস্থিত।





মনে করি নির্ণেয় আয়তন V

$$\therefore V = \int_0^1 \pi y^2\,dx = \pi\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \pi\frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$$ ঘন একক।

২য় পদ্ধতি ঃ $y = x$, $y = 0$ এবং $x = 1$ দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতলীয় ত্রিভুজকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে একটি কোণক (Cone) উৎপন্ন হয় যাহার উচ্চতা 1 এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 1.

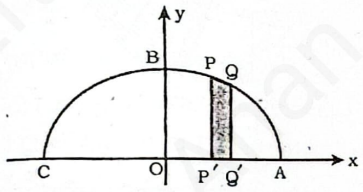
সুতরাং আবর্তজনিত ঘনবস্তু অর্থাৎ কোণকের আয়তন

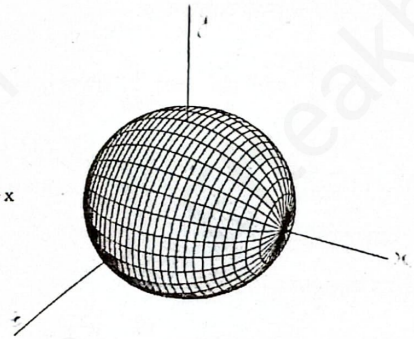
$$= \frac{1}{3} \times$$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) × উচ্চতা [কোণকের আয়তন নির্ণয়ের সূত্র]

$$= \frac{1}{3}.\pi.1^2.1 = \frac{\pi}{3}.$$

উদাহরণ–2. মূলবিন্দু কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট অর্ধবৃত্তকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে আবর্তন জনিত ঘন বস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, মূলবিন্দু কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট অর্ধবৃত্ত ABC. অর্ধবৃত্তের উপর $P(x, y)$ এবং $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ কাছাকাছি দুইটি বিন্দু। PP′ ও QQ′, x অক্ষের উপর লম্ব হইলে PP′Q′Q প্রাথমিক ক্ষেত্র (Elementary area) কে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন $\pi y^2\,\delta x$ হইবে। এখানে ঘনবস্তুটি $x = -a$ ও $x = a$ এর মধ্যে অবস্থিত।





মনে করি নির্ণেয় আয়তন = V

$$\therefore V = \int_{-a}^{a} \pi y^2\,dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)dx$$

মূল বিন্দু কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\Rightarrow y^2 = a^2 - x^2$$

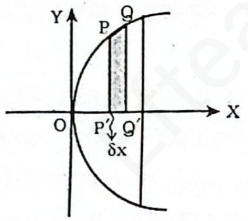
$$= \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3$$ ঘন একক।

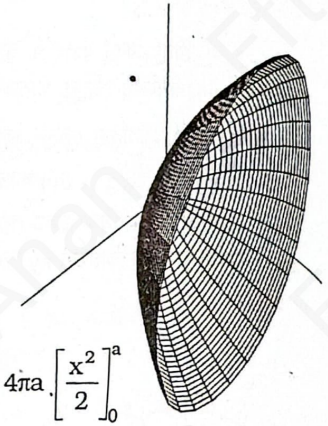
উদাহরণ–3. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত x অক্ষ এবং $x = a$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। **[NUH–2006]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y^2 = 4ax$

মনে করি $P(x, y)$ এবং $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত কাছাকাছি দুটি বিন্দু।

P ও Q থেকে যথাক্রমে x অক্ষের উপর PP′ এবং QQ′ লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে PP′Q′Q প্রাথমিক ক্ষেত্রকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন হবে $\pi y^2\,\partial x$ এবং উহা $x = 0$ ও $x = a$ এর মধ্যে অবস্থান করে।





মনে করি নির্ণেয় আয়তন V

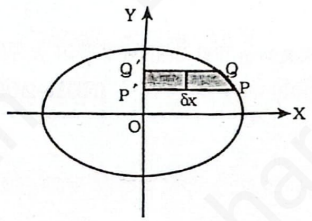
$$\therefore V = \int_0^a \pi y^2\,dx = \pi \int_0^a 4ax\,dx = 4\pi a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

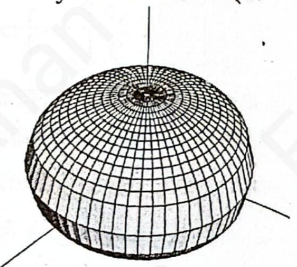
$$= 4\pi a\,\frac{a^2}{2} = 2\pi a^3 \text{ ঘন একক।}$$

উদাহরণ–4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে y অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। **[NUH(NM)–2007]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

মনে করি P(x, y) এবং Q(x + δx, y + δy) উপবৃত্তের উপরোস্থ দুটি কাছাকাছি বিন্দু। P থেকে y অক্ষের উপর PP′ এবং Q থেকে Y অক্ষের উপর QQ′ লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে PQQ′P′ প্রাথমিক ক্ষেত্রে (elementary area) y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে সৃষ্ট ঘনবস্তুর আয়তন $\pi x^2\,\delta y$ এবং প্রাথমিক ক্ষেত্র $y = -b$ ও $y = b$ এর মধ্যে অবস্থিত।





ধরি নির্ণেয় আয়তন V

$$\therefore V = \int_{-b}^{b} \pi x^2\,dy = \pi \int_{-b}^{b} \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)dy \qquad \therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

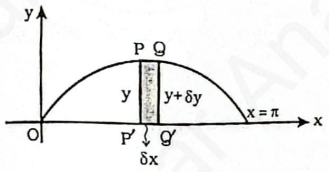
$$= \frac{2\pi a^2}{b^2}\left[b^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^b \qquad \therefore x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$$

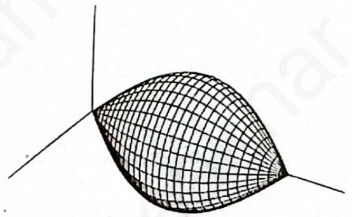
$$= \frac{2\pi a^2}{b^2}\left(b^3 - \frac{b^3}{3}\right) = \frac{4\pi a^2 b}{3} \text{ ঘন একক।}$$

উদাহরণ–5. $y = \sin x$ বক্ররেখা এবং $x = 0$ ও $x = \pi$ এর মধ্যবর্তী x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। **[CUH–1981]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত বক্ররেখা $y = \sin x$

মনে করি P(x, y) এবং Q(x, + δx, y + δy) বক্র রেখাটির উপর অবস্থিত কাছাকাছি দুটি বিন্দু। P ও Q হতে যথাক্রমে PP′ ও QQ′ দুটি লম্ব x অক্ষের উপর অঙ্কন করি। তবে PP′Q′Q প্রাথমিক ক্ষেত্র (Elementary particle) কে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন $\pi y^2\,\partial x$ হবে। বস্তুটি $x = 0$ এবং $x = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত।





ধরি নির্ণেয় আয়তন V

$$\therefore V = \int_0^{\pi} \pi y^2\,dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx \qquad \therefore y = \sin x$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx \qquad \because \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx$$

$$= \frac{2\pi\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \text{ ঘন একক।}$$

উদাহরণ–6. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। **[DUH–1983]**

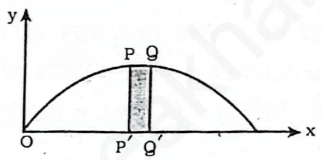
সমাধান ঃ প্রদত্ত সাইক্লয়েড $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$

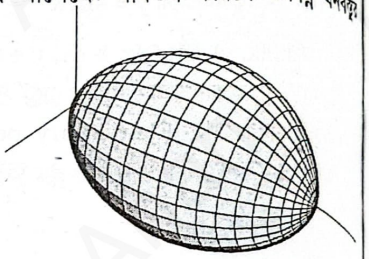
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= \cot\frac{\theta}{2}, \quad \theta = 0, 2\pi \text{ হইলে } \frac{dy}{dx} = \pm\infty$$

সুতরাং সাইক্লয়েডটি $\theta = 0$ ও $\theta = 2\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত।

মনে করি সাইক্লয়েডের উপর $P(x, y)$ এবং $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ খুব কাছাকাছি দুইটি বিন্দু। x অক্ষের উপর PP' ও QQ' লম্ব আঁকি। তাহলে $PP'Q'Q$ প্রাথমিক ক্ষেত্র (elementary area) কে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন $\pi y^2\,\delta x$.





এখানে ঘনবস্তুটি $\theta = 0$ ও $\theta = 2\pi$ এরমধ্যে অবস্থিত। সুতরাং আবর্তন জণিত ঘনবস্তুর নির্ণেয় আয়তন

$$V = \int_0^{2\pi} \pi y^2 \frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\, a(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^3 d\theta$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6\frac{\theta}{2}\,d\theta \qquad \text{ধরি } \frac{\theta}{2} = z$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 z.\, 2dz \qquad \therefore d\theta = 2\,dz$$

যখন $\theta = 2\pi$, $z = \pi$

$$= 16\pi a^3.\, 2\int_0^{2\pi} \sin^6 z\,dz \qquad \theta = 0,\ z = 0$$

$$= 32\pi a^3.\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(4)} = 16\pi a^3.\sqrt{\pi}.\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{3.2.1} = 5\pi^2 a^3 \text{ ঘন একক।}$$

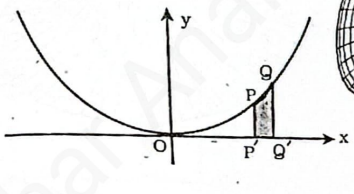
উদাহরণ–7. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডকে ইহার শীর্ষবিন্দুর স্পর্শকের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। **[DUH–1993]**

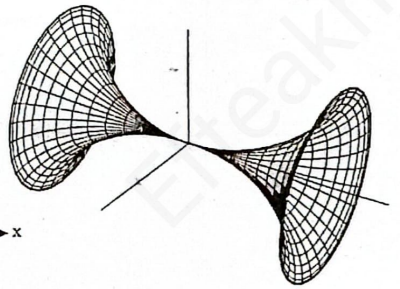
সমাধান ঃ প্রদত্ত সাইক্লয়েড $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \tan\frac{\theta}{2},\ \theta = \pm\pi \text{ হইলে } \frac{dy}{dx} = \pm\infty$$

সুতরাং সাইক্লয়ডটি $\theta = -\pi$ এবং $\theta = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত। প্রদত্ত সাইক্লয়েড এর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু এবং শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষ।

মনে করি সাইক্লয়েডের উপর $P(x, y)$ এবং $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ খুব কাছাকাছি দুইটি বিন্দু। x অক্ষের উপর PP' ও QQ' লম্ব আঁকি। তাহলে $PP'Q'Q$ প্রাথমিক ক্ষেত্র (elementary area) কে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন $\pi y^2\,\delta x$ হইবে।





এখানে ঘনবস্তুটি $\theta = -\pi$ এবং $\theta = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং আবর্তন জণিত ঘনবস্তুর নির্ণেয় আয়তন $V = 2\int_0^{\pi} \pi y^2 \frac{dx}{d\theta}.\,d\theta = 2\pi\int_0^{\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta}\,d\theta$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\, a(1+\cos\theta)d\theta$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 2\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^4\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta \qquad \text{ধরি } \frac{\theta}{2} = z$$

$$= 32\pi a^5 \int_0^{\pi/2} \sin^4 z.\cos^2 z.\,2dz \qquad \therefore d\theta = 2\,dz$$

যখন $\theta = \pi$ তখন $z = \frac{\pi}{2}$

$$= 32\pi a^3 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(4)} \qquad \text{যখন } \theta = 0 \text{ তখন } z = 0$$

$$= 32\pi a^3 . \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{2.3.2.1} = \pi^2 a^3 \text{ ঘন একক।}$$

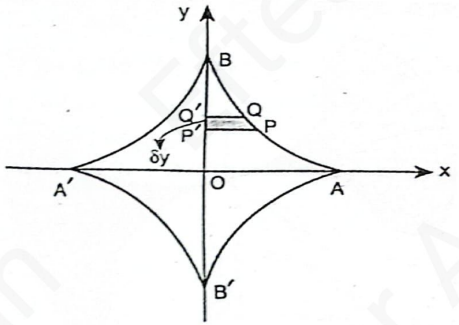
$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ হাইপোসাইক্লোয়েড y অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

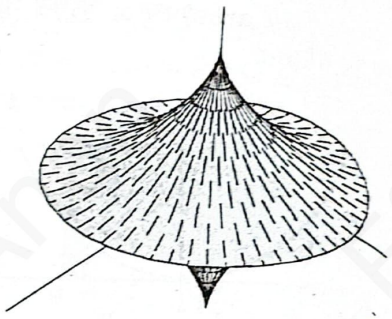
সমাধান ঃ প্রদত্ত হাইপোসাইক্লোয়েড $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ ..... (1)

যখন $y = 0$ তখন $x = \pm a$

সুতরাং (1) নং x অক্ষের সহিত A(a, 0) এবং A′(–a, 0) বিন্দুতে মিলিত হয়।

অনুরূপভাবে Y অক্ষের সহিত B(0, b) এবং B′(0, –b) বিন্দুতে মিলিত হয়।





মনে করি P(x, y) এবং Q(x + δx, y + δy) এট্রয়েডের উপর কাছাকাছি দুটি বিন্দু। P ও Q থেকে যথাক্রমে Y অক্ষের উপর PP′ ও QQ′ লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে PP′Q′Q প্রাথমিক ক্ষেত্র (elementary pasticle) কে Y অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন $\pi x^2\, \partial y$.

ঘনবস্তুটি $y = -b$ এবং $y = b$ এর মধ্যে অবস্থিত।

ধরি নির্ণেয় আয়তন V

$$\therefore V = 2\int_0^b \pi x^2\, dy$$

এখন (1) নং এর পরামিতিক সমীকরণ

$$x = a\cos^3\theta,\ y = b\sin^3\theta$$

$$\Rightarrow dy = 3b\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta$$

যখন $y = 0$ হয় তখন $\theta = 0$

যখন $y = b$ হয় তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

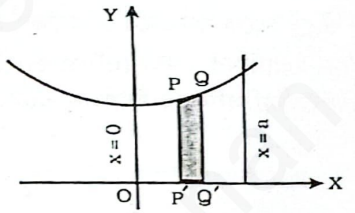
$$\therefore V = 2\pi\int_0^{\pi/2} a^2\cos^6\theta\, 3b\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta$$

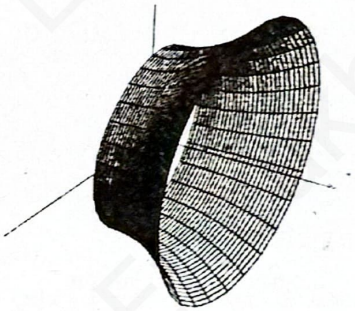
$$= 6\pi a^2 b\int_0^{\pi/2} \cos^7\theta\sin^2\theta\, d\theta = 6\pi a^2 b\,\frac{\Gamma(4)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$$

$$= \frac{6\pi a^2 b\ 3.16}{9.7.5.3} = \frac{32\pi a^2 b}{105}$$ ঘন একক।

উদাহরণ–9. $y = \frac{1}{2}a\,(e^{x/a} + e^{-x/a})$ ক্যাটিনারীটির $x = 0$ হইতে $x = a$ পর্যন্ত অংশকে x অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরাইলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, উহার আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ক্যাটেনারী $y = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a}) \Rightarrow y = a\cos h\frac{x}{a}$





মনে করি ক্যাটেনারীর উপর P(x, y) এবং Q(x + δx, y + δy) খুব কাছাকাছি দুটি বিন্দু। P ও Q হতে যথাক্রমে X অক্ষের উপর PP′ ও QQ′ লম্ব আঁকি। তাহলে PP′Q′Q প্রাথমিক ক্ষেত্র (elementary pasticle) কে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন $\pi y^2\, \partial x$.

এখানে ঘনবস্তুটি $x = 0$ এবং $x = a$ এর মধ্যে অবস্থিত।

ধরি নির্ণেয় আয়তন V

$$\therefore V = \int_0^a \pi y^2\, dx = \pi\int_0^a a^2\cosh^2\frac{x}{a}\, dx$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}\int_0^a \left(1 + \cosh\frac{2x}{a}\right) dx$$

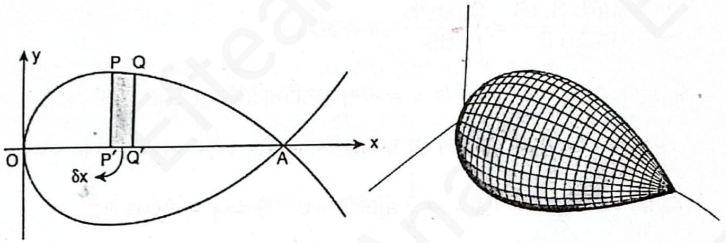
$$= \frac{\pi a^2}{2}\left[x + \frac{a}{2}\sinh\frac{2x}{a}\right]_0^a = \frac{\pi a^2}{2}\left[a + \frac{a}{2}\sinh 2\right]$$ ঘন একক।

উদাহরণ–10. $2ay^2 = x(x-a)^2$ রেখার ফাঁসটিকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বক্ররেখা $2ay^2 = x(x-a)^2$. উহা x অক্ষের সহিত প্রতিসম।

ধরি $y = 0$ তখন $x = 0, a$

∴ বক্ররেখাটি x অক্ষকে (0, 0) ও (a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।



মনে করি O(0, 0) এবং A(a, 0) এবং প্রদত্ত বক্ররেখার উপর P(x, y) এবং Q(x + δx, y + δy) দুটি নিকটবর্তী বিন্দু। এখন P ও Q থেকে যথাক্রমে X অক্ষের উপর PP′ ও QQ′ লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে PP′ Q′Q প্রাথমিক ক্ষেত্র (elementary pasticle) কে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আযতন $\pi y^2\,\partial x$. ঘনবস্তুটি $x = 0$ এবং $x = a$ এর মধ্যে অবস্থিত।

ধরি নির্ণেয় আয়তন V

$$\therefore V = \int_0^a \pi y^2\,dx = \frac{\pi}{2a}\int_0^a x(x-a)^2dx \qquad \because y^2 = \frac{x}{2a}(x-a)^2$$

$$= \frac{\pi}{2a}\int_0^a (x^3 - 2ax^2 + a^2x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2a}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{a^2x^2}{2}\right]_0^a$$

$$= \frac{\pi}{2a}\left[\frac{a^4}{4} - \frac{2a^4}{3} + \frac{a^4}{2} - 0\right] = \frac{\pi a^3}{24}$$ ঘন একক।

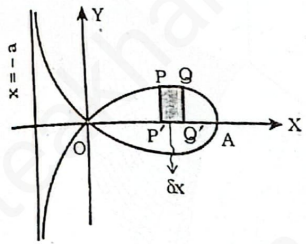
উদাহরণ–11. দেখাও যে $y^2(a + x) = x^2(a - x)$ রেখার একটি ফাঁসকে X অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন $2\pi a^3\left(ln\,2 - \frac{2}{3}\right)$.

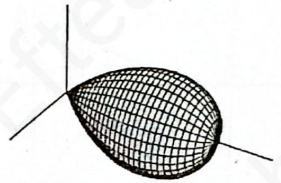
[NUH–1994, DUH–2005]

সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $y^2 = \frac{x^2(a-x)}{(a+x)}$ ..... (1)

উহা x অক্ষের সহিত প্রতিসম। ধরি $y = 0$ তখন $x = 0, a$ অর্থাৎ বক্ররেখাটি x অক্ষকে (0, 0) এবং (a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি বিন্দুদ্বয় O(0, 0) এবং A(a, 0). যখন $x = -a$ তখন $y \pm \infty$ হয়। সুতরাং $x = -a$ সরলরেখাটি প্রদত্ত বক্ররেখার একটি অসীমতট।





(1) নং বক্ররেখার উপর P(x, y) এবং Q(x + δx, y + δy) কাছাকাছি দুটি বিন্দু। P ও Q হতে x অক্ষের উপর যথাক্রমে PP′ এবং QQ′ লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে PP′Q′Q প্রাথমিক ক্ষেত্র (elementary area) কে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে সৃষ্ট ঘন বস্তুর আয়তন $\pi y^2\,\partial x$ হবে এবং ঘনবস্তুটি $x = 0$ ও $x = a$ এর মধ্যে অবস্থিত থাকবে।

মনে করি নির্ণেয় আয়তন V

$$\therefore V = \int_0^a \pi y^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^a \frac{x^2(a-x)dx}{(a+x)}$$ [(1) নং দ্বারা]

$$= -\pi\int_0^a \frac{x^2(x-a)}{(x+a)}dx$$

$$= -\pi\int_0^a \frac{x^2(x+a) - 2ax(x+a) + 2a^2(x+a) - 2a^3}{x+a}dx$$

$$= -\pi\int_0^a \left[x^2 - 2ax + 2a^2 - \frac{2a^3}{x+a}\right]dx$$

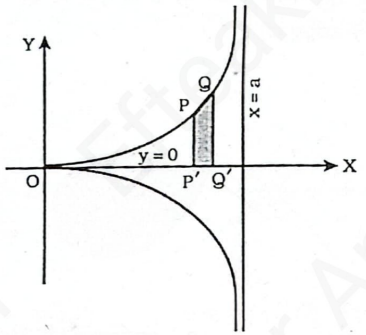
$$= -\pi\left[\frac{x^3}{3} - ax^2 + 2a^2x - 2a^3 ln(x+a)\right]_0^a$$

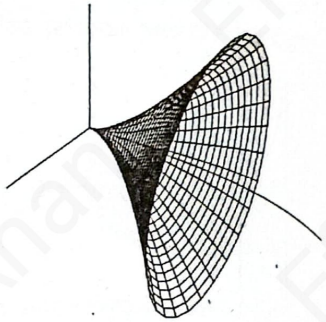
$$= -\pi\left[\frac{4a^3}{3} - 2a^3\,ln\frac{2a}{a}\right]$$

$$= 2\pi a^3\left[ln\,2 - \frac{2}{3}\right]$$ ঘন একক।

উদাহরণ–12. $ay^2 = x^3$, $y = 0$, $x = a$ দ্বারা সীমাবদ্ধক্ষেত্রকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তনের ফলে সৃষ্ট ঘন বস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $ay^2 = x^3$ ..... (1) এবং $x = a$ ..... (2)





মনে করি (1) নং বক্ররেখার উপর $P(x, y)$ এবং $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ দুটি কাছাকাছি বিন্দু। P ও Q বিন্দু হতে যথাক্রমে OX এর উপর PP′ ও QQ′ লম্ব অঙ্কন করি, তাহলে PP′Q′Q প্রাথমিক ক্ষেত্র (elementary area) কে X অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন হবে $\pi y^2\,\partial x$. এখানে ঘন বস্তুটি $x = 0$ ও $x = a$ এর মধ্যে অবস্থিত।

মনে করি নির্ণেয় ঘন বস্তুর আয়তন V

$$\therefore V = \int_0^a \pi y^2\,dx = \pi\int_0^a \frac{x^3}{a}\,dx = \frac{\pi}{a}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi}{4a}a^4 = \frac{\pi}{4}a^3 \text{ ঘন একক।}$$

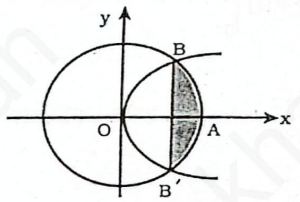
উদাহরণ–13. $y^2 = 8ax$ পরাবৃত্তটি $x^2 + y^2 = 9a^2$ বৃত্তকে দুই অংশে বিভক্ত করে। অংশ দুইটির মধ্যে অপেক্ষাকৃত ক্ষুদ্র চাপটিকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

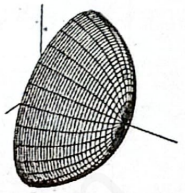
সমাধান ঃ প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 8ax$ ..... (1) এবং বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 = 9a^2 \text{ ..... (2)}$$

$$\Rightarrow x^2 + 8ax = 9a^2 \Rightarrow (x + 9a)(x - a) = 0$$

$$\therefore x = a, -9a$$





কিন্তু $x = -9a$ এর জন্য (1) এর y বিদ্যমান নয়। সুতরাং $x \neq -9a$.

এখন $x = a$ এর জন্য (1) $\Rightarrow y^2 = 8a^2 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}a$

সুতরাং পরাবৃত্তটি বৃত্তকে $B(a, 2\sqrt{2}a)$ এবং $B'(a, -2\sqrt{2}a)$ বিন্দুতে ছেদ করে। বৃত্তটি x অক্ষকে $A(3a, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে বৃত্তের ক্ষুদ্র চাপ BAB′ কে $x = a$ ও $x = 3a$ এর মধ্যে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তনই নির্ণেয় আয়তন হবে।

সুতরাং নির্ণেয় আয়তন

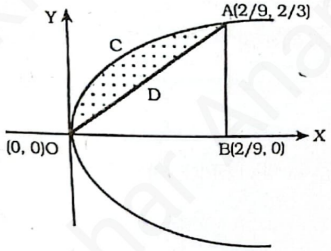
$$V = \int_a^{3a} \pi y^2\,dx \text{ যেখানে } y^2 = 9a^2 - x^2 = \pi\int_a^{3a}(9a^2 - x^2)dx$$

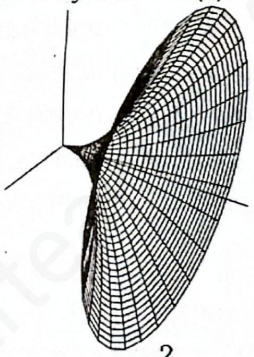
$$= \pi\left[9a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_a^{3a} = \pi\left[27a^3 - \frac{27a^3}{3} - 9a^3 + \frac{a^3}{3}\right]$$

$$= \pi a^3\left(9 + \frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3}\pi a^3 \text{ ঘন একক।}$$

উদাহরণ–14. $y^2 = 2x$ বক্ররেখার এবং $y = 3x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে ঘুরাইলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। **[CUH–1982]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y^2 = 2x$ ..... (1) এবং সরলরেখা $y = 3x$ ..... (2)





ধরি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু O(0, 0)

(1) ও (2) নং হতে পাই $(3x)^2 = 2x \Rightarrow x(9x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{2}{9}$

যখন $x = 0$ তখন (2) $\Rightarrow y = 0$, $x = \frac{2}{9}$ তখন (2) $\Rightarrow y = \frac{2}{3}$

সুতরাং পরাবৃত্তটি সরল রেখার সহিত O(0, 0) এবং $A\left(\frac{2}{9}, \frac{2}{3}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন ODACO ক্ষেত্রটিকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তনই নির্ণেয় আয়তন হবে। ধরি আয়তন V

$\therefore$ V = (OCABO ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন – ODABO ক্ষেত্রকে X অক্ষের চারিদিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন) $= V_1 - V_2$ (ধরি)

এখন $V_1 = \int_0^{2/9} \pi y^2\,dx = \pi \int_0^{2/9} 2x\,dx$

এখন $y^2 = 2x = 2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2/9} = \frac{4\pi}{81}$

আবার $V_2 = \int_0^{2/9} \pi y^2\,dx = \pi \int_0^{2/9} 9x^2\,dx$

এখানে $y = 3x = 9x \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2/9} = 3\pi\left[\frac{8}{(9)^3}\right] = \frac{8\pi}{(3)\,(81)}$ যেহেতু $V = V_1 - V_2$

$\therefore V = \frac{4\pi}{81} - \frac{8\pi}{3.81} = \frac{4\pi}{243}$ ঘন একক।

উদাহরণ–15. দেখাও যে $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$ ইভোলিউট x অক্ষ এবং $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন $80\pi a^3$. **[NUH(NM)–2009]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ইভোলিউট $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$ ..... (1)

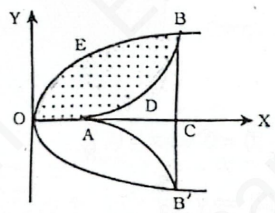
এবং পরাবৃত্ত $y^2 = 4ax$ ..... (2)

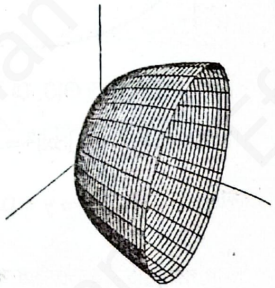
(1) নং এবং (2) নং উভয়েই x অক্ষের সহিত প্রতিসম।

(1) নং এবং $y = 0$ বসালে পাই $x = 2a$

$\therefore$ ইভোলিউটের সুক্ষাগ্র (2a, 0)

(2) নং এ $y = 0$ বসালে $x = 0$ অর্থাৎ পরাবৃত্তের শীর্ষ বিন্দু (0, 0)





মনে করি O(0, 0) এবং A(2a, 0)

(1) ও (2) হতে পাই $27a.\,4ax = 4(x - 2a)^3$

$\Rightarrow x^3 - 6ax^2 - 15a^2x - 8a^3 = 0 \Rightarrow (x + a)^2\,(x - 8a) = 0$

$\therefore x = 8a,\ x = -a$

কিন্তু $x = -a$ এর জন্য পরাবৃত্ত এবং ইভোলিউটের কোন অস্তিত্ব নেই।

সুতরাং $x = -a$ গ্রহন যোগ্য নয়।

$\therefore x = 8a$ এর জন্য $y^2 = 4a.8a \Rightarrow y = \pm 4a\sqrt{2}$

$\therefore$ ছেদ বিন্দু $(8a, 4a\sqrt{2})$ এবং $(8a, -4a\sqrt{2})$

মনে করি উহা B এবং B′। এখন OADBEO ক্ষেত্রকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তনের ফলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তনই নির্ণেয় আয়তন, ধরি উহা V

$\therefore$ V = (OEBCO ক্ষেত্রকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন) – (ADBCA ক্ষেত্রকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন জনিত ঘন বস্তুর আয়তন) $= V_1 - V_2$ (ধরি) ..... (3)

এখানে $V_1 = \int_0^{8a} \pi y^2\,dx$ যেখানে $y^2 = 4ax = 4\pi a \int_0^{8a} x\,dx$

$= 4\pi a \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{8a} = 4\pi a.\frac{64a^2}{2} = 128\pi a^3$.

এবং $V_2 = \int_{2a}^{8a} \pi y^2\,dx$ যেখানে $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$

$= \frac{4\pi}{27a} \int_{2a}^{8a} (x - 2a)^3\,dx = \frac{4\pi}{27a}\left[\frac{(x - 2a)^4}{4}\right]_{2a}^{8a}$

$= \frac{\pi}{27a}[(6a)^4 - 0] = 48\pi a^3$

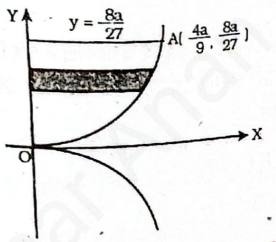
(3) নং হতে পাই $V = V_1 - V_2 = 128\pi a^3 - 48\pi a^3 = 80\pi a^3$ ঘন একক।

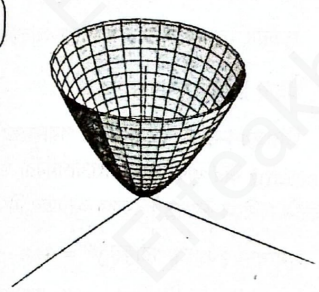
উদাহরণ–16. $ay^2 = x^3$ বক্ররেখা এবং $27y = 8a$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে y অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $ay^2 = x^3$ ..... (1) এবং $y = \frac{8a}{27}$ ..... (2)

$\therefore$ (1) $\Rightarrow a\left(\frac{8a}{27}\right)^2 = x^3 \Rightarrow x = \frac{4a}{9}$

$\therefore$ (1) ও (2) এর ছেদবিন্দু $A\left(\frac{4a}{9}, \frac{8a}{27}\right)$





এখন (1) ও (2) দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন

$$V = \int_0^{\frac{8a}{27}} \pi x^2\, dy,\ x = (ay^2)^{1/3}$$

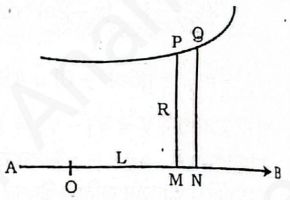
$$= \pi \int_0^{\frac{8a}{27}} (ay^2)^{2/3}\, dy = \pi a^{2/3} \left[\frac{y^{7/3}}{7/3}\right]_0^{\frac{8a}{27}}$$

$$= \pi a^{2/3} \frac{3}{7}\left[\left(\frac{8a}{27}\right)^{7/3} - 0\right]$$

$$= \frac{3\pi}{7} \cdot a^{2/3} \cdot a^{7/3} \cdot \frac{2^7}{3^7} = \frac{128\pi a^3}{5103}.$$

23.A.4. উপপাদ্য ঃ যদি আবর্তন অক্ষ x অক্ষ বা y অক্ষ বিবেচনা না করা হয় সেইক্ষেত্রে আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র প্রতিষ্ঠা কর।

সমাধান ঃ মনে করি আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর আবর্তন অক্ষ AB এর উপর O নির্দিষ্ট বিন্দু। যদি উৎসারক রেখা (generating varve) এর উপরস্থ P ও Q দুইটি কাছাকাছি বিন্দু হয় এবং PM ও QN আবর্তন অক্ষের উপর লম্ব হয় তবে PMNQ ক্ষেত্রের জন্য আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর আয়তন হইবে



$dV = \pi(PM)^2.MN = \pi(PM)^2.$ (OM এর সামান্য বৃদ্ধি)

$= \pi(PM)^2\, d(OM)$

যদি PM = R এবং OM = L হয় তবে $dV = \pi R^2\, dL$

সুতরাং সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের সাপেক্ষে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর আয়তন $V = \int \pi R^2\, dL$

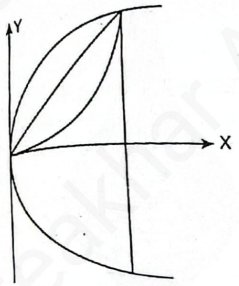
ইহাই নির্ণেয় সমাধান সূত্র।

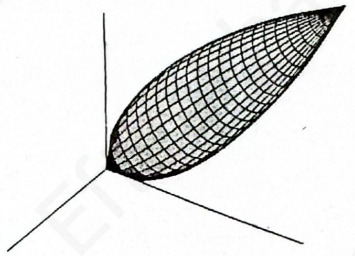
উদাহরণ–**17.** $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের শীর্ষ (Vertex) হইতে উপকেন্দ্রিক লম্ব (Latus rectum) এর এক প্রান্ত সংযোগকারী জ্যা দ্বারা ছেদিত ক্ষেত্রকে, ঐ জ্যা এর চারিদিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y^2 = 4ax$ ..... (1)

AA′ উপকেন্দ্রিক লম্ব ∴ A স্থানাঙ্ক (a, 2a)

∴ জ্যা OA এর সমীকরণ $\frac{x-a}{a-0} = \frac{y-2a}{2a-0} \Rightarrow y = 2x$





পরাবৃত্তের OA অংশের উপর যে কোন বিন্দু P হতে OA জ্যা এর উপর R = PN লম্ব হইলে

$$R = \frac{y-2x}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{ax}-2x}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}(\sqrt{ax}-x)$$

এখন ON = L হইলে $L^2 = OP^2 - PN^2$

$$= (x^2+y^2) - \frac{(y-2x)^2}{5} = \frac{(x+2y)^2}{5}$$

$$\therefore L = \frac{x+2y}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow dL = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{5}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{5}\sqrt{x}}\right)dx.$$

নির্ণেয় আয়তন V হইলে $V = \pi \int_0^a (R)^2\, dL$

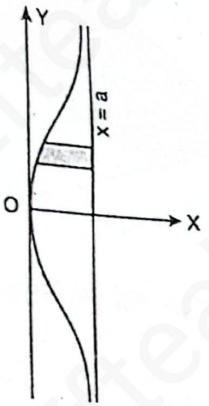
$$= \pi \int_0^a \frac{4}{5}(\sqrt{ax}-x)^2 \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)dx$$

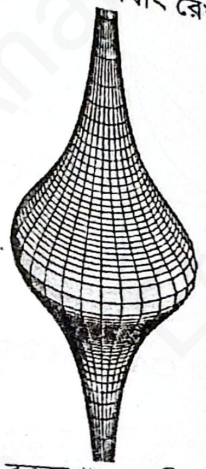
$$= \frac{4\pi}{5\sqrt{5}} \int_0^a (x^2 - 3ax + 2a^{3/2}x^{1/2})dx$$

$$= \frac{2\pi a^3}{15\sqrt{5}}.$$ ঘন একক।

উদাহরণ–**18.** $y^2(a-x) = a^2x$ রেখাকে ইহার অসীমতটের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। **[DUH–1993]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত বক্ররেখা $y^2 = \frac{a^2x}{a-x}$ ..... (1)





যদি $x = a$ হয় তবে $y \to \infty$ অর্থাৎ $x = a$, (1) নং বক্ররেখার একটি অসীমতট। মনে করি $P(x, y)$ এবং $Q(x + \partial x, y + \partial y)$, (1) নং রেখার উপর অবস্থিত কাছাকাছি দুটি বিন্দু। এখন P ও Q হতে যথাক্রমে $X = a$ এর উপর PP' ও QQ' লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে $PP'Q'Q$ প্রাথমিক ক্ষেত্র (element-ary particle) কে $x = a$ অসীমতটের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন $\pi(a - x)^2\, \partial y$ হবে এবং বস্তুটি $y \to -\infty$ এবং $y \to \infty$ এর মধ্যে অবস্থিত থাকবে।

ধরি নির্ণেয় আয়তন V

$$\therefore V = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(a - x)^2\, dy = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left[a - \frac{ay^2}{y^2 + a^2}\right]^2 dy$$

$$= 2\pi a^6 \int_0^{\infty} \frac{dy}{(y^2 + a^2)^2} \qquad \text{ধরি } y = a \tan\theta$$

$$\Rightarrow dy = a \sec^2\theta\, d\theta$$

যখন $y = 0$ তখন $\theta = 0$, $y \to \infty$ তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore V = 2\pi a^6 \int_0^{\pi/2} \frac{a \sec^2\theta\, d\theta}{(a^2 \sec^2\theta)^2} = 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi a^3\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{\pi^2 a^3}{2} \text{ ঘন একক।}$$

23.A.5. ভারকেন্দ্র (Centre of gravity) ঃ কোন অক্ষের ভিত্তিতে কতকগুলি বস্তুর সামগ্রিক ভ্রামকের মান পরিবর্তন না করে সে বিন্দুতে তাদের ওজনকে একত্রিত করা যায় তাকে বস্তু গুলির ভারকেন্দ্র বলে।

কোন বস্তুর প্রাথমিক (Elemantary) অংশের ভারকেন্দ্র (x, y) এবং ভর Δm হইলে ইনটিগ্রালের মাধ্যমে ঐ বস্তুর ভারকেন্দ্র নির্ণয়ের সূত্র ঃ $\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm}$, $\bar{y} = \frac{\int y\, dm}{\int dm}$

এখানে $(\bar{x}, \bar{y})$ বস্তুর ভারকেন্দ্র। সমতলিক ক্ষেত্রের প্রতি একক ক্ষেত্রফলের ভর ρ এবং প্রাথমিক ক্ষেত্রফল (Elamentary area) dA হইলে $dm = \rho\, dA$

এইক্ষেত্রে $\bar{x} = \frac{\int x\rho\, dA}{\int \rho\, dA} = \frac{\int x\, dA}{A}$, A = ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল

$$\bar{y} = \frac{\int y\rho\, dA}{\int \rho\, dA} = \frac{\int y\, dA}{A}$$

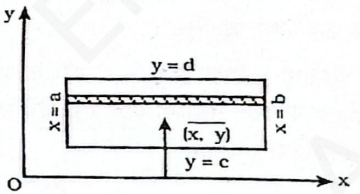
আবার কোন সমসত্ত্ব তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর ρ এবং প্রাথমিক চাপ (elementary arc) ds হইলে $dm = \rho\, ds$

এইক্ষেত্রে $\bar{x} = \frac{\int x\rho\, ds}{\int \rho\, ds} = \frac{\int x\, dx}{s}$, s = চাপটির দৈর্ঘ্য।

$$\bar{y} = \frac{\int y\rho\, ds}{\int \rho\, ds} = \frac{\int y\, ds}{s}.$$

23.A.6. প্যাপাস ও গুলডিনের তত্ত্ব (Theorem of pappus and Guldin) ঃ

একটি সমতলিক ক্ষেত্র যদি সেই সমতলে অবস্থিত এমন একটা অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করে, যাহা ঐ ক্ষেত্রটিকে ছেদ করে না, তাহা হইলে ঐ আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর আয়তন, ঐ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল ও উহার ভারকেন্দ্র কর্তৃক অংকিত পথের দৈর্ঘ্যের গুণফলের সমান।



$x = a$, $x = b$, $y = c$ ও $y = d$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ আয়তক্ষেত্রকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে একটি সিলিন্ডার আকৃতির শেল তৈরী হইবে। ক্ষেত্রটিকে x অক্ষের সমান্তরাল রেখাসমূহ দ্বারা কতকগুলি প্রাথমিক (Elementary) অংশে বিভক্ত করা হইলে একটি প্রাথমিক শেলের আয়তন

$dV = \pi(y + \Delta y)^2 x - \pi y^2 x$, x শেলের দৈর্ঘ্য $= \pi x(2y + \Delta y)\Delta y$

যখন $\Delta y \to 0$ তখন $dV = 2\pi xy\, dy = 2\pi y\, dA$

dA = প্রাথমিক শেলের ক্ষেত্রফল

সুতরাং আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর আয়তন

$$V = \int dV = \int 2\pi y\, dA = 2\pi \int y\, dA \ldots\ldots (1)$$

$\rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ হইলে $\bar{y} = \dfrac{\int y\, dA}{A}$

$\Rightarrow \int y\, dA = A\bar{y} \Rightarrow 2\pi \int y\, dA = A.2\pi\bar{y} \Rightarrow V = A.2\pi\bar{y}$ [(1) দ্বারা]

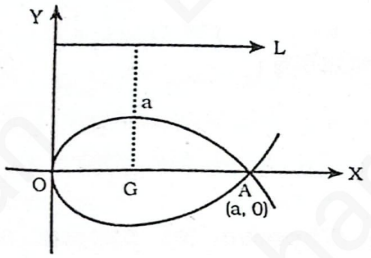
সুতরাং আবর্তন জনিত ঘন বস্তুর আয়তন = ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল × (ইহার ভারকেন্দ্র দ্বারা অংকিত পথের দৈর্ঘ্য)

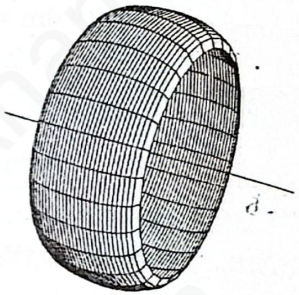
উদাহরণ–19. $2ay^2 = x(a - x)^2$ বক্ররেখার ফাঁসকে $y = a$ রেখার সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ $2ay^2 = x(a - x)^2$ ..... (1)

ইহা X অক্ষের সহিত প্রতিসম। যখন $y = 0$ তখন $x = 0, a$

সুতরাং (1) নং বক্ররেখার ফাঁস (0, 0) ও (a, 0) এর মধ্যে অবস্থিত।





এখানে ফাঁসের ভার কেন্দ্র ঘ্যাঁসটি যে রেখার সহিত প্রতিসম সে রেখার উপর অর্থাৎ X অক্ষের উপর অবস্থিত।

পুনরায় x অক্ষ ও $y = a$ রেখার মর্ধবর্তী দুরত্ব a সুতরাং ফাঁসটিকে $y = a$ রেখার চারিদিকে আবর্তন করানো হলে ফাঁসটির ভারকেন্দ্র একটি বৃত্ত উৎপন্ন করে যাহার ব্যাসার্ধ = a এবং পরিসীমা = $2\pi a$.

আবার ফাঁসের ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^a y\, dx = 2\int_0^a \dfrac{\sqrt{x}\,(a - x)}{\sqrt{(2a)}}\, dx$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \int_0^a (a\sqrt{x} - x^{3/2})dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \int_0^a \left[\frac{2a}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^a = \frac{4\sqrt{2}}{15}a^2$$ বর্গ একক।

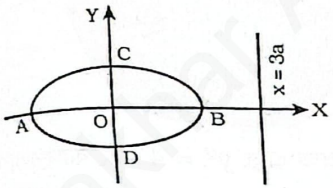
প্যাপাস ও গুলডিনের তত্ত্ব হইতে পাই

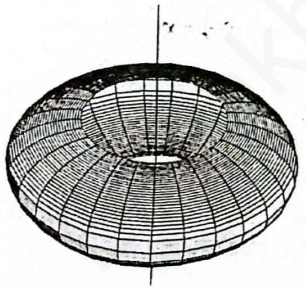
নির্ণেয় আয়তন = (ক্ষেত্রফল) × (ভরকেন্দ্র দ্বারা অংকিত পথের দৈর্ঘ্য)

$$= \frac{4\sqrt{2}}{15}a^2\, 2\pi a = \frac{8\sqrt{2}}{15}\pi a^3$$ ঘন একক।

উদাহরণ–20. $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ উপবৃত্তকে $x = 3a$ রেখার চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত পরামাত্রিক সমীকরণ $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$





উক্ত পরামাত্রিক সমীকরণ বিশিষ্ট উপবৃত্তের কার্তেসীয় আকার $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ..... (1)

ইহার শীর্ষ বিন্দু (–a, 0) এবং (a, 0) ধরি উহা A এবং B কেন্দ্র O(0, 0).

অর্থাৎ উপবৃত্তটির ভারকেন্দ্র O(0, 0)। মনে করি উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল = S

$\therefore$ S = 4(BOC এর ক্ষেত্রফল)

এখানে C(0, b) এবং D(0, – b) বিন্দুদ্বয় উপবৃত্ত ও Y অক্ষের ছেদ বিন্দু।

$$\therefore S = 4\int_0^a y\, dx = 4\int_{\pi/2}^0 b\sin\theta \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

$$= 4b\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, a\sin\theta\, d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 4ab\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2)} = 2ab\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = \pi ab$$

যদি উপবৃত্তকে $x = 3a$ রেখার সাপেক্ষে আবর্তন করানো হয়। ভারকেন্দ্র O দ্বারা অঙ্কিত পথের দৈর্ঘ্য $= 2\pi(3a) = 6\pi a$.

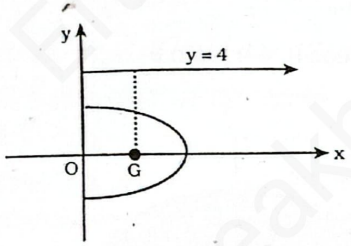
প্যাপাস-গুলডিনের উপপাদ্য অনুসারে পাই

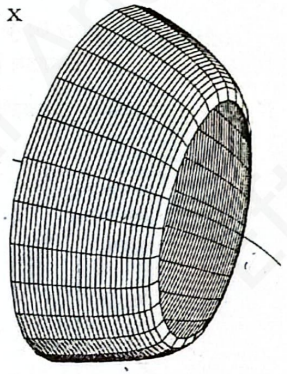
নির্ণেয় আয়তন = উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল X উহার ভারকেন্দ্র দ্বারা অঙ্কিত পথের দৈর্ঘ্য।

$= \pi ab \times 6\pi a = 6\pi^2 a^2 b$ ঘন একক।

উদাহরণ–21. y অক্ষ এবং $y^2 = 4 - x$ বক্ররেখার মধ্যবর্তী ক্ষেত্রকে $y = 4$ রেখার চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ $y^2 = 4 - x$





ইহা x অক্ষের সহিত প্রতিসম।

এখন $y = 0$ হইলে $x = 4$ হইবে। সুতরাং y অক্ষ এবং $y^2 = 4 - x$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= 2\int_0^4 y\,dx = 2\int_0^4 (4-x)^{1/2}dx = 2\left[\frac{(4-x)^{3/2}}{-3/2}\right]_0^4 = \frac{32}{3}$$ বর্গ একক।

প্যাপাস ও গুলডিনের তত্ত্ব হইতে পাই

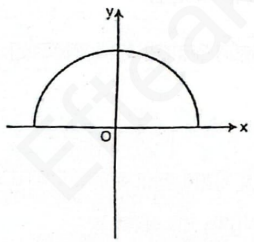
নির্ণেয় আয়তন = (ক্ষেত্রফল) × (ভারকেন্দ্রের সঞ্চার পথ)

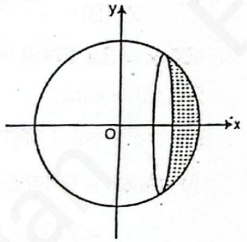
$$= \frac{32}{3} \cdot 2\pi.4 = \frac{256}{3}\pi$$ ঘন একক।

উদাহরণ–22. দেখাও যে, a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের কেন্দ্র হইতে $\frac{a}{2}$ দূরত্বের একটি সমতল দ্বারা একটি অংশ কর্তিত হইলে ঐ অংশের আয়তন গোলকের আয়তন $\frac{5}{12}$ গুণ।

[A segment is cut off from sphere of radius 'a' be a plane at a distance $\frac{a}{2}$ from the centre. Show that the volume of the segment is $\frac{5}{12}$ of the volume of the sphere.] **[NUH(NM)–2010]**

সমাধান ঃ





$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ অর্ধবৃত্তকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলক উৎপন্ন হয়।

এখন কেন্দ্র হইতে $\frac{a}{2}$ দূরত্বে অবস্থিত কোন সমতল দ্বারা কর্তিত গোলক অংশের আয়তন

$$= \pi\int_{a/2}^{a} y^2\,dx$$

$$= \pi\int_{a/2}^{a} (a^2 - x^2)\,dx$$

$$= \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{a/2}^{a}$$

$$= \pi\left[a^3 - \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{24}\right]$$

$$= \frac{5\pi a^3}{24}$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 \times \frac{5}{32}$$

= (গোলকের আয়তন) × $\frac{5}{32}$

সুতরাং কর্তিত অংশের আয়তন গোলকের আয়তনের $\frac{5}{32}$ গুণ।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

23.A.1. আবর্তনজনিত ঘনবস্তু কাকে বলে? (What is called solid of revolution?)

Ans : কোন নির্দিষ্ট রেখা বা ক্ষেত্রকে একটি সরলরেখার চারিদিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় উহাকে আবর্তনজিনত ঘনবস্তু বলে।

23.A.2. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ অর্ধবৃত্তকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে কি প্রকার আবর্তনজনিত ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়? (What type of the solid of revolution where is the semi-circle $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ revolved about x-axis?)

Ans : আবর্তনজনিত ঘনবস্তুটি একটি গোলক হইবে যাহার কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধ = a.

23.A.3. $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ এবং x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ এলাকাকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র লিখ। (Write the integral formula to find the volume of the solid of revolution where the region bounded by $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ and x-axis is revolved about x-axis.)

Ans : প্রদত্ত শর্তে উৎপন্ন আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র ঃ

$$\int_a^b \pi y^2\,dx,\ y = f(x)$$

23.A.4. $y = c$, $y = d$, $x = f(y)$ এবং y অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র লিখ।

Ans : আয়তন নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র ঃ $\int_c^d \pi x^2\,dy,\ x = f(y)$

EXERCISE–23(A)

1. $y = mx$ এবং $x = a$ সরলরেখা দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে আবর্তন জনিত কোণক উৎপন্ন হয়, তাহার আয়তন নির্ণয় কর।
   উত্তর ঃ $\frac{1}{3}\pi m^2a^3$ ঘন একক।
2. স্থানাংকের দুইটি অক্ষ এবং $y = 2 - x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ত্রিভূজকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।
   উত্তর ঃ $8\pi/3$ ঘন একক।
3. $x = a$ ও $y = h$ সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে আবর্তন জনিত সিলিন্ডার উৎপন্ন হয় তাহার আয়তন নির্ণয় কর।
   উত্তর ঃ πah^2 ঘন একক।
4. $y = 6 - x$, $y = 0$ এবং $x = 4$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তুর উৎপন্ন হয় তাহার আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $8\pi/3$ ঘন একক।
5. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটিকে ইহার একটি ব্যাসের চতুর্দিকে বা y অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরাইলে যে গোলক উৎপন্ন হয় তাহার আয়তন নির্ণয় কর। **[BSc(Pass)–2007]**
   উত্তর ঃ $4\pi a^2$ ঘন একক।
6. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তটির $x = 0$ হইতে $x = h$ পর্যন্ত অংশকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, উহার আয়তন নির্ণয় কর।
   উত্তর ঃ $2\pi ah^2$ ঘন একক।
7. $x = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং $y = 3a$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $18\pi a^3$ ঘন একক।
8. $x = at^2$, $y = 2at$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু হইতে উপকেন্দ্রিক লম্ব পর্যন্ত অংশকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে সৃষ্ট ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।
   উত্তর ঃ $2\pi a^3$ ঘন একক।
9. $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তকে y অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ 64π ঘন একক।

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে x অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরাইলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, উহার আয়তন নির্ণয় কর। **[NUH–03, 10, NUH(NM)–03, 08, B.Sc(Pass)–10, DUH–81, 88, 91, CUH–80]** উত্তর ঃ $\frac{4\pi}{3}ab^2$ ঘন একক।
11. $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ উপবৃত্তকে y অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{4\pi a^2 b}{3}$ ঘন একক।
12. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের $x = c$ হইতে $x = c + h$ $(c > a)$ পর্যন্ত অংশকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, উহার আয়তন নির্ণয় কর।
    উত্তর ঃ $\frac{\pi b^2 h}{3a^2}(3c^2 + 3ch + h^2 - 3a^2)$ ঘন একক।
13. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ অধিবৃত্তের $y = 3$ হইতে $y = 5$ পর্যন্ত অংশকে y অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাহার আয়তন নির্ণয় কর।
    উত্তর ঃ $\frac{176}{27}\pi$ ঘন একক।
14. $y = \cos x$ বক্ররেখা এবং $x = -\frac{\pi}{2}$ ও $x = \frac{\pi}{2}$ এর মধ্যবর্তী x অক্ষদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।
    উত্তর ঃ $\pi^2/2$ ঘন একক।
15. $y = x\sin mx$ এবং $x = 0$ ও $x = \frac{2\pi}{m}$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাহার আয়তন নির্ণয় কর।
    উত্তর ঃ $\frac{\pi^2(8\pi^2 - 3)}{6m^3}$ ঘন একক।
16. $x = 0$, $y = 0$ এবং $x = e^y$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ 2π ঘন একক।
17. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ সাইক্লয়েডকে x অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরাইলে সৃষ্ট ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। **[NUH–2004]**
    উত্তর ঃ $5\pi^2a^3$ ঘন একক।
18. $\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1$ বক্ররেখা দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে y অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{512}{105}\pi$ ঘন একক।
19. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ এস্ট্রয়েড দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{32}{105}\pi a^3$ ঘন একক।

20. $y = c \cos h(x/c)$ ক্যাটেনারী এবং $x = a$ ও $x = b$ রেখা দ্বারা ক্ষেত্রকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় উহার আয়তন নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $\left[\frac{\pi c^2}{4}\left(2x + c\sinh\frac{2x}{c}\right)\right]_a^b$ ঘন একক।

21. $a^2y^2 = x^2(2a - x)(a - x)$ বক্ররেখার একটি ফাঁসকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু তৈরী হয় তার আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{23}{60}\pi a^3$ ঘন একক।

22. দেখাও যে $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$ রেখার ফাঁসটিকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, ইহার আয়তন $\pi a^3(8\ ln 2 - 3)$ ঘন একক।

23. $y^2 = x^2(2 - x)$ রেখাটির ফাঁসের উপরের অর্ধাংশকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, উহার আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{4\pi}{3}$ ঘন একক।

24. $y^2(x - 4a) = ax(x - 3a)$ রেখার একটি ফাঁসকে x অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরাইলে যে ঘনবস্তু সৃষ্টি হয়, উহার আয়তন নির্ণয় কর। **[NUH(NM)-2006]**

উত্তর ঃ $\frac{15\pi a^3}{2} + 4\pi a^3\ ln\frac{1}{4}$ ঘন একক।

25. $xy^2 = 4(2 - x)$ রেখাকে y অক্ষের চতুর্দিকে চার সমকোণ আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, উহার আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $4\pi^2$ ঘন একক।

26. $y^2 = x^3$ এবং $y = 0$ ও $y = 8$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাহার আয়তন নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $\frac{384\pi}{7}$ ঘন একক।

27. $y^2 = 9x$ বক্ররেখা এবং $y = 3x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় উহার আয়তন নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $\frac{3\pi}{2}$ ঘন একক। **[DUH-1982]**

28. দেখাও যে $x^2 + y^2 = 64a^2$ বৃত্ত এবং $y^2 = 12ax$ পরাবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে ঘন বস্তু উৎপন্ন হয় তাহার আয়তন $\frac{608}{3}\pi a^3$ ঘন একক।

29. $y^2 = x^3$ ও $x^2 = y^3$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{5\pi}{28}$ ঘন একক।

30. 4a উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট কোন পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্পর্শক ও পরাবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে পরাবৃত্তের অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{2\pi a^3}{3}$ ঘন একক।

———x———

Chapter–23(B)

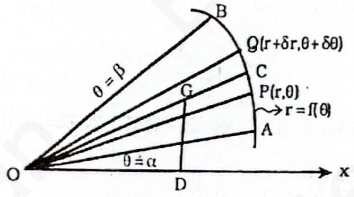
আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর আয়তন (পোলার স্থানাংক)

VOLUME OF SOLIDS OF REVOLUTION

23.B.1. উপপাদ্য ঃ $r = f(\theta)$ বক্ররেখা এবং $\theta = \alpha$ ও $\theta = \beta$ সরলরেখা দ্বারা বদ্ধ ক্ষেত্রকে আদি রেখার চারিদিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, প্রমাণ কর তাহার আয়তন হইবে

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3 \sin\theta\, d\theta$$

প্রমাণ ঃ



মনে করি $r = f(\theta)$ বক্ররেখা এবং $\theta = \alpha$ ও $\theta = \beta$ সরলরেখা দ্বারা OAB সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের AB বক্ররেখার উপরস্থ খুব কাছাকাছি $P(r, \theta)$ ও $Q(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$ দুইটি বিন্দু।

$\therefore$ OPQ প্রাথমিক ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}.\ OP.\ OQ \sin(POQ)$

$$= \frac{1}{2} r(r + \delta r)\sin\delta\theta$$

$$= \frac{1}{2} r(r + \delta r)\left\{\delta\theta - \frac{(\partial\theta)^3}{3!} + \cdots\right\}$$

এখানে δr ও $\delta\theta$ অতিক্ষুদ্র, সুতরাং ক্ষুদ্ররাশির উচ্চতরঘাত এর পদগুলি বাদ দিয়ে পাই

ΔPOQ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} r^2\,\delta\theta$। ΔPOQ এর মধ্যমা OC হইলে $r < OC < r + \delta r$ হইবে। যেহেতু δr অতিক্ষুদ্র, সুতরাং $OC = r$। ΔPOQ এর ভারকেন্দ্র G হইলে $OG = \frac{2}{3}.\ OC = \frac{2r}{3}$। আবার $\theta < (< GOX) < \theta + \delta\theta$। $\delta\theta$ অতিক্ষুদ্র হওয়ায় $< GOX = \theta$ হইবে।

আদিরেখার উহার GD লম্ব হইলে $\sin\theta = \frac{GD}{OG} \Rightarrow GD = OG\sin\theta = \frac{2r}{3}\sin\theta$

প্যাপাস ও গুলডিনের তত্ত্ব হইতে জানি POQ প্রাথমিক ক্ষেত্রটিকে আদি অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর প্রাথমিক আয়তন।

dV = POQ এর ক্ষেত্রফল × ইহার ভারকেন্দ্রের সঞ্চার পথ

$$= \frac{1}{2} r^2 \delta\theta . 2\pi . GD$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \delta\theta . 2\pi . \frac{2r}{3} \sin\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3} r^3 \sin\theta \, \delta\theta$$

যেহেতু ক্ষেত্রটি $\theta = \alpha$ ও $\theta = \beta$ রেখার মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং OAB ক্ষেত্রের আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর নির্ণেয় আয়তন হইবে

$$V = \int_\alpha^\beta dV = \int_\alpha^\beta \frac{2\pi}{3} r^3 \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3 \sin\theta \, d\theta .$$

নোট ঃ ক্ষেত্রটি $\theta = \frac{\pi}{2}$ রেখার সাপেক্ষে আবর্তন করিলে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর আয়তন হইবে $V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3 \cos\theta \, d\theta$.

উদাহরণ–22. $r = a(1 - \cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডকে আদিরেখার সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

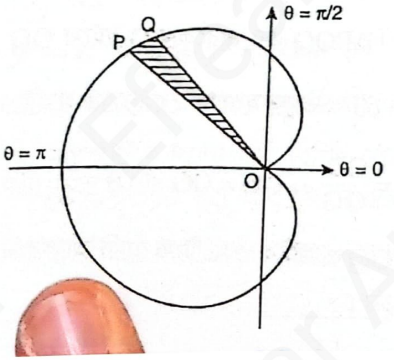
সমাধান ঃ প্রদত্ত কার্ডিঅয়েড $r = a(1 - \cos\theta)$ ..... (1)

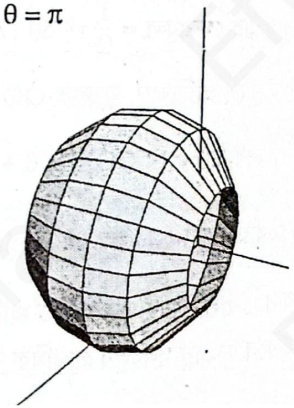
(1) নং সমীকরণে θ এর স্থলে $(-\theta)$ স্থাপন করলে সমীকরণটির কোন পরিবর্তন হয় না, সুতরাং উহা আদি রেখার সহিত প্রতিসম।

আমরা জানি $-1 \le \cos\theta \le 1$, সুতরাং (1) নং হতে পাই $\cos\theta$ এর বৃহত্তম মানের জন্য r এর মান ক্ষুদ্রতম এবং $\cos\theta$ এর ক্ষুদ্রতম মানের জন্য r এর মান বৃহত্তম হয়।

অর্থাৎ যখন $\cos\theta = 1$ তখন $r = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$\cos\theta = -1$ তখন $r = 2a \Rightarrow \theta = \pi$





মনে করি কার্ডিঅয়েডের উপর $P(r, \theta)$ এবং $Q(r + \partial r, \theta + \partial\theta)$ কাছাকাছি দুটি বিন্দু। তাহলে OPQ প্রাথমিক ক্ষেত্র (elementary area) কে আদিরেখার সাপেক্ষে আবর্তন করলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন $\frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta \, \partial\theta$.

এখানে ঘনবস্তুটি $\theta = 0$ এবং $\theta = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত।

মনে করি নির্ণেয় আয়তন = V

$$\therefore V = \int_0^\pi \frac{2\pi}{3} r^3 \sin\theta \, d\theta = \frac{2\pi}{3} a^3 . \int_0^\pi 8 \sin^6\frac{\theta}{2} . 2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^3 \int_0^\pi \sin^7\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

ধরি $\frac{\theta}{2} = z \Rightarrow d\theta = 2dz$। যখন $\theta = 0$ তখন $z = 0$, $\theta = \pi$ তখন $z = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore V = \frac{64}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^7 z \cos z \, dz = \frac{64}{3}\pi a^3 \frac{\Gamma(4)\,\Gamma(1)}{2\Gamma(5)}$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^3 \frac{6}{24} = \frac{8\pi a^3}{3}$$ ঘন একক।

উদাহরণ–23. $r = a + b\cos\theta$, $a > b$ লিমাকনকে আদিরেখার চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। **[CUH–1980]**

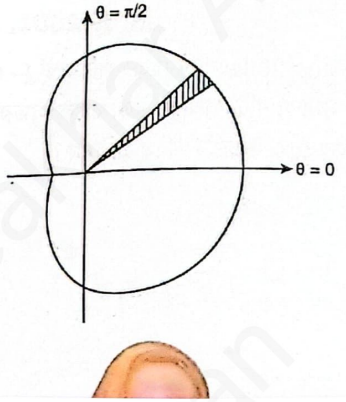
সমাধান ঃ প্রদত্ত লিমাকন $r = a + b\cos\theta$, $a > b$ ..... (1)

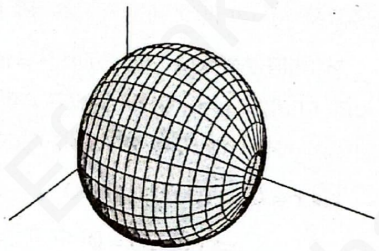
(1) নং সমীকরণে θ এর স্থলে $(-\theta)$ স্থাপন করলে সমীকরণটির কোন পরিবর্তন হয় না সুতরাং উহা আদিরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

আমরা জানি $-1 \le \cos\theta \le 1$, সুতরাং (1) নং হতে পাই $\cos\theta$ এর বৃহত্তম মানের জন্য r এর মান বৃহত্তম এবং $\cos\theta$ এর ক্ষুদ্রতম মানের জন্য r এর মান ক্ষুদ্রতম হয়।

অর্থাৎ যখন $\cos\theta = 1$ তখন $r = a + b \Rightarrow \theta = 0$

যখন $\cos\theta = 1$ তখন $r = a - b \Rightarrow \theta = \pi$





মনে করি লিমাকনের উপর P(r, θ) এবং Q(r + δr, θ + δθ) খুব কাছাকাছি দুইটি বিন্দু। এখন POQ প্রাথমিক ক্ষেত্র (elementary area) কে আদিরেখার সাপেক্ষে আবর্তন করলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন $\frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta\, \partial\theta$ হইবে।

আবর্তন জনিত ঘনবস্তুটি $\theta = 0$ এবং $\theta = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং প্রদত্ত লিমাকণকে আদিরেখার চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর নির্ণেয় আয়তন

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3 \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} (a + b\cos\theta)^3 \sin\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{2\pi}{3b}\int_0^{\pi} (a + b\cos\theta)^3\, d(a + b\cos\theta)$$

$$= -\frac{2\pi}{3b}\left[\frac{(a + b\cos\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2\pi}{3b}\left[\frac{(a-b)^4}{4} - \frac{(a+b)^4}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi}{6b}[(a+b)^4 - (a-b)^4]$$

$$= \frac{\pi}{6b}[\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\}]$$

$$= \frac{\pi}{6b}\cdot(2a^2 + 2b^2).\,4ab$$

$$= \frac{4}{3}\pi a(a^2 + b^2)$$ ঘন একক।

উদাহরণ–24. $r^2 = a^2\cos 2\theta$ লিমনিসকেটকে $\theta = \frac{\pi}{2}$ রেখার চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। **[NUH–2001, 2009]**

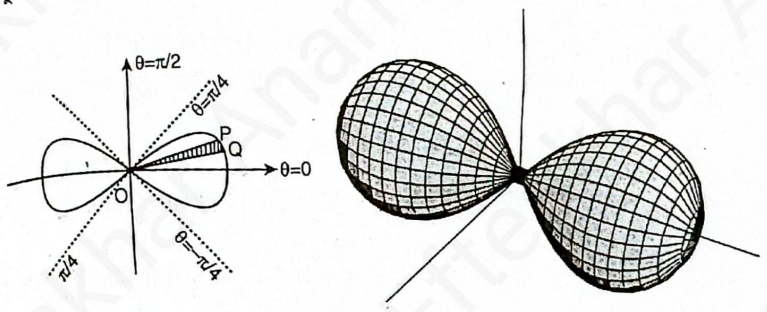
সমাধান ঃ প্রদত্ত লিমনিসকেট $r^2 = a^2\cos 2\theta$। এখানে θ এর পরিবর্তে (– θ) এবং r এর পরিবর্তে (–r) স্থাপন করলে প্রদত্ত সমীকরণটি অপরিবর্তিত থাকে সুতরাং উহা আদিরেখা এবং পোলগামী আদিরেখার সহিত লম্ব রেখা উভয়ের সহিত প্রতিসম।

ধরি $r = 0 \Rightarrow a^2\cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow 2\theta = \pm\frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \pm\frac{\pi}{4}$.

সুতরাং একটি ফাঁস $-\frac{\pi}{4}$ এবং $\frac{\pi}{4}$ এর মধ্যে অবস্থিত।



মনে করি লিমনিসকেটের উপর অবস্থিত P(r, θ) এবং Q(r + ∂r, θ + ∂θ) দুটি খুব কাছাকাছি বিন্দু। তাহা হইলে OPQ প্রাথমিক ক্ষেত্রকে $\theta = \frac{\pi}{2}$ রেখার চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর আয়তন $\frac{2}{3}\pi r^3\cos\theta\, \partial\theta$ হবে।

এখানে ঘন বস্তুটি $\theta = 0$ এবং $\theta = \frac{\pi}{4}$ এর মধ্যে অবস্থিত।

মনে করি নির্ণেয় আয়তন = V

$$\therefore V = 2\int_0^{\pi/4}\frac{2}{3}\pi r^3\cos\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\pi/4} a^3(\cos 2\theta)^{3/2}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/4}(1 - 2\sin^2\theta)^{3/2}\cos\theta\, d\theta$$

ধরি $\sqrt{2}\sin\theta = \sin z$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta = \cos z\, dz \Rightarrow \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos z\, dz$$

যখন $\theta = 0$ তখন $z = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ তখন $z = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore V = \frac{4\pi a^3}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}(1 - \sin^2 z)^{3/2}\cos z\, dz$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4 z\, dz$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(3)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2.2} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$$ ঘন একক।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

23.B.1. $r = f(\theta)$ বক্ররেখা এবং $\theta = \alpha$ ও $\theta = \beta$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে আদি রেখার চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয়ের সূত্র লিখ।

Ans : প্রদত্ত শর্তে আয়তন নির্ণয়ের সূত্র, $V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\theta \, d\theta$.

23.B.2. $r = f(\theta)$ বক্ররেখা এবং $\theta = \alpha$ ও $\theta = \beta$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে $\theta = \frac{\pi}{2}$ রেখার সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয়ের সূত্র লিখ।

Ans : প্রদত্ত শর্তে আয়তন নির্ণয়ের সূত্র, $V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos\theta \, d\theta$.

EXERCISE–23(B)

1. $r = 2a \sin\theta$ বৃত্তকে $\theta = \frac{\pi}{2}$ রেখার সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{4}{3}\pi a^3$ ঘন একক।

2. $r = a(1 + \cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডকে আদিরেখার চতুর্দিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় উহার আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{8}{3}\pi a^3$ ঘন একক।

3. $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ও $\theta = \frac{\pi}{2}$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ $r = a(1 + \cos\theta)$ কার্ডিঅয়েডকে আদিরেখার চতুর্দিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, উহার আয়তন নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $\frac{5\pi a^3}{2}$ ঘন একক।

4. $r = 2 + \cos\theta$ লিমাকনকে $\theta = 0$ রেখার চারিদিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{40}{3}\pi$ ঘন একক।

5. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ বক্ররেখার একটি ফাঁসকে $\theta = 0$ রেখার সাপেক্ষে আবর্তন করিলে প্রমাণ কর উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন $\frac{\pi}{24} a^3 \sqrt{2}\,[3\, ln\,(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}]$ ঘন একক হইবে।

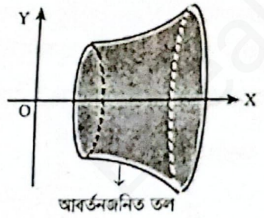
Chapter–24(A)

আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল (কার্তেসীয় আকারে)

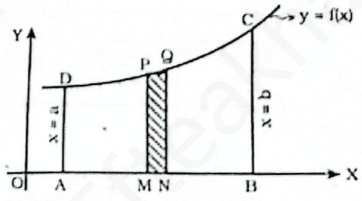
SURFACE AREA OF SOLIDS OF REVOLUTION (IN CARTESIAN)

24.A.1. সংজ্ঞা ঃ একটি সমতলিক রেখার একটি চাপকে একটি অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে তল উৎপন্ন হয়, তাহাকে আবর্তনজনিত তল এবং উহার ক্ষেত্রফলকে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল বলে।





24.A.2. $y = f(x)$ ফাংশন, x অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, প্রমাণ কর উহার তলের ক্ষেত্রফল $A = \int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dx} dx$.



প্রমাণ ঃ মনে করি, $y = f(x)$ ফাংশন, x অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধক্ষেত্র ABCD. $y = f(x)$ ফাংশনের উপর $P(x, y)$ ও $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ কাছাকাছি দুইটি বিন্দু। বিন্দু দুইটির কোটি PM ও QN হইলে $PM = y$ এবং $QN = y + \delta y$.

ধরি $DP = s$ এবং $PQ = \delta s$.

এখন PMNQ ক্ষেত্রটিকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল যদি δA হয়, তবে আমরা পাই

$$2\pi(PM)PR < \delta A < 2\pi(QN)PQ \Rightarrow 2\pi y\,\delta s < \delta A < 2\pi(y + \delta y)\delta s$$

যদি $Q \to P$ হয় অর্থাৎ $\delta s \to 0$ হয় তবে $\delta y \to 0$. অর্থাৎ $dA = 2\pi y\, ds$ ..... (1)

সুতরাং x অক্ষের সাপেক্ষে ABCD ক্ষেত্রকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল (1) কে x = a ও x = b সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাওয়া যাবে।

$$(1) \Rightarrow A = \int_a^b 2\pi y\, ds = \int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dx}\, dx \text{ যেখানে } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

নোট ঃ x = f(y) ফাংশন, y অক্ষ এবং y = c ও y = d সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে y অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় উহার তলের ক্ষেত্রফল A

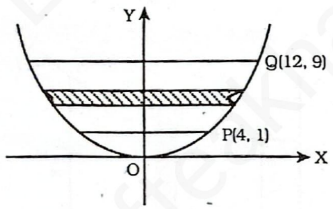
$$= \int_c^d 2\pi x \frac{ds}{dy}\, dy \text{ যেখানে } \frac{ds}{dy} = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

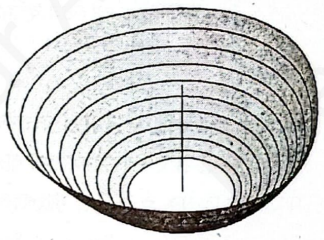
উদাহরণ–1. $x = 4\sqrt{y}$ পরাবৃত্তের P(4, 1) এবং Q(12, 9) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশকে y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = 16y$

অন্তরীকরণ করে $\frac{dx}{dy} = \frac{8}{x}$

এখন $\frac{ds}{dy} = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{\left(1+\frac{64}{x^2}\right)} = \frac{\sqrt{x^2+64}}{x}$





P(4, 1) বিন্দু হতে Q(12, 9) বিন্দু পর্যন্ত PQ চাপকে Y অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল A হলে

$$A = \int_0^9 2\pi x \frac{ds}{dy}\, dy = \int_0^9 2\pi x \frac{\sqrt{x^2+64}}{x}\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^9 \sqrt{(16y+64)}\, dy = 8\pi \int_0^9 \sqrt{(y+4)}\, dy$$

$$= 8\pi \cdot \frac{2}{3}\left[(y+4)^{3/2}\right]_1^9$$

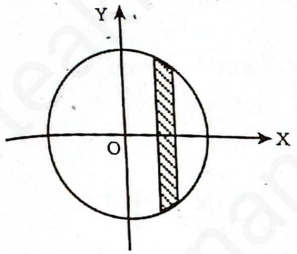
$$= \frac{16\pi}{3}\left[13\sqrt{13} - 5\sqrt{5}\right] \text{ বর্গ একক।}$$

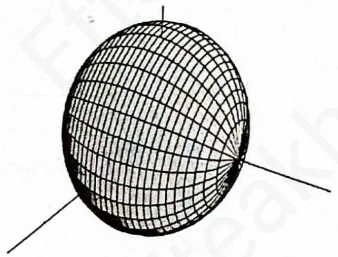
উদাহরণ–2. a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) অর্থাৎ বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2 = a^2$.

বৃত্তের সমীকরণকে অন্তরীকরণ করে পাই $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{a}{y}$$





এখন 'a' ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল ঃ

$$A = \int_{-a}^{a} 2\pi y \cdot \frac{ds}{dx}\, dx = \int_{-a}^{a} 2\pi y \cdot \frac{a}{y}\, dx$$

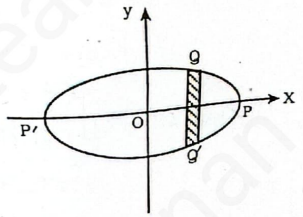
$$= 4\pi a \int_0^a dx = 4\pi a^2 \text{ বর্গ একক।}$$

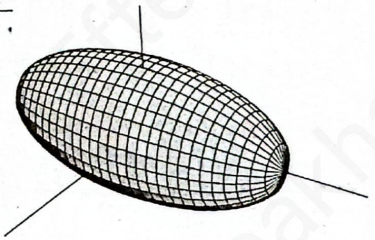
উদাহরণ–3. $x^2 + 4y^2 = 16$ উপবৃত্তকে (i) বৃহদাক্ষ (ii) ক্ষুদ্রাক্ষ এর চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[NUH–1967]**

সমাধান ঃ (i). বৃহদাক্ষের সাপেক্ষে ঃ

প্রদত্ত উপবৃত্ত $x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow 2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{16y^2+x^2}{(4y)^2}}.$$





এখন $y = 0$ হইলে $x = \pm 4$। সুতরাং PQP′ চাঁপটিকে $x = -4$ এবং $x = 4$ এর মধ্যে বৃহৎ অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরাইলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল

$$= 2\int_0^4 2\pi y \frac{ds}{dx}\,dx = 4\pi\int_0^4 y\frac{\sqrt{16y^2 + x^2}}{4y}\,dx$$

$$= \pi\int_0^4 \sqrt{4(16 - x^2) + x^2}\,dx$$

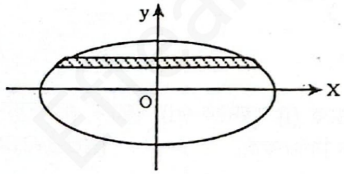
$$= \pi\int_0^4 \sqrt{64 - 3x^2}\,dx = \pi\sqrt{3}\int_0^4 \sqrt{\left(\frac{9}{\sqrt{3}}\right)^2 - x^2}\,dx$$

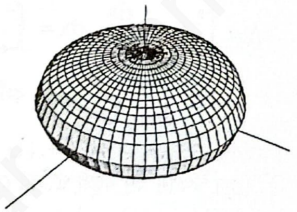
$$= \pi\sqrt{3}\left[\frac{x\sqrt{64/3 - x^2}}{2} + \frac{64/3}{2}\sin^{-1}\frac{x}{8/\sqrt{3}}\right]_0^4$$

$$= \pi\left[8 + \frac{32\pi}{3\sqrt{3}}\right]$$ বর্গ একক।

(ii). পুনরায় $x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dy} + 8y = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{4y}{x}$

$$\therefore \frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2 + 16y^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + 16y^2}}{x}$$





এখন $x = 0$ হইলে $y = \pm 2$. সুতরাং QPQ′ চাঁপটিকে $y = -2$ এবং $y = 2$ এর মধ্যে ক্ষুদ্রাক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল

$$= 2\int_0^2 2\pi x\frac{ds}{dy}\,dy = 4\pi\int_0^2 \frac{x\sqrt{x^2 + 16y^2}}{x}\,dy$$

$$= 4\pi\int_0^2 \sqrt{16 - 4y^2 + 16y^2}\,dy = 4\pi\int_0^2 \sqrt{16 + 12y^2}\,dy$$

$$= 4\pi^2\sqrt{3}\int_0^2 \sqrt{4/3 + y^2}\,dy$$

$$= 9\pi\sqrt{3}\left[\frac{y\sqrt{4/3 + y^2}}{2} + \frac{4/3}{2}ln\left(y + \sqrt{4/3 + y^2}\right)\right]_0^2$$

$$= 4\pi\sqrt{3}\left[\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}ln\,(\sqrt{3} + 2)\right]$$ বর্গ একক।

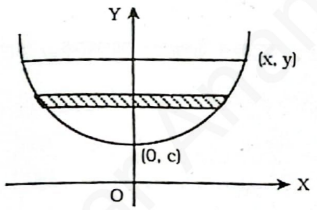
উদাহরণ–4. $y = c\cos h\frac{x}{c}$ ক্যাটিনারীর একটি চাঁপকে y অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

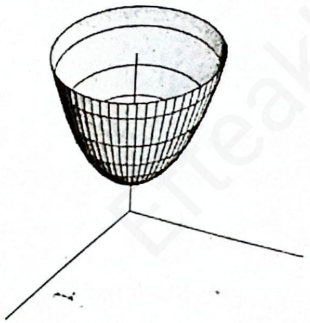
সমাধান ঃ প্রদত্ত ক্যাটিনারী $y = c\cos h\frac{x}{c}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই $\frac{dy}{dx} = \sin h\frac{x}{c}$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \sin^2 h\frac{x}{c}}\cosh\frac{x}{c}$$





এখন ক্যাটিনারীর শীষ বিন্দু (0, c) হইতে কোন বিন্দু (x, y) পর্যন্ত চাঁপকে y অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরাইলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় উহার তলের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^x 2\pi x\frac{ds}{dx}\,dx = 2\pi\int_0^x x\cos h\frac{x}{c}\,dx$$

$$= 2\pi\left[xc\sinh\frac{x}{c} - c^2\cosh\frac{x}{c}\right]_0^x$$

$$= 2\pi c\left[x\sin h\frac{x}{c} - c\cos h\frac{x}{c} + c\right]$$ বর্গ একক।

উদাহরণ–5. $ay^2 = x^3$ রেখাটি $x = 0$ হইতে $x = 4a$ পর্যন্ত x অক্ষের উপরের অংশকে y অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

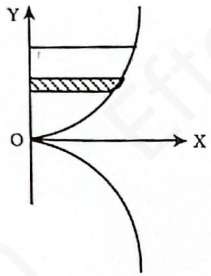
সমাধান ঃ প্রদত্ত বক্ররেখা $ay^2 = x^3$ ..... (1)

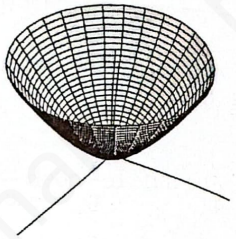
উহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই

$$2ay\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2a}\frac{x^2}{y}$$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{9x^4}{4a^2y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2y^2+9x^4}{4a^2y^2}} = \sqrt{\frac{4a+9x}{4a}} \quad [(1) \text{ নং দ্বারা}]$$





∴ প্রদত্ত রেখাটি x = 0 হইতে x = 4a পর্যন্ত x অক্ষের উপরের অংশকে y অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^{4a} 2\pi x \frac{ds}{dx}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^{4a} \frac{x(4a+9x)^{1/2}}{2\sqrt{a}}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a}} \int_0^{4a} x(4a+9x)^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{2\pi}{9\sqrt{a}} \int_{2\sqrt{a}}^{2\sqrt{10a}} \left[(t^2-4a)\frac{1}{9}t^2\right] dt$$

ধরি $4a+9x = t^2$

$\therefore dx = \frac{1}{9}2t\,dt$

$$= \frac{2\pi}{81\sqrt{a}} \int_{2\sqrt{a}}^{2\sqrt{10a}} (t^4-4at^2)dt$$

যখন x = 0 তখন $t = 2\sqrt{a}$

$$= \frac{2\pi}{81\sqrt{a}} \left[\frac{t^5}{5} - \frac{4at^3}{3}\right]_{2\sqrt{a}}^{2\sqrt{10a}}$$

যখন x = 4a তখন $t = 2\sqrt{10a}$

$$= \frac{2\pi}{81\sqrt{a}} \left[\frac{2^5(10a)^{5/2}}{5} - \frac{4a.\,2^3(10a)^{3/2}}{3} - \frac{2^5(a)^{5/2}}{5} + \frac{4a.2^3a^{3/2}}{3}\right]$$

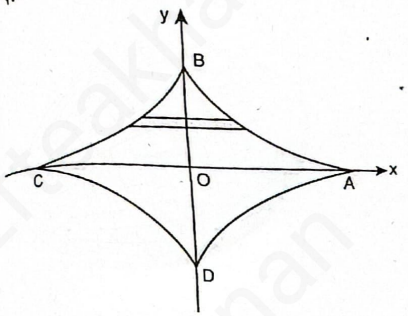
$$= \frac{64\pi a^2}{81}\left[\frac{250\sqrt{10}}{15} + \frac{2}{15}\right]$$

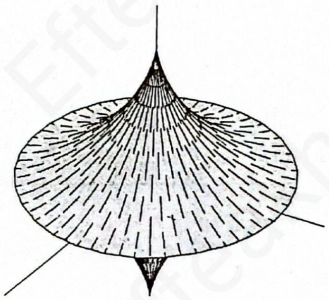
$$= \frac{128\pi a^2}{1215}[125\sqrt{10}+1] \text{ বর্গ একক।}$$

উদাহরণ–6. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ এস্ট্রয়েড দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে y অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, উহার তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[NU(NM)–2004]

সমাধান ঃ মনে করি $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ..... (1) এস্ট্রয়েডটি ABCD ক্ষেত্র নির্দেশ করে যেখানে A(a, 0), B(0, a), C(–a, 0) এবং D(0, – a).





(1) এর পরামিতিক সমীকরণ $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} - 3a\cos^2\theta\sin\theta, \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\therefore \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = 3a\sin\theta\cos\theta$$

এখানে AB চাপটি $\theta = 0$ এবং $\theta = \frac{\pi}{2}$ এর মধ্যে অবস্থিত। যেহেতু ক্ষেত্রটি x অক্ষের সাথে প্রতিসম। সুতরাং আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$2\int_0^{\pi/2} 2\pi x.\frac{dx}{d\theta}.d\theta = 4\pi\int_0^{\pi/2} a\cos^3\theta.\,3a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta = 12\pi a^2.\frac{\Gamma(5/2)\,\Gamma(1)}{2\Gamma(7/2)}$$

$$= 12\pi a^2.\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot 1}{2.\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}} = \frac{12\pi a^2}{5}.$$

উদাহরণ–7. $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$ সাইক্লয়েড x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, উহার তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

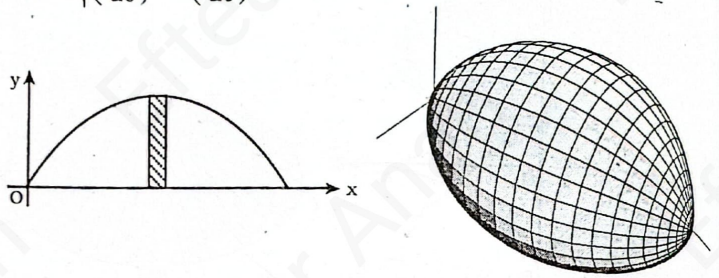
সমাধান ঃ প্রদত্ত সাইক্লয়েড

$$x = a(\theta-\sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta) = 2a\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$= 2a\sin^2\frac{\theta}{2} \qquad = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = 2a\sin\frac{\theta}{2}$$



এখানে সাইক্লয়েডটি $\theta = 0$ ও $\theta = 2\pi$ সীমার মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং সাইক্লয়েডটিকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল;

$$\int_0^{2\pi} 2\pi y \frac{ds}{d\theta} d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} 2a\sin^2\frac{\theta}{2}\, 2a\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 8\pi a2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{\theta}{2}\, d\theta \qquad \text{ধরি } \frac{\theta}{2} = z$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 z.\, 2dz \qquad \therefore d\theta = 2\,dz$$

যখন $\theta = 0, z = 0$

$$= 32\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 z\, dz \qquad \theta = 2\pi, z = \pi$$

$$= 32\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 z\, dz$$

$$= 32\pi a^2 . \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} = \frac{64\pi a^2}{3}$$ বর্গ একক।

উদাহরণ–8. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সাইক্লয়েড

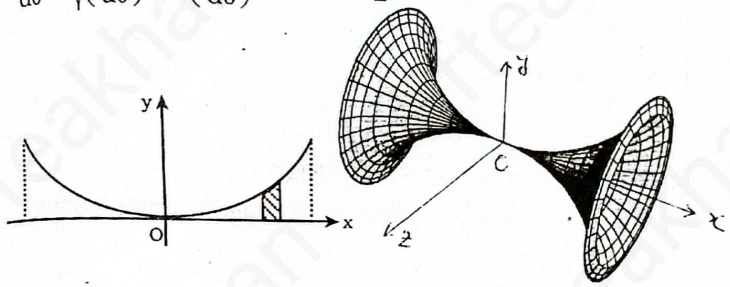
$$x = a(\theta + \sin\theta)$$

$$y = a(1 - \cos\theta)$$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = (1 + \cos\theta) \qquad \therefore \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$= 2a\cos^2\frac{\theta}{2} \qquad = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$



এখানে সাইক্লয়েডটি $\theta = -\pi$ ও $\theta = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত এবং y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। সুতরাং সাইক্লয়েডকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$2\int_0^{\pi} 2\pi y \frac{ds}{d\theta} d\theta = 4\pi \int_0^{\pi} 2a\sin^2\frac{\theta}{2} . 2a\cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} 2\sin^2\frac{\theta}{2} . \cos\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 32\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^2\frac{\theta}{2} d\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 32\pi a^2 \left[\frac{\sin^3\theta/2}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{32\pi a^2}{3}$$ বর্গ একক।

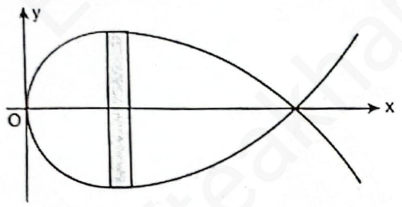
উদাহরণ–9. দেখাও যে $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$ রেখার ফাঁসকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর ক্ষেত্রফল 3π বর্গ একক।

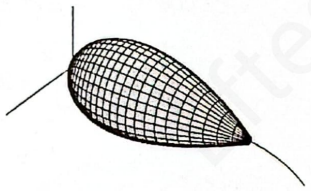
সমাধান ঃ প্রদত্ত রেখা $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 1 - t^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{4t^2 + (1-t)^2} = \sqrt{(1+t^2)^2} = 1 + t^2$$

যখন $y = 0$ তখন $t\left(1 - \frac{t^2}{3}\right) = 0 \quad \therefore t = 0, \sqrt{3}$





অর্থাৎ ফাঁসটি $t = 0$ এবং $t = \sqrt{3}$ এর মধ্যে অবস্থিত।

মনে করি প্রদত্ত রেখার ফাঁসকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করালে উৎপন্ন ঘন বস্তুর ক্ষেত্রফল = s.

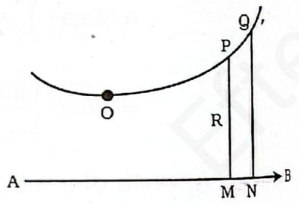
$$\therefore s = \int_0^{\sqrt{3}} 2\pi y \frac{ds}{dt} dt = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(t - \frac{t^3}{3}\right)(1 + t^2)dt$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\sqrt{3}} [3t + 2t^2 - t^5]dt = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{3t^2}{2} + \frac{t^4}{2}\frac{t^6}{6}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[\frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \frac{27}{6} - 0\right] = 3\pi \text{ বর্গ একক।}$$

24.A.3. উপপাদ্য ঃ যদি আবর্তন অক্ষ x অক্ষ বা y অক্ষ না হয়। সেইক্ষেত্রে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র প্রতিষ্ঠা কর।

সমাধান ঃ মনে করি আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর আবর্তন অক্ষ AB. উৎসারক রক্ররেখা (generating curve) এর উপরস্থ P ও Q দুইটি কাছাকাছি বিন্দু এবং O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। PM ও QN আবর্তন অক্ষের উপর লম্ব হইলে PMNQ ক্ষেত্রের জন্য আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল



$dA = 2\pi(PM).PQ = 2\pi.PM$ (OP চাপের সামান্য বৃদ্ধি)

$= 2\pi/PM.\ d(OP)$

যদি $PM = R$ এবং $OP = S$ হয় তবে $dA = 2\pi\ Rds$

সুতরাং সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের সাপেক্ষে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল

$A = \int 2\pi Rds$ ইহাই নির্ণেয় সাধারণ সূত্র।

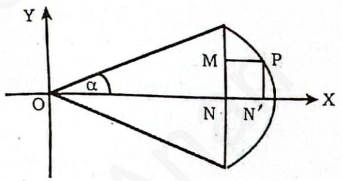
উদাহরণ–10. কোন বৃত্তাকার চাপ ও জ্যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে যদি জ্যা এর সাপেক্ষে আবর্তন করা হয় তবে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। চাপটি কেন্দ্রে 2α কোন উৎপন্ন করে। আয়তন ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যখন চাপটি বৃত্তের এক চতুর্থাংশ।

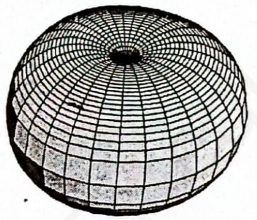
সমাধান ঃ মনে করি বৃত্তটি $x^2 + y^2 = a^2$

চিত্রানুযায়ী $PM = NN' = ON' - ON = x - a\cos\alpha$

$MN = y$

$\therefore$ আয়তন $V = \int \pi(PM)^2\, d(MN) = 2\int_0^{a\sin\alpha} \pi(x - a\cos\alpha)^2 dy$ ..... (1)





মনে করি বৃত্তের পরামাত্রিক সমীকরণ $x = a\cos t,\ y = a\sin t$

এখানে $dy = a\cos t\, dt$, যখন $y = 0$ তখন $t = 0$, যখন $y = a\sin a$ তখন $t = \alpha$

$$\therefore V = 2\pi \int_0^{\alpha} a^2(\cos^2 t - 2\cos t\cos\alpha + \cos^2\alpha)(a\cos t)dt$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\alpha}\left[\cos t(1 - \sin^2 t) - 2\cos\alpha\frac{(1 + \cos 2t)}{2} + \cos^2\alpha\cot\right]dt$$

$$= 2\pi a^3\left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} - \cos\alpha\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + \cos^2\alpha\sin t\right]_0^{\alpha}$$

$$= 2\pi a^3\left[\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{1}{3}\sin^3\alpha\right]$$

যদি চাপটি বৃত্তের এক চতুর্থাংশ হয় তবে $2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$

এবং তখন $V = 2\pi a^3\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}}\right] = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}(10 - 3\pi)a^3$

ক্ষেত্রফল $s = 2\int_0^{\alpha} 2\pi(PM)\frac{ds}{dt}dt = 4\pi\int_0^{\alpha}(x - a\cos\alpha)\frac{ds}{dt}dt$

$= 4\pi\int_0^{\alpha}(a\cos t - a\cos\alpha)a\, dt$

$= 4\pi a^2\,[\sin t - \cos\alpha t]_0^{\alpha}$

$= 4\pi a^2\,[\sin a - \alpha\cos\alpha]$

যদি চাপটি বৃত্তের এক চতুর্থাংশ হয় তবে $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore s = \frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ বর্গ একক।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

24.A.1. $x = a$ ও $x = b$, $y = f(x)$ ও x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় উহার পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সমাকলন সূত্র লিখ।

Ans : প্রদত্ত শর্তে পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র ঃ

$$\int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dx}; \quad \text{যেখানে} \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

24.A.2. $y = c$, $y = d$, $x = f(y)$ ও y অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র লিখ।

Ans : প্রদত্ত শর্তে উৎপন্ন ঘনবস্তুর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র ঃ

$$\int_c^d 2\pi y \frac{ds}{dy} dy, \quad \frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

EXERCISE–24(A)

1. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের উপরস্থ (0, 0) বিন্দু হতে (4, 4) বিন্দু পর্যন্ত অংশকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $\frac{8\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$ বর্গ একক।

2. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং উহার উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে ঘুরাইলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় উহার তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[NUH–2002] উত্তর ঃ $\frac{8}{3}\pi a^2(2\sqrt{2} - 1)$

3. $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তকে $y = 0$ হতে $y = 8$ সীমার মধ্যে y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{208}{3}$ বর্গ একক।

4. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $x = x_1$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $\frac{8}{3}\pi\sqrt{a}\{(a + x_1)^{3/2} - a^{3/2}\}$

5. a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তকে y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $4\pi a^2$ বর্গ একক।

6. প্রমাণ কর $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল $\frac{2\pi b}{\sqrt{b^2 - a^2}}\left[b\sqrt{b^2 - a^2} + a^2 \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right)\right]$.

7. $y = c \cos h\left(\frac{x}{c}\right)$ ক্যাটিনারীকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $2\pi c\left[x + \frac{c}{2}\sin h\frac{2x}{c}\right]$.

8. $y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ ক্যাটিনারীর $x = a$ হইতে $x = b$ পর্যন্ত অংশকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $\pi c\left[(b - a) + \frac{c}{2}\sinh\left(\frac{2b}{c}\right) - \frac{c}{2}\sinh\left(\frac{2a}{c}\right)\right]$

9. $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ ক্যাটিনারীর $x = 0$ হতে $x = a$ পর্যন্ত অংশকে (i) x অক্ষ, (ii). y অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[NUH–2005] উত্তর ঃ (i) $\frac{\pi a^2}{4}(e^2 + 4 - e^{-2})$, (ii). $2\pi a^2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

10. $y = x^3$ বক্ররেখার (1, 1) ও (2, 8) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $\frac{5\sqrt{5}}{27}(29\sqrt{29} - 2\sqrt{2})$ বর্গ একক।

11. $y = 2\sqrt{x + 1}$ বক্ররেখা এবং $x = 0$ ও $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের চারিদিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $\frac{8\pi}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$ বর্গ একক।

12. $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ এস্ট্রয়েডকে x অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{12\pi a^2}{5}$ বর্গ একক।

13. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ সাইক্লয়েডকে উহার ভূমির সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘন বস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[NUH-2004]**

উত্তর ঃ $\frac{64\pi a^2}{3}$ বর্গ একক।

14. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ সাইক্লয়েডকে $y = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[NUH(NM)-2005]**

উত্তর ঃ $\frac{64\pi a^2}{3}$ বর্গ একক।

15. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ সাইক্লয়েডের দুই পর্যায় ক্রমিক সুক্ষ্মাগ্র এর মধ্যবর্তী ক্ষেত্রকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, দেখাও যে উহার ক্ষেত্রফল এবং সাইক্লয়েডের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 64 ঃ 9.

16. দেখাও যে a ব্যাস বিশিষ্ট সাইক্লয়েডকে উহার শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল $\frac{32\pi a^2}{3}$ বর্গ একক হবে।

17. $9ay^2 = x(3a - x)^2$ রেখার ফাঁসকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $3\pi a^2$ বর্গ একক।

18. $x^2 - y^2 = a^2$ সমঅধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, উহার তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $2\pi a^2\left[(\sqrt{6} - 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\right)\right]$

19. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $\pi a^2\,[3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})]$

20. $ay^2 = x^3$ বক্ররেখাটিকে $y = 0$ ও $y = \frac{8a}{27}$ সীমার মধ্যে y অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $\frac{128(\sqrt{2} + 1)\pi a^2}{1215}$ বর্গ একক।

Chapter–24(B)

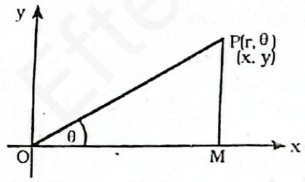
আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল (পোলার স্থানাংকে)

SURFACE AREA OF SOLIDS OF REVOLUTION (IN POLAR CO-ORDIUALE)

24.B.1. পোলার স্থানাংক এবং কার্তেসীয় স্থানাংকের মধ্যে সম্পর্ক (Relation between polar co-ordinates and Cartesian co-ordinates) :

ধরি একটি বিন্দু P এর পোলার স্থানাংক (r, θ) এবং কার্তেসীয় স্থানাংক (x, y), তাহলে চিত্র হতে পাই

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



24.B.2. পোলার স্থানাংকে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় (To find surface area of solids of revolution in polar co-ordinates) :

আমরা জানি, কার্তেসীয় স্থানাংকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল $\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\frac{ds}{dx}dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\pi r\sin\theta\frac{ds}{d\theta}d\theta$ $[\because y = r\sin\theta]$

ইহাই পোলার স্থানাংকে আদি অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল।

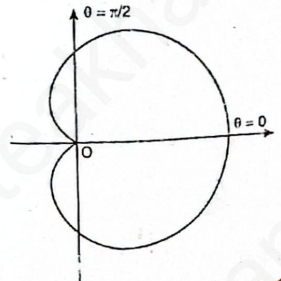
অনুরূপে $\theta = \frac{\pi}{2}$ রেখার সাপেক্ষে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল

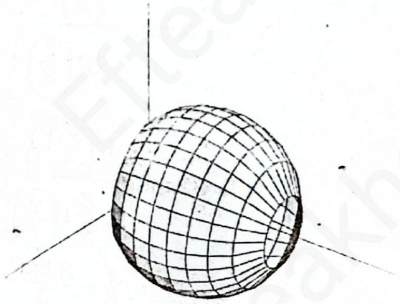
$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\pi r\cos\theta\frac{ds}{d\theta}d\theta \quad \text{যেখানে } \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

উদাহরণ–11. $r = a(1 + \cos\theta)$ [illegible]কে আদি রেখার চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় [illegible] **[DUH–60, 86, 92, RUH–83, 84]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $r = a$ [illegible] $\cos\theta)$ ..... (1)

(1) সমীকরণে θ এর পরিবর্তে $-\theta$ বসালে সমীকরণের কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং (1) কার্ডিয়ড আদি রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।





যদি $r = 0$ হয়, তবে $a(1 + \cos\theta) = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pm\pi$

$\therefore$ কার্ডিয়ডটি $\theta = -\pi$ এবং $\theta = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত এবং আদি অক্ষের উপরের অংশ $\theta = 0$ ও $\theta = \pi$ এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং প্রদত্ত কার্ডিয়ডের $\theta = 0$ ও $\theta = \pi$ এর মধ্যবর্তী অংশ আদি অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

এখন (1) $\Rightarrow \dfrac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$

$$\therefore \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{2(1+\cos\theta)} = a\sqrt{2.2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

সুতরাং আবর্তন জনিত ঘনবস্তুর তলের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^{\pi} 2\pi r\sin\theta\frac{ds}{d\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 2\pi.a(1+\cos\theta).\sin\theta.2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 4\pi a^2\,2\cos^2\frac{\theta}{2}.2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta \qquad \text{ধরি } \frac{\theta}{2} = z$$

$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4 z\sin z.2dz \qquad \therefore d\theta = 2dz$$

যখন $\theta = \pi, z = \frac{\pi}{2}$

$\theta = 0, z = 0$

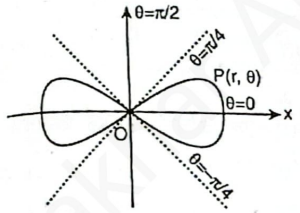
$$= 32\pi a^2.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(1)}{2\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$$

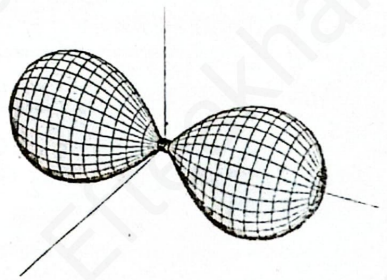
$$= 32\pi a^2.\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).1}{2.\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$= 32\pi a^2.\frac{1}{5} = \frac{32\pi a^2}{5}$$ বর্গ একক।

উদাহরণ-12. $r^2 = a^2\cos 2\theta$ রেখার একটি ফাঁসকে আদি অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[NUH-2002]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ $r^2 = a^2\cos 2\theta$ ..... (1)





(1) সমীকরণ θ এর পরিবর্তে $-\theta$ এবং r এর পরিবর্তে $-r$ বসালে সমীকরণের কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং (1) রেখাটি আদি অক্ষ ও $\theta = \frac{\pi}{2}$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

যদি $r = 0$ হয়, তবে $a^2\cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}$

সুতরাং (1) বক্ররেখার একটি ফাঁস $\theta = \frac{\pi}{4}$ ও $\theta = -\frac{\pi}{4}$ এর মধ্যে অবস্থিত। আবার ফাঁসটি আদি অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। সুতরাং (1) বক্ররেখার $\theta = 0$ ও $\theta = \frac{\pi}{4}$ এর মধ্যবর্তী অংশ আদি অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

এখন (1) $\Rightarrow r = a\sqrt{\cos 2\theta}$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = \frac{-a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \qquad \therefore \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(a^2\cos 2\theta + \frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}\right)} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

সুতরাং আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^{\pi/4} 2\pi r\sin\theta.\frac{ds}{d\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} 2\pi.a\sqrt{\cos 2\theta}.\sin\theta.\frac{9}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta = 2\pi a^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/4}$$

$$= 2\pi a^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = 2\pi a^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi a^2$$ বর্গ একক।

Quiz Questions (অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন)

24.B.1. পোলার স্থানাংকে x অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র লিখ।

Ans : নির্ণেয় সূত্র $= \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\pi r \sin\theta \frac{ds}{d\theta} d\theta$

24.B.2. পোলার স্থানাংকে $\theta = \frac{\pi}{2}$ রেখার সাপেক্ষে আবর্তনজনিত ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র লিখ।

Ans : নির্ণেয় সূত্র $= \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\pi r \cos\theta \frac{ds}{d\theta} d\theta$ যেখানে $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

EXERCISE-24(B)

1. $r = a(1 - \cos\theta)$ বক্ররেখাকে আদি রেখার চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{32\pi a^2}{5}$ বর্গ একক।

2. $r = a(1 + \cos\theta)$ বক্ররেখায় $\theta = -\frac{\pi}{2}$ হইতে $\theta = \frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত অংশকে (i) $\theta = \frac{\pi}{2}$ রেখার চতুর্দিকে (ii) $\theta = 0$ রেখায় চতুর্দিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ (i) $\frac{48\sqrt{2}}{5}\pi a^2$ বর্গ একক। (ii) $\frac{4(8-\sqrt{2})}{5}\pi a^2$ বর্গ একক।

3. $r = 2a\cos\theta$ রেখাটিকে আদি অক্ষের সাপেক্ষে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $4\pi a^2$ বর্গ একক।

4. $r^2 = a^2\cos 2\theta$ লেমনিসকেটটিকে মেরুবিন্দুতে স্পর্শকের সাপেক্ষে আবর্তন করিয়া উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $4\pi a^2$ বর্গ একক।

5. $r = a\sin\theta$ কে $\theta = \frac{\pi}{2}$ সরলরেখার চারিদিকে আবর্তন করিলে উৎপন্ন ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ πa^2 বর্গ একক।

২০০৯-২০১০ শিক্ষাবর্ষ হইতে কার্যকর গ্রেডিং ও ক্রেডিট পদ্ধতিতে প্রশ্নের ধরণ অনুযায়ী ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস অংশের গুরুত্বপূর্ণ

প্রশ্ন সম্ভার

Part–A (ক-বিভাগ)

Chapter–10

10.1. প্রতিডেরিভেটিভ কি? (What is antiderivatives?) **[NUH–2010]**

10.2. প্রতিডেরিভেটিভ নির্ণয় করার পদ্ধতিকে কি বলে? (What is called the process of finding antiderivatives?)

10.3. ইন্টিগ্রেশনের ধ্রুবক কাকে বলে? (What is called constant of integration?) **[NUH(NM)–2010]**

10.4. শূন্য ফাংশনের প্রতিডেরিভেটিভ বা ইন্টিগ্রাল কত? (What is the antiderivative or integral of zero function?)

10.5. $\int x^n dx$ এর সূত্র লিখ। (Write the formula of $\int x^n dx$)

10.6. $\int \sec x\, dx$ এর সূত্র লিখ।

10.7. $\int \text{cosec}\, x\, dx$ এর সূত্র লিখ।

10.8. $\int \frac{dx}{1+\sin x} = ?$ **[NUH(NM)-2010]**

10.9. $\int \tan^2 x\, dx = ?$

10.10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = ?$

Chapter–11

11.1. $\int (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})\, dx = ?$

11.2. $\int x\cos x^2\, dx = ?$

11.3. $\int \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta = ?$

11.4. $\int \sec^4 x\, dx = ?$

11.5. প্রতিস্থাপন পদ্ধতি কি? (What is the method of substitution?)

Chapter–12(A)

12.A.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = ?$

12.A.2. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ এর সূত্র লিখ।

12.A.3. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$ এর সূত্র লিখ।

12.A.4. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ এর সূত্র লিখ।

12.A.5. $\int \frac{6x^5\, dx}{1 + x^{12}}$ এর মান কত?

Chapter–12(B)

12.B.1. মান কত? (What is the value?) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$

12.B.2. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx$

12.B.3. মান কত? (What is the vlaue?) : $\int f'(x)\sqrt{(x)}\, dx$

12.B.4. মান নির্ণয় কর (Evaluate) : $\int (2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}\, dx$

Chapter–12(C)

12.C.1. $\int \frac{dx}{(ax + b)\sqrt{px + q}}$ এর মান নির্ণয়ের কৌশল বর্ণনা কর। [State the technique to find the value of $\int \frac{dx}{(ax + b)\sqrt{px + q}}$.]

12.C.2. $\int \frac{dx}{x(a + bx^n)^m}$, $m \in \mathbb{N}$ ইনটিগ্র্যালের মান নির্ণয়ের প্রক্রিয়া কি? [What is the process to find the value of the integral $\int \frac{dx}{x(a + bx^n)^m}$, $m \in \mathbb{N}$?]

Chapter–12(D)

12.D.1. $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$, $a > b$ এর মান কত? [What is the value of $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$, $a > b$?]

12.D.2. $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$, $a < b$ এর মান কত?

Chapter–13

13.1. যদি f(x) এবং g(x) বহুপদী হয় তবে $\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$ এর মান নির্ণয় করার নিয়ম কি? [If f(x) and g(x) are polynomials then what is the rule to find the value of $\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$?]

13.2. $\frac{x + 4}{(x - 2)(x - 3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [Express $\frac{x + 4}{(x - 2)(x - 3)}$ as partial fractions.]

Chapter–14

14.1. অংশক্রমে ইন্টিগ্রেশন কি? (What is the integration by parts?)

14.2. $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ এর সূত্র লিখ।

14.3. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ এর সূত্র লিখ।

14.4. মান কত? (What is the value?) : $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}\, dx$

14.5. মান নির্ণয় কর (evaluate) : $\int e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) dx$

Chapter–15

15.1. ইন্টিগ্রেশনের লঘুকরণ সূত্র কি? (What is the reduction formula of integration?)

15.2. $\int \sin^n x\, dx$ এর লঘুকরণ সূত্র লিখ।

15.3. $\int \cos^n x\, dx$ এর লঘুকরণ সূত্র লিখ।

(Write the reduction formula of $\int \cos^n x\, dx$)

15.4. $\int \tan^n x\, dx$ এর লঘুকরণ সূত্র লিখ।

15.5. $\int \sin^m x \cos^m x\, dx$ এর লঘুকরণ সূত্র লিখ।